170

ISTITUTO LOMBARDO - ACCADEMIA DI SCIENZE E LETTERE

JEAN SALENÇON

L'APPROCHE DE LAGRANGE DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES

Estratto da

SFOGLIANDO LA «MÉCHANIQUE ANALITIQUE»
GIORNATA DI STUDIO SU LOUIS LAGRANGE
Milano, 19 Ottobre 2006

Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto

L'APPROCHE DE LAGRANGE
DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES

JEAN SALENÇON *

SUNTO. – René Dugas (1950) vede nell'enunciato della legge delle potenze d'Aristotele, al VII libro della *Fisica* (capitolo V) e nelle *Questioni meccaniche* «il germe del principio delle velocità virtuali». Oggetto della riflessione è l'equilibrio della leva, che è spiegata dalla neutralizzazione delle due potenze (prodotto della massa, o del peso del corpo, per la velocità di movimento che le è impressa) antagoniste quando i pesi sospesi siano inversamente proporzionali alle lunghezze dei bracci che li sostengono. Un progresso si verifica con gli *Elementa Jordani super demonstrationem ponderis* di Jordanus de Nemore (XIII sec.?). Infatti, considerando la caduta dei gravi in un movimento obliquo, Jordanus non mette in conto che la componente del movimento secondo la verticale («il diretto»), cioè secondo il peso, e si può riconoscere negli scalari così introdotti l'innesco del concetto di lavoro virtuale (o di potenza virtuale nell'accezione attuale della parola «potenza»).

Benché non ne faccia alcun riferimento, Galileo, nel *Secondo Giorno* dei *Discorsi*, cercando di spiegare la differenza di resistenza esibita da una stessa trave soggetta a forze esercitate assialmente (tensione) e trasversalmente (flessione), modella la trave sottoposta a flessione come una leva a gomito immaginando implicitamente il suo meccanismo di rottura: una rotazione attorno al lembo inferiore della sezione d'incastro, che mette in gioco da una parte la forza attiva applicata e dall'altra la resistenza della materia, la sua «coesione», caratteristica intrinseca identificata sperimentalmente nell'esperienza di trazione.

Prima di Lagrange, in una lettera indirizzata nel 1717 a Varignon, Jean Bernoulli s'impegna in una formalizzazione della riflessione sulla statica e s'interessa all'equilibrio di un *punto*, d'una *linea*, d'una *superficie* o di un *corpo*, sotto l'azione di diverse forze che costituiscono un sistema. Dà a questo sistema di forze un «piccolo movimento» di traslazione o di rotazione e introduce l'espressione di *velocità virtuale della forza F* per designare, per ciascuna forza del sistema, la componente algebrica «affirmative»

* Académie des Sciences, Paris; Ecole polytechnique, Département de Mécanique, Laboratoire de Mécanique de solides (LMS), CNRS UMR 7649, 91128 Palaiseau cedex, France; e-mail: salencon@lms.polytecnique.fr.

(cospirante) o «négative» (resistente) del piccolo spostamento indotto dal piccolo movimento secondo la linea d'azione di questa forza; infine introduce il termine d'*energia* per il prodotto della forza F per la sua velocità virtuale. Formula allora il principio che in «ogni equilibrio di forze qualsivoglia [...] la somma delle energie positive sarà uguale alla somma delle energie negative considerate positivamente»; le energie coinvolte sono quelle sviluppate nei piccoli movimenti di solido rigido o indeformabile applicati al sistema di forze.

Nella *Mécanique analytique* (1788) Lagrange enuncia il principio dei lavori virtuali nella forma che segue: «Delle potenze [forze] sono in equilibrio quando sono in ragione inversa delle loro velocità virtuali espresse secondo la direzione di queste potenze».

Scostandosi dalla abituale giustificazione di questo principio derivato dai due principi della leva e della composizione delle forze, Lagrange ne dà una dimostrazione nuova, dove immagina che le forze applicate ad un sistema costituito da più corpi indeformabili siano esercitate per mezzo di un filo vincolato ad una estremità e sottoposto ad un peso unitario all'altra estremità. Il filo, perfettamente flessibile, inestensibile e privo di peso proprio, agisce sugli elementi del sistema per mezzo d'un gioco di carrucole perfettamente assemblate con sostegni rigidi. L'argomento di Lagrange è fondato su una «evidenza» sperimentale: poiché il peso tende naturalmente a scendere, affinché il sistema teso dalle differenti forze resti in equilibrio, bisogna che il peso non possa scendere per uno spostamento qualunque infinitamente piccolo dei punti del sistema. L'espressione analitica del principio generale delle velocità virtuali ne consegue in virtù di considerazioni geometriche semplici.

A partire da questa giustificazione del principio delle velocità virtuali il contributo determinante di Lagrange, primo professore d'analisi a l'École Polytechnique, si colloca nella trattazione puramente analitica delle condizioni di vincolo e nella interpretazione fisica ch'egli dà al suo metodo.

I vincoli del sistema, esterni o interni tra i corpi che lo costituiscono, sono espressi in forma d'equazioni per mezzo di funzioni delle coordinate che descrivono il sistema. Il principio delle velocità virtuali, scritto sotto forma generale, riguarda gli spostamenti infinitamente piccoli relativi a queste, e soltanto queste, equazioni.

Lagrange afferma che, dal punto di vista analitico, è equivalente scrivere, senza condizioni sugli spostamenti infinitamente piccoli dei punti del sistema, *l'equazione generale dell'equilibrio* dove sono introdotti dei moltiplicatori arbitrari sui differenziali delle equazioni di vincolo. Si tratta del celebre metodo generale dei moltiplicatori di Lagrange.

Lagrange non si limita all'aspetto analitico del metodo; egli dà l'interpretazione fisica dei termini supplementari così introdotti come rappresentazione dei lavori virtuali di alcune forze applicate al sistema e precisa più avanti: «[...] a rigore, le forze in questione hanno il ruolo delle resistenze che i corpi dovrebbero esibire in virtù del loro mutuo vincolo, o di quegli ostacoli che, per la natura del sistema, potrebbero opporsi al loro movimento; o piuttosto queste forze non sono altro che le forze stesse offerte dalle resistenze, le quali debbono essere uguali e direttamente opposte alle pressioni esercitate dai corpi». Non è il caso d'insistere, in questa sede, sulla perspicacia di questa interpretazione ben nota nel calcolo delle strutture elastiche mediante i teoremi di Castigliano e Menabrea. Vi si scorge anche l'apertura sulla formulazione attuale del principio delle potenze virtuali che fa esplicitamente apparire, oltre alle potenze virtuali degli sforzi esercitati sul sistema dall'esterno, o sul sottosistema considerato, la potenza virtuale degli sforzi interni. A titolo d'esempio, per i continui classici, ciò s'esprime mediante il campo tensoriale degli sforzi di Cauchy, che può allora interpretarsi come il moltiplicatore di Lagrange della congruenza del continuo.

S'aggiunga, benché Lagrange non ne faccia menzione, che appare che la dimostrazione fondata sul «principio delle carrucole» possa essere ripresa facendo agire delle forze di vincolo tra i solidi costituenti il sistema, per mezzo del filo, dei sostegni delle carrucole, e delle carrucole stesse: si vede allora apparire il lavoro virtuale delle forze interne.

1. À L'ORIGINE, LE LEVIER

Dans le *Deuxième Jour* des *Dialogues*, Galilée cherche à expliquer pourquoi les résistances d'une poutre aux forces axiales (tension) et aux forces transversales (flexion) sont si différentes: c'est le célèbre problème de la poutre console (*Fig. 2a*) où Galilée introduit explicitement un concept de résistance de la matière, caractéristique intrinsèque indépendante du système considéré et de la façon dont la sollicitation globale est appliquée. Plus précisément, après avoir défini la résistance de la matière en traction (*Fig. 1*), il imagine le fonctionnement de la poutre console en flexion comme un levier coudé qui multiplie la force appliquée (*Fig. 2b*).

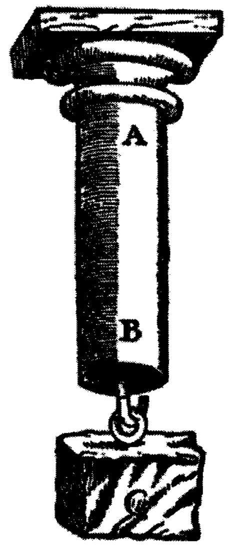
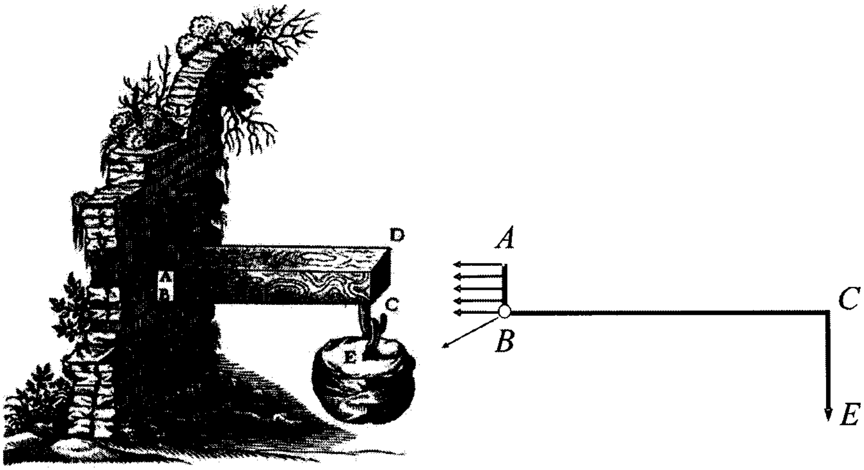


Fig. 1 – La figure 1 des «Dialogues» de Galilée.



a) b)

Fig. 2 – La figure 17 des «Dialogues» de Galilée et la modélisation.

> Imaginons un solide prismatique ABCD encastré dans un mur à l'extrémité AB, et supportant un poids E à l'autre extrémité; comprenez également que le mur est vertical et que le prisme ou le cylindre est encastré perpendiculairement au mur. Il est clair que, si le cylindre se rompt, la rupture se produira au point B où le bord de la mortaise agit en tant que point d'appui pour le levier BC, auquel la force est appliquée; l'épaisseur BA du solide est l'autre bras du levier le long duquel est située la résistance. Cette résistance s'oppose à la séparation de la pièce BD, se trouvant en dehors du mur, de la partie se trouvant à l'intérieur.

Il s'agit à proprement parler d'une modélisation du système qui, même si elle aboutit à une analyse statique (équilibre des moments), trouve son origine dans un mécanisme de rupture imaginé pour la poutre à travers l'expression «il est clair que [...]»: rotation autour du point d'appui *B* sur la *Figure 2b.*

On sait que le raisonnement de Galilée pour ce problème a souvent été critiqué du point de vue de la statique pour le fait que l'équilibre des forces horizontales n'est visiblement pas satisfait. En fait il s'avère que Galilée n'évoquant nulle part la ruine des fibres en compression suppose leur résistance infinie sous cette sollicitation et qu'il suffit dès lors d'une fibre en compression en *B* pour assurer l'équilibre des forces horizontales sans changer le résultat pour la valeur maximum de E. Mais il est plus important de signaler que d'une façon générale il s'agit là typiquement d'un raisonnement qui ressortit à ce qui est maintenant formalisé comme théorie du calcul à la rupture et à son approche par borne supérieure fondée sur le principe des puissances virtuelles.

Le principe du levier dont Galilée fait ici usage semble véritablement à l'origine des réflexions qui, au fil des siècles, ont conduit aux concepts de vitesses virtuelles, de travaux virtuels, et aux principes associés.

Dugas (1950) voit dans l'énoncé de la loi des puissances chez Aristote, au VII$^{\text{ème}}$ livre de la *Physique* (chapitre V) et dans les *Questions mécaniques*, «le germe du principe des vitesses virtuelles»:

> Si le moteur est α, le mobile β, la longueur parcourue γ et le temps employé à le parcourir δ, alors une même puissance, savoir la puissance α, mouvra dans le même temps la moitié de β le long d'un parcours double de γ.

L'équilibre du levier est alors expliqué par la neutralisation des deux puissances antagonistes lorsque les poids suspendus sont inversement proportionnels aux longueurs des bras qui les soutiennent. Il convient ici de prendre garde à la signification donnée au mot «puissance»: il désigne le produit de la masse (ou du poids du corps) par la vitesse du mouvement qui lui est imprimé.

Un pas essentiel est franchi avec les *Elementa Jordani super demonstrationem ponderis* de Jordanus de Nemore, dont on ne connaît véritablement ni l'auteur ni l'époque (XIII$^{\text{ème}}$ siècle?). En effet, considérant la chute des graves dans un mouvement oblique, Jordanus ne prend en compte que la composante du mouvement selon la verticale («le direct»), c'est-à-dire selon la pesanteur et l'on peut reconnaitre dans les scalaires ainsi introduits l'amorce du concept de travail virtuel (ou de puissance virtuelle avec le sens moderne du mot «puissance»).

2. L'APPORT DE JEAN BERNOULLI

Dans une lettre adressée en 1717 à Varignon, Jean Bernoulli généralise et formalise la réflexion sur la statique.

L'équilibre étudié est désormais explicitement celui d'un *point*, d'une *ligne*, d'une *surface* ou d'un *corps*, sous l'action de diverses forces qui constituent un système. Il donne à ce système de forces un «petit mouvement» de translation ou de rotation. Généralisant l'idée de Jordanus, il introduit la terminologie de *vitesse virtuelle de la force F* pour désigner, pour chacune des forces du système, la composante algébrique (*affirmative* ou *négative*) du petit déplacement induit par le petit mouvement selon la ligne d'action de cette force; enfin, il introduit le terme d'*énergie* pour le produit de la force *F* par sa vitesse virtuelle.

Le principe énoncé par Jean Bernoulli est que

> en tout équilibre de forces quelconques, en quelque manière qu'elles soient appliquées, et suivant quelques directions qu'elles agissent les unes sur les autres, ou médiatement ou immédiatement, la somme des énergies affirmatives sera égale à la somme des énergies négatives prises affirmativement

Il concerne, comme on l'a dit, les énergies développées dans les petits mouvements de solide rigide ou indéformable appliqués au système de forces.

3. Le «principe des poulies» et la formulation de Lagrange

Dans la *Mécanique analytique* (1788) Lagrange énonce le principe des travaux virtuels sous la forme suivante:

> Des puissances sont en équilibre quand elles sont en raison inverse de leurs vitesses virtuelles exprimées suivant la direction de ces puissances.

Dans cet énoncé le mot «puissance» doit être entendu au sens actuel de «force»:

> On entend en général par *force* ou *puissance* la cause, quelle qu'elle soit, qui imprime ou tend à imprimer du mouvement au corps auquel on la suppose appliquée;

La justification de ce principe, que Lagrange juge ne pas être «assez évident par lui-même pour pouvoir être érigé en principe premier», lui apparaît comme habituellement issue des deux principes du levier et de la composition des forces mais il voit dans le «principe des poulies» le «fondement naturel du principe des vitesses virtuelles».

Lagrange en donne alors une démonstration fondée sur les propriétés simples des poulies, des moufles et des fils inextensibles, parfaitement flexibles et non pesants, que l'absence de figures dans l'ouvrage [1] rend quelque peu difficile à suivre à la première lecture. Risquant le sacrilège, la *Figure 3* tente ici d'appuyer le raisonnement.

L'idée directrice de la justification consiste à imaginer par la pensée que les forces appliquées aux corps constitutifs du système sont exercées au moyen d'un même fil ancré à l'une de ses extrémités et supportant un poids pris pour unité 1 à l'autre extrémité. Ce fil, parfaitement flexible, inextensible et non pesant agit sur les éléments du système au moyen d'un jeu de poulies parfaites assemblées en moufles, dont on désigne par $P, Q, R, \ldots$ le nombre de poulies, de telle sorte que les forces appliquées ont pour intensité ces mêmes valeurs $P, Q, R, \ldots$ et sont dirigées selon les cordons. L'argument de Lagrange est alors le suivant:

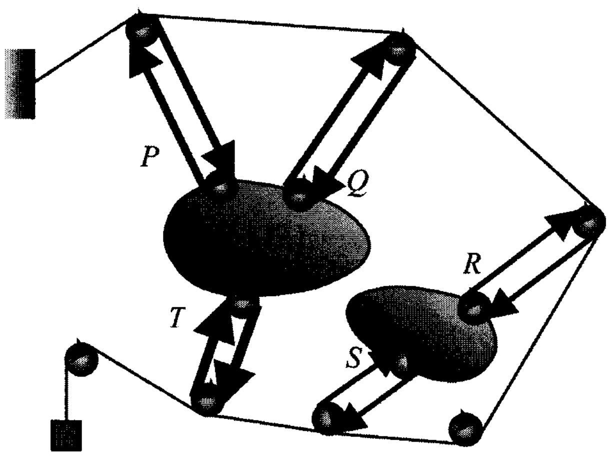


Fig. 3 – Tentative de schéma pour illustrer le raisonnement de Lagrange.

[1] *Avertissement* de la première édition de la *Mécanique analytique*: «On ne trouvera point de Figures dans cet ouvrage. Les méthodes que l'on y expose ne demandent ni constructions ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques assujetties à une marche régulière et uniforme».

> Or il est évident que, pour que le système tiré par ces différentes puissances demeure en équilibre, *il faut que le poids ne puisse pas descendre par un déplacement quelconque infiniment petit des points du système*; car, le poids tendant toujours à descendre, s'il y a un déplacement quelconque infiniment petit du système qui lui permette de descendre, il descendra nécessairement et produira ce déplacement dans le système.

En désignant par «α, β, γ, [...] les espaces infiniment petits que ce déplacement ferait parcourir aux différents points du système suivant la direction des puissances qui les tirent», le fil étant inextensible, le déplacement résulte d'un calcul géométrique simple et est égal à $P\alpha + Q\beta + R\gamma + ...$ qui doit être nul:

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + ... = 0 ,$$

«ce qui est l'expression analytique du principe général des vitesses virtuelles» puisque P, Q, R, ... sont les intensités des forces selon les directions des cordons.

Comme celles qui lui sont antérieures, la démonstration de Lagrange repose sur une constatation expérimentale, reconnue comme vérité évidente; ici, il s'agit de la tendance naturelle du poids à descendre si un déplacement infiniment petit des points du système le lui permet. L'apport de ce raisonnement est, nous semble-t-il, qu'il traite de l'équilibre d'un système constitué de plusieurs corps (indéformables) et donc déformable.

4. Lagrange et la prise en compte des liaisons

Cette justification du principe des vitesses virtuelles à partir du principe des poulies peut être considérée comme anecdotique en regard de l'apport déterminant de Lagrange, premier professeur d'analyse à l'école polytechnique, dans l'écriture de ce principe pour traiter les conditions de liaison où, partant de considérations purement analytiques il aboutit à une interprétation physique de sa méthode. On en rappellera ici les grandes lignes.

Les liaisons du système, externes ou internes entre les corps qui le constituent, sont exprimées au moyen de fonctions des coordonnées qui décrivent le système sous la forme des équations:

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0,\ \ldots; \tag{1}$$

le principe des vitesses virtuelles, écrit sous la forme générale

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots = 0, \tag{2}$$

ne concerne que les déplacements infiniment petits qui maintiennent ces équations, c'est-à-dire qui vérifient:

$$dL = 0,\ dM = 0,\ dN = 0,\ \ldots \tag{3}$$

Lagrange observe que les équations (2) et (3) sont équivalentes à «l'équation générale de l'équilibre»

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots + \lambda dL + \mu dM + \nu dN + \ldots = 0 \tag{4}$$

où λ, μ, ν, ... sont arbitraires, écrite sans restriction sur les déplacements infiniment petits du système. C'est la célèbre méthode des multiplicateurs de Lagrange qui, en écrivant l'indétermination de λ, μ, ν, ... et compte tenu de l'équation (1), fournit les équations de la statique.

L'interprétation physique apportée par Lagrange concerne les termes de la forme λdL, μdM, ..., qui «peuvent être regardés comme représentant les travaux virtuels de certaines forces appliquées au système» et il précise plus loin «à proprement parler, les forces en question tiennent lieu des résistances que les corps devraient éprouver en vertu de leur liaison mutuelle, ou de la part des obstacles qui, par la nature du système, pourraient s'opposer à leur mouvement; ou plutôt ces forces ne sont que les forces mêmes de ces résistances, lesquelles doivent être égales et directement opposées aux pressions exercées par les corps».

Il n'est pas besoin d'insister, en ce lieu, sur la perspicacité de cette interprétation bien connue en calcul des structures élastiques à travers les théorèmes de Castigliano et de Menabrea.

Mais on doit y voir aussi l'ouverture sur la formulation actuelle du principe des puissances virtuelles qui fait explicitement apparaître outre la puissance virtuelle des efforts exercés sur le système ou le sous-système considéré par l'extérieur de celui-ci, la puissance virtuelle des efforts intérieurs. À titre d'exemple, pour le milieu continu classique celle-ci s'exprime au moyen du champ tensoriel des contraintes de Cauchy qui peut alors s'interpréter comme le multiplicateur de Lagrange de la continuité du milieu.

5. Vitesses virtuelles, travaux virtuels ou puissances virtuelles?

On a vu que, dans les divers travaux cités, la terminologie était fluctuante. En particulier la claire distinction actuelle entre un *travail* et une *puissance* n'était pas perçue, pour ne rien dire de l'emploi du mot *puissance* pour désigner la *force*. De même, il ne semblait pas y avoir d'ambigüité à faire appel indifféremment aux expressions *vitesses virtuelles* et *déplacements infiniment petits*. La terminologie étant fixée de nos jours, un débat semble subsister quant à l'appellation à retenir pour le principe dont nous avons tenté un bref survol.

Suivant en cela d'autres auteurs tels que Paul Germain, nous pensons que la nature des concepts mathématiques impliqués (espaces vectoriel, linéarité, dualité) oriente clairement la terminologie vers *puissances virtuelles* développées dans un *champ de vitesse virtuelle*, élément de l'espace vectoriel des mouvements virtuels définis sur le système et tous ses sous-systèmes.

Références bibliographiques

Dugas 1950 — R. Dugas, *Histoire de la mécanique*, éd. par. J. Gabay, Neuchâtel, Editions du Griffon, 1996.

Galilei 1638 — G. Galilei, *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze*, Leyden, Elsevirii, 1638 (trad. ingl. *Dialogues concerning two new sciences*, transl. by H. Crew, A. de Salvio, 1914, New York, Dover, 1954).

Germain 1986 — P. Germain, *Mécanique*, Paris, Ellipses, 1986.

Salençon 1990 — J. Salençon, *An introduction to the Yield Design Theory and its applications to soil mechanics*, European Journal of Mechanics. A/Solids 9 (1990), 477-500.

Salençon 2001 — J. Salençon, *Handbook of continuum mechanics*, Berlin - Heidelberg, Springer-Verlag, 2001.