

## DE LA RUPTURE AUX CONTRAINTES ...

### GALILEO'S INSIGHTS IN CONTINUUM MECHANICS

Jean SALENÇON

Laboratoire de mécanique de solides (LMS), CNRS UMR 7649 – Département de mécanique  
École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France  
[salencon@lms.polytechnique.fr](mailto:salencon@lms.polytechnique.fr)

**RÉSUMÉ** – Il est relativement banal d'évoquer les travaux de Galilée et de Coulomb dans l'histoire des analyses à la rupture. Le but de cette présentation est, en revisitant quelques textes, de faire justice de certaines critiques et, surtout, de mettre en évidence des apports, parfois peu connus, qui vont de la théorie même des milieux continus à l'analyse des ouvrages.

**ABSTRACT** – Although it is quite common in an historical survey of yield analysis and design to recall famous works by Galileo and Coulomb as milestones, revisiting those texts makes it possible to discard some often encountered criticisms and moreover, to enhance remarkable insights ranging from the theory of the mechanical continuum to structure analysis, which are sometimes little known.

#### 1. Les Dialogues

Si l'on en croit ce qu'il écrivait à son ami Elia Diodati, Galilée considérait *les Dialogues sur deux nouvelles sciences* comme *supérieurs à tout ce qu'il avait publié jusqu'alors*. Galilée avait jeté les bases de ce travail dès son séjour à Padoue mais il ne lui donna sa forme finale que durant les cinq mois de sa résidence forcée à Sienne après son procès et sa condamnation. Il déclarait alors avoir achevé la rédaction d'un *traité sur un nouveau domaine de la mécanique plein d'idées intéressantes et utiles*. La publication de l'ouvrage se révéla impossible en Italie, l'Inquisiteur se référant à un ordre express interdisant l'impression ou la réimpression de toute œuvre de Galilée à Venise et en tout autre lieu, *nullo excepto*. Pour cette raison ce célèbre livre fut imprimé à Leyde en 1638, rapporté par Louis Elzevir, qui était arrivé en Italie in 1636<sup>1</sup>.

#### 2. Rupture et similitude

Le *Premier jour* commence par des considérations qui se rattachent à ce que nous appelons aujourd'hui l'**analyse dimensionnelle** et la **similitude**.

*"Pourtant je dirai et affirmerai que, même si les imperfections n'existaient pas et si la matière était absolument parfaite, immuable et exempte de toute variation accidentelle, le seul fait que c'est de la matière a pour conséquence que la machine la plus grande, construite du même matériau et dans les mêmes proportions que la plus petite, correspond exactement à celle-ci à tous égards, sauf qu'elle ne sera pas aussi forte ou résistante contre un traitement violent ; plus la machine est grande, plus grande est sa faiblesse."*

---

<sup>1</sup> Cette courte introduction est issue de la préface du Professeur Antonio Favaro de l'Université de Padoue pour la première traduction en anglais, parue en 1914, des *Dialogues*.



Figure 1. Première page des *Dialogues* de Galilée.

En fait, dans cet énoncé, le “traitement violent” évoqué est implicitement dû à l’action des forces de gravité dans la structure ou dans la machine. Suivent des exemples tels que :

« Si nous prenons une tige en bois d’une certaine longueur et d’une certaine taille [section, NDLA], encastree perpendiculairement dans un mur par exemple, c’est-à-dire, parallèlement à l’horizontale, elle peut être réduite à une longueur telle qu’elle se soutiendra juste elle-même ; de sorte que si la largeur d’un cheveu était ajoutée à sa longueur elle se casserait sous son propre poids et serait la seule tige de la sorte dans le monde. »

Sans qu’il soit nécessaire de recourir à aucun calcul on comprend, dès cet exemple, que c’est la compétition entre l’action des forces de gravité et des forces de résistance dans le volume de la tige (lesquelles seront examinées plus loin dans le même *Jour*) qui est en cause. À ce stade, l’énoncé “plus la machine est grande, plus grande est sa faiblesse” nous conduit à penser que les deux types de forces sont liées différemment à l’échelle du solide considéré. Passant, pour faire court, directement au *Deuxième Jour* on voit qu’après avoir reconnu que les forces résistantes sont attachées à des surfaces alors que les forces de gravité sont attachées aux volumes, Galilée énonce la conclusion :

« De ce qui a été déjà démontré, vous pouvez simplement voir l’impossibilité d’augmenter la taille des structures à de vastes dimensions dans l’art [de construire, NDLA] ou dans la nature ; ... ; de même la Nature ne peut produire des arbres de taille extraordinaire parce que les branches se casseraient sous leur propre poids ; ainsi il serait impossible de construire les structures osseuses des hommes, des chevaux, ou des animaux de façon à les assembler et à ce qu’elles remplissent leurs fonctions normales si ces animaux devaient être augmentés énormément dans la taille ; en effet cette augmentation de taille ne peut être réalisée qu’en utilisant un matériau qui est plus dur et plus résistant que le matériau usuel, ou en agrandissant la taille [section, NDLA] des os, et de ce fait en changeant leur forme jusqu’à aboutir à ce que ces animaux aient un aspect monstrueux. »

La Figure 2 présente le dessin fameux où Galilée a « esquissé un os dont la longueur normale a été augmentée trois fois et dont l’épaisseur a été multipliée de façon à ce que pour l’animal ainsi agrandi, il remplisse la même fonction que le petit os remplit pour son petit animal. »

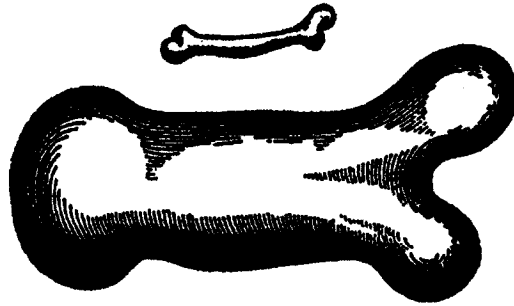


Fig. 27

Figure 2. La figure 27 des *Dialogues* de Galilée.

Même s'ils n'en soupçonnent parfois pas l'existence, on voit que cette analyse de Galilée annonce la pratique courante des ingénieurs, géotechniciens notamment, qui ont recours à des expériences sur modèles réduits comme une voie d'approche dans le dimensionnement d'une structure, en particulier quand celle-ci s'éloigne, par ses dimensions ou en raison des sollicitations particulières auxquelles elle est soumise, des standards existants. Ainsi dans le dimensionnement des fondations d'un pont par exemple, l'ingénieur a affaire à des matériaux de différents types. Pour certains d'entre eux, la loi de comportement est suffisamment bien établie et simple ; il est alors possible de mettre en œuvre des matériaux différents dans le modèle réduit de façon à ce que la correspondance entre les structures aux deux échelles soit correcte. Pour d'autres, tels que les sols, le comportement est complexe et dépend en particulier du niveau des efforts intérieurs qui leur sont appliqués; il est alors pratiquement obligatoire pour réaliser des essais sur modèles réduits représentatifs, de conserver le matériau et de substituer aux forces de gravité des forces de masse accrues en raison inverse de l'échelle du modèle : essais en centrifugeuse (Figure 3), technique du gradient hydraulique, etc.

Pour en revenir à l'exemple de Galilée, les biomécaniciens qui s'intéressent actuellement à la mécanique des tissus osseux expliquent que, quoique constitués des mêmes bases, le collagène et l'hydrox apatite, la résistance de ces tissus (et leur élasticité) varie(nt) avec les proportions de ces constituants : ainsi les os de baleines comptent 95% d'hydrox apatite alors que les tendons de queues de rats comportent pratiquement 100% de collagène (Hellmich *et al.*, 2004).

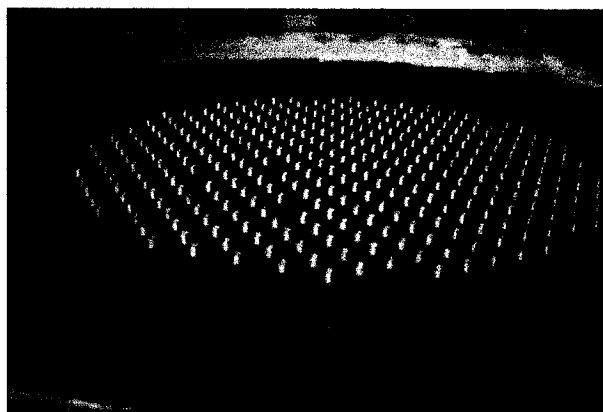


Figure 3. Essai sur modèle réduit d'une fondation en sol renforcé.

Actuellement, l'analyse dimensionnelle est le plus souvent identifiée au théorème des II, habituellement attribué à Buckingham (1914) bien qu'il ait été établi par Vaschy (1892) environ 20 ans plus tôt. Sous sa forme la plus connue ce théorème conduit à une méthode pratique pour la mise en évidence des facteurs sans dimensions qui régissent un phénomène physique. Il rend ainsi la résolution du problème plus rapide, réduisant la quantité de calculs numériques à exécuter, et la présentation et l'analyse des résultats plus faciles. Il donne également des règles de similitude claires pour les essais sur modèles réduits représentatifs. Les facteurs sans-dimensions, tels que les célèbres de nombre de Reynolds, de Mach, de Froude, etc., sont si populaires chez les mécaniciens des fluides que les étudiants en génie civil oublient parfois que l'analyse dimensionnelle est tout aussi pertinente en mécanique structures ; ajoutons que ces mêmes étudiants, puisqu'ils emploient le système d'unités international (SI), souvent ne s'inquiètent même pas de la nature physique des quantités qu'ils manipulent et évidemment encore moins de l'homogénéité dimensionnelle. De ce point de vue, la Géotechnique jouit d'un sort un peu plus enviable, notamment en ce qui concerne les analyses de stabilité. Nul paradoxe enfin à ce que le raisonnement dimensionnel de Galilée soit si semblable aux considérations développées par le prix Nobel Pierre-Gilles de Gennes et ses collaborateurs : rien que de la pure physique !

En fait les fondements mathématiques de l'analyse dimensionnelle ne sont pas du tout banals. L'idée de base réside dans le sentiment que toute loi physique doit être indépendante des unités que l'observateur choisit pour chaque quantité impliquée dans son écriture. Il en résulte qu'il devrait être possible de procéder à une variation continue des unités sans aucun changement dans l'écriture de cette loi. Un problème étant posé au moyen d'un système d'équations différentielles de champs et de conditions aux limites, dépendant du temps, où les valeurs prescrites de quelques quantités ou champs sont les données, la solution du problème doit être une relation générale où les quantités inconnues et les champs inconnus sont déterminés en fonctions de ces données. La démonstration de ce que cette relation implique seulement des facteurs sans dimensions construits à partir de toutes les quantités apparaissant dans le problème est un travail mathématique difficile pour lequel on se réfère souvent à un théorème dû à Federman (1911). Mais ce n'est que dans des articles plus récents (Saint-Guilhem, 1985), s'appuyant sur quelques résultats de topologie liés aux propriétés des sous-groupes connexes par arcs de  $\mathbb{R}^n$  (Hayashida, 1949 ; Homma et Minagawa, 1949 ; Bourbaki, 1974) qu'une démonstration complète du théorème de Vaschy-Buckingham a été donnée.

### 3. Rupture et continuité : le concept de contrainte

Revenant au *Premier jour des Dialogues*, on s'intéresse maintenant à la façon dont Galilée pressent le concept de milieu continu à travers l'idée de « cohérence » de la matière :

« Pour saisir cela plus clairement, imaginez un cylindre ou un prisme, *AB*, fait de bois ou tout autre matériau solide cohérent. Attachez l'extrémité supérieure, *A*, de sorte que le cylindre pende verticalement. À l'extrémité inférieure, *B*, attachez le poids *C*. Il est clair que pour grandes que puissent être, la ténacité [tenacità] et la cohérence [coerenza] entre les parties de ce solide, à condition qu'elles ne soient pas infinies, elles peuvent être surmontées par la traction du poids *C*, poids qui peut être augmenté indéfiniment jusqu'à ce que, finalement, le solide casse comme une corde. Et comme dans le cas de la corde dont la force, nous le savons, est due à la multitude de fils de chanvre qui la composent, ainsi dans le cas du bois, nous observons que ses fibres et ses filaments fonctionnent en long et le rendent beaucoup plus résistant qu'une corde de chanvre de la même épaisseur. Mais dans le cas d'une pierre ou d'un cylindre métallique où la cohérence semble être encore plus grande le ciment qui tient les parties ensemble doit être quelque chose autre que des filaments et des fibres ; mais même ceci peut être cassé par une forte traction. »

Il apparaît ici que Galilée se rend compte de ce que la résistance du morceau de solide « cohérent » qu'il examine (Figure 4) provient de la solidarité entre ses éléments constitutifs. Puisqu'il ne s'intéresse pas à l'évolution de la déformation de ce solide quand la charge croît, il imagine uniquement les forces intérieures, qui tiennent les parties ensemble, comme résistant à la rupture. Sans extrapolation excessive de la pensée de Galilée, on peut aussi avancer que ces forces internes, puisqu'elles tiennent des pièces ensemble, sont des forces de contact entre les éléments et, puisque l'homogénéité est implicitement supposée, qu'elles sont uniformément réparties sur la section transversale.

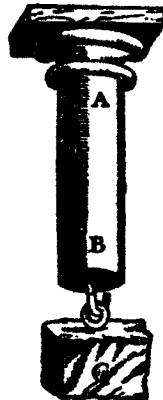
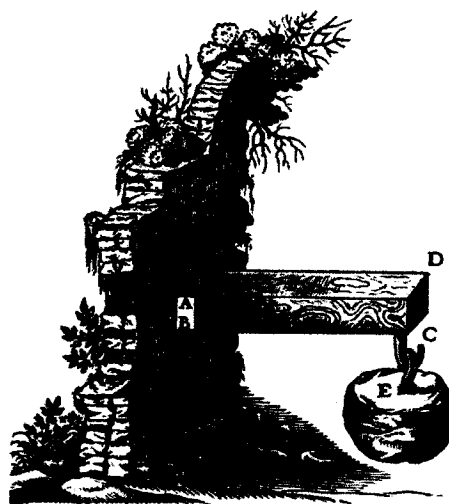


Fig. 1

Figure 4. La figure 1 des *Dialogues* de Galilée.

Dans le *Deuxième Jour*, avec le problème si souvent cité de la poutre console (Figure 5), ce concept de forces intérieures résistantes apparaît plus clairement. Le but de l'analyse est d'expliquer pourquoi les résistances d'une poutre aux forces axiales (tension) et aux forces transversales (flexion) sont si différentes. Comme cela apparaît dans l'extrait donné ci-dessous, la résistance en tension de la poutre est considérée comme mobilisée et uniformément distribuée dans une section transversale. Ceci peut apparaître comme un premier pas vers le concept de **vecteur contrainte**, qui serait, dans ce cas-ci, normal à la section transversale considérée.

Figure 5. La figure 17 des *Dialogues* de Galilée.

« Imaginons un solide prismatique  $ABCD$  encastré dans un mur à l'extrémité  $AB$ , et supportant un poids  $E$  à l'autre extrémité ; comprenez également que le mur est vertical et que le prisme ou le cylindre est encastré perpendiculairement au mur. Il est clair que, si le cylindre se rompt, la rupture se produira au point  $B$  où le bord de la mortaise agit en tant que point d'appui pour le levier  $BC$ , auquel la force est appliquée ; l'épaisseur  $BA$  du solide est l'autre bras du levier le long duquel est située la résistance. Cette résistance s'oppose à la séparation de la pièce  $BD$ , se trouvant en dehors du mur, de la partie se trouvant à l'intérieur. »

Sans prétendre à l'exhaustivité historique de l'élaboration du concept de milieu continu, passons directement à l'Essai de Coulomb (1773). Des forces internes sont explicitement introduites comme forces résistantes en même temps que les concepts de frottement et de cohésion. Dans l'exemple de l'analyse de stabilité d'un mur de soutènement traité comme un problème à deux dimensions (Figure 6), une ligne de rupture potentielle  $Beg$  est tracée dans le volume de sol et l'équilibre de la masse de sol  $CBeg$  est examiné sous l'action des forces de pesanteur, de la poussée du mur et en tenant compte de la résistance à la rupture le long de  $Beg$  : cette résistance est exercée par des forces normales et tangentielles distribuées sur la ligne.

Sans qu'il soit nécessaire d'y insister, on voit que, bien qu'il soit seulement introduit en tant que forces résistantes dans une analyse de stabilité, comme dans l'analyse de Galilée, le concept d'un **vecteur contrainte** (comme nous l'appellerions maintenant) est présent à cette étape : sur tout élément de surface le long de la ligne  $Beg$  les actions exercées par le volume de sol situé du côté droit sont remplacées par une force élémentaire.

**E S S A I**  
*Sur une application des règles de Maximis & Minimis  
à quelques Problèmes de Statique, relatifs à  
l'Architecture.*  
Par M. COULOMB, Ingénieur du Roi.

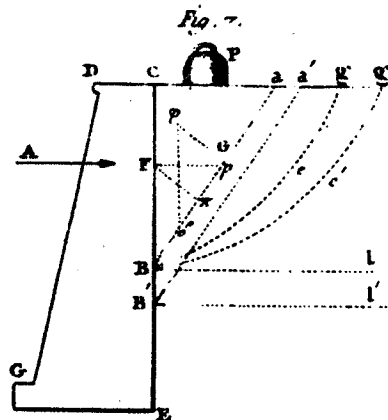


Figure 6. Analyse de stabilité d'un mur de soutènement dans l'Essai de Coulomb.

Le concept fut définitivement mis en place par Cauchy (1829) sans aucune référence explicite à l'analyse de stabilité (Figure 7). En un point quelconque d'un corps solide on introduit les 9 composantes de la densité surfacique des forces exercées sur trois éléments plans mutuellement orthogonaux par les particules constitutives voisines. À partir de l'équilibre d'éléments infinitésimaux on en déduit que sur tout autre élément plan au même point les composantes de la densité surfacique des forces correspondante sont déterminés à partir des 9 précédentes et dépendent linéairement de l'orientation du plan. On établit la symétrie du tableau des 9 composantes et les équations de la dynamique.

Cette présentation classique du tenseur des contraintes de Cauchy apparaît dans la plupart des manuels de mécanique des milieux continus parce qu'elle donne une vision concrète du concept mathématique correspondant. Il est également remarquable que, bien que le mémoire de Cauchy ait été consacré au corps *solide*, la polyvalence des concepts de vecteur contrainte et de tenseur des contraintes est telle qu'ils peuvent être appliqués à n'importe quel matériau

s'étendant des solides aux fluides, si les interactions entre les particules constitutives peuvent être modélisées par une densité surfacique de *forces de contact*.

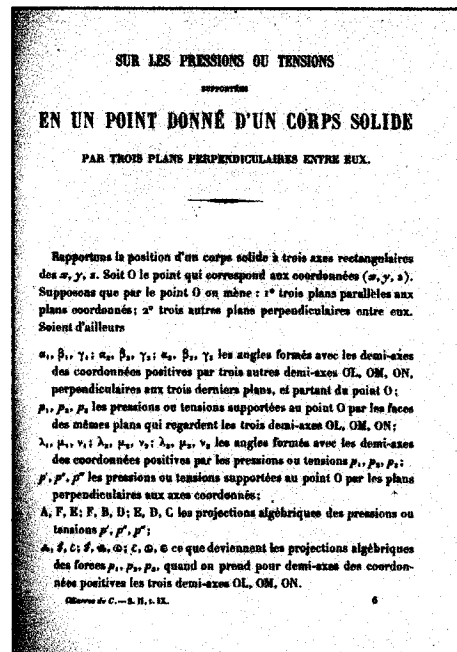


Figure 7. Mémoire de Cauchy *Sur les pressions ou tensions supportées en un point donné d'un corps solide par trois plans perpendiculaires entre eux.*

Revenant à Galilée et à Coulomb, nous avons vu que l'introduction des forces intérieures était, dans chaque cas, associée à l'évocation d'un mouvement potentiel ou virtuel imaginé pour la rupture dans le problème de portance de la poutre console (rotation autour du point d'appui  $B$  sur la Figure 5) ou d'effondrement dans le problème d'analyse de stabilité (rupture le long de  $Beg$  sur la Figure 6). Ceci met en évidence la dualité mathématique entre le concept de forces intérieures et la déformation interne de la matière. Cette dualité n'avait pas échappé à Lagrange (1788) qui, poursuivant dans la voie ouverte par Jordanus, Descartes, Wallis et Jean Bernoulli, énonçait, d'une manière générale, (citations extraites de Dugas, 1950) :

« Des puissances sont en équilibre quand elles sont en raison inverse de leurs vitesses virtuelles exprimées suivant la direction de ces puissances. »<sup>2</sup>

Il se refusait néanmoins à ériger cet énoncé en principe premier :

« Quant à la nature du principe des vitesses virtuelles, il faut convenir qu'il n'est pas évident par lui-même pour pouvoir être érigé en principe premier ; mais on peut le regarder comme l'expression générale des lois de l'équilibre, déduites des deux principes. »

La méthode des puissances virtuelles, qui est parfois adoptée pour modéliser les efforts extérieurs et intérieurs en mécanique des milieux continus notamment (cf. par exemple, Salençon, 2001), suit cette voie. Elle fournit un cadre mathématique général et sûr qui peut être appliqué pour ces modélisations dès que les caractéristiques géométriques du système concerné et l'observation phénoménologique de son comportement ont induit sa modélisation géométrique et le choix des mouvements virtuels à considérer (Figure 8).

<sup>2</sup> Dans ce texte le mot *puissance* doit être entendu au sens actuel de *force* selon la définition même de Lagrange : « On entend en général par force ou puissance la cause, quelle qu'elle soit, qui imprime ou tend à imprimer du mouvement au corps auquel on la suppose appliquée ; ... ». C'est ici l'occasion de rappeler que le caractère de *cause* attribué au concept de force est à l'origine de la volonté de Saint Venant de construire une mécanique sans forces pour des raisons philosophiques.

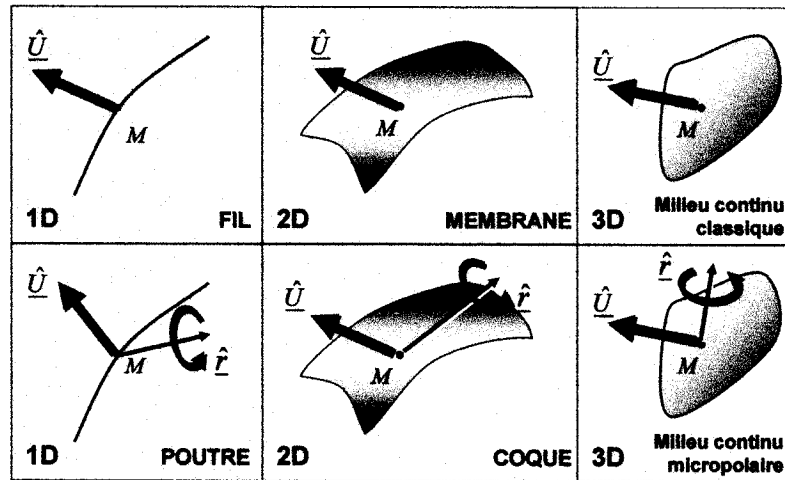


Figure 8. Champs de vitesse virtuelle utilisés pour la modélisation des milieux continus uni-, bi- et tridimensionnels, classiques et micropolaires.

### 3. Calcul à la Rupture

Comme on l'a déjà noté, les analyses de Galilée et de Coulomb suivent la même ligne de pensée. D'une manière générale la question posée est celle de la résistance d'un système soumis à un certain mode de chargement quand la résistance de son matériau constitutif est donnée.

Sur la Figure 5, Galilée cherche à expliquer la différence qu'il a observée entre les résistances en traction et en flexion d'une même poutre. Il suppose implicitement que la résistance de la poutre vis-à-vis de la flexion peut être déduite de la résistance en traction des fibres constitutives, celle-ci pouvant être elle-même déterminée à partir d'un essai de traction tel que celui représenté sur la Figure 4. Sans doute guidé par une analyse expérimentale dans laquelle la rupture par arrachements des fibres est plus évidente que la rupture en compression, il ne fait aucune mention de la résistance des fibres en compression, ce qui revient en fait à la supposer infinie. Puis, considérant que la poutre console agit comme un levier coudé dont  $B$  est le point d'appui, il écrit l'équilibre entre les moments en  $B$  de la charge appliquée au point  $C$  et des forces de résistance distribuées dans la section transversale  $BA$ , comme représenté sur la Figure 9, ce qui fournit une valeur maximale pour le poids  $E$ .

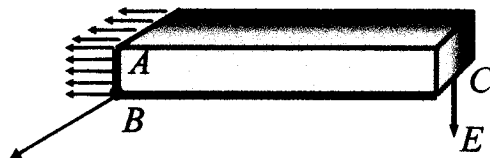


Figure 9. Principe du raisonnement de Galilée.

Le raisonnement de Galilée pour ce problème a souvent été critiqué du fait que l'équilibre des forces horizontales n'est visiblement pas satisfait. En fait il s'avère que, dès que l'on suppose que la résistance en compression des fibres est infinie, il suffit d'une fibre horizontale en compression en  $B$  pour assurer l'équilibre des forces horizontales sans changer le résultat



pour la valeur maximum de  $E$ . Toutefois, d'autres critiques peuvent être faites et une interprétation précise de la solution de Galilée sera donnée dans la suite.

L'analyse de Coulomb est plus élaborée. L'équilibre entre les forces actives et les forces résistantes est encore la pierre angulaire du raisonnement. Mais les forces résistantes ne sont plus unidimensionnelles et la résistance du matériau est définie par une condition imposée aux composantes normale et tangentielle de la densité des forces résistantes agissant le long de  $Beg$  : un domaine de résistance est prescrit pour le matériau, défini par le célèbre critère de Coulomb. Deux points importants doivent être soulignés à ce stade.

- Coulomb fait une distinction claire entre les forces actives d'une part et les forces résistantes de l'autre :

*« Le frottement et la cohésion ne sont point des forces actives comme la gravité, qui exerce toujours son effet en entier, mais seulement des forces coercitives ; l'on estime ces deux forces par les limites de leur résistance. »*

- En outre, Coulomb se rend compte de ce que sa décomposition de la masse de sol est arbitraire et qu'il doit rechercher celle qui conduit à l'équilibre le plus défavorable sous la contrainte de l'inégalité qui définit la résistance du sol, même s'il limite par la suite son analyse à l'exploration des décompositions définies par des droites  $Ba$  (Figure 6).

Les caractéristiques communes à ces deux analyses sont les principes de base de la théorie du Calcul à la rupture (*cf.* par exemple, Salençon, 1990) sous sa forme la plus simple ; les traitements spécifiques des problèmes ne sont que des exemples pratiques de deux méthodes générales pour mettre en œuvre cette théorie.

Les données d'un problème de Calcul à la rupture sont :

- La géométrie du système, sur laquelle toute analyse sera exécutée ;
- Le mode de chargement du système, qui dépend habituellement de quelques paramètres scalaires ;
- La résistance du matériau constitutif, qui est caractérisée, comme dans l'analyse de Coulomb, par un domaine de résistance prescrit pour l'état de contrainte en tout point du système. Ce domaine est convexe.

En écrivant que les équations d'équilibre doivent être satisfaites en tout point du système en y respectant la condition de résistance du matériau, on peut alors définir le domaine des chargements potentiellement supportables, ce qui signifie que le système ne peut supporter aucun chargement extérieur à ce domaine. La convexité est préservée dans le changement d'échelle du matériau au système : le domaine des chargements potentiellement supportables est convexe. Cette propriété facilite sa détermination par les deux méthodes d'approche par l'intérieur (statique) et par l'extérieur (statique ou cinématique) représentées sur la Figure 10.

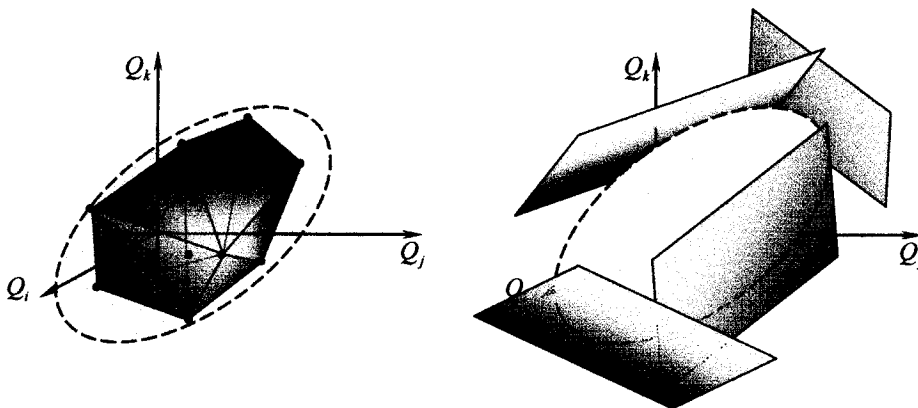


Figure 10. Approches par l'intérieur et par l'extérieur du domaine des chargements potentiellement supportables.

Le raisonnement de Galilée apparaît, dans ce cadre, comme une application de la méthode d'approche par l'extérieur cinématique où une rotation autour du point d'appui  $B$  est

implicitement utilisée comme mécanisme virtuel de ruine. Pour cette raison le résultat ainsi obtenu est valable comme borne supérieure du poids  $E$  quelle que soit la résistance en compression des fibres. L'analyse de Coulomb est, quant à elle, une application de la méthode d'approche par l'extérieur statique qui requiert un raisonnement logique soigneux et qui conduit à une estimation par excès de la stabilité du talus. Elle peut aussi être interprétée, à travers le principe des puissances virtuelles, comme une application de la méthode d'approche par l'extérieur cinématique où le mécanisme virtuel de ruine est un mouvement rigidifiant du volume  $BCa$ .

En raison de sa formulation mathématique générale la théorie du Calcul à la rupture couvre beaucoup de méthodes classiques d'analyse à la rupture qui ont été employées par les ingénieurs pour la conception des voûtes, des plaques, des coques, des murs de soutènement, les analyses de stabilité des pentes, etc. Elle est, en fait, à la base du *Calcul aux États Limites Ultimes* exprimé par l'équation symbolique :

$$R_d \geq S_d$$

qui doit être satisfaite à l'équilibre, où  $S_d$  représente l'effet des charges de calcul et  $R_d$  l'effet des résistances de calcul. En particulier :

- Comme Coulomb lui-même dans son *Mémoire*, la théorie fait une distinction claire entre les charges et les résistances : les charges sont prescrites tandis que les résistances sont des limites qui ne doivent pas être dépassées. Ceci aide à définir les valeurs de calcul de ces quantités correctement par les coefficients de sécurité partiels qui sont indiqués dans les codes.
- Elle s'appuie uniquement sur la condition que l'équilibre sous les charges prescrites doit être possible sans excéder les résistances des matériaux, ce qui est exactement la règle du *Calcul aux États Limites Ultimes*.
- Elle prend naturellement en compte les modes de chargement à plusieurs paramètres, comme cela est toujours le cas pour les structures dans la pratique. La propriété de convexité établie dans la théorie permet d'affirmer que seules des valeurs extrêmes des charges de calcul doivent être combinées en utilisant les coefficients de sécurité partiels correctement définis.
- Elle permet, à partir de la méthode d'approche par l'extérieur cinématique, de donner une signification physique quantitative aux effets qui apparaissent dans l'équation, quelle que soit la complexité de la structure étudiée. Selon la manière dont la méthode est mise en œuvre dans la pratique, elle conduit à l'introduction d'un facteur de sécurité global (de méthode).

### Références bibliographiques

- Bourbaki, N. (1974). *Topologie générale*. Chap. VII, §1, Ex. 16.
- Buckingham E. (1914). On physically similar systems: illustrations of the use of dimensional analysis. *Phys. Rev.* 4, 354-377.
- Cauchy, A. (1829). *Exercices de mathématiques*. Œuvres complètes d'Augustin Cauchy, 2<sup>ème</sup> édition, II<sup>ème</sup> série, tome IX, Gauthier-Villars, Paris, 1891.
- Coulomb, C-A. (1773). *Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*. Mémoire présenté à l'Académie royale des sciences, Paris.
- Dugas, R. (1950). *Histoire de la mécanique*. Éditions du Griffon; Jacques Gabay, Paris, 1996.
- Federman, A. (1911). On some methods for integration of partial differential equations of the 1st order (en russe). *Ann. Polytec. Inst. St Petersburg*, 16, IX & X, 124-131.

- Galilei, G. (1638). *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove scienze*. Elsevirii, Leyden. *Dialogues Concerning Two new Sciences*. Translation by Henry Crew & Alfonso de Salvio (1914) Dover publications Inc., New York (1954).
- Hayashida, T. (1949). Arc-wise connected subgroup of a vector group. *Kodai Mathematical Seminar Reports*, **1**, 16-17.
- Hellmich, C., ULM, F.- J. & Dormieux, L. (2004). Can the diverse elastic properties of trabecular and cortical bone be attributed to only a few tissue-independent phase properties and their interactions? *Biomechanics and Modelling in Mechanobiology*, **2**, 4, 219-238.
- Homma, T. & Minagawa, T. (1949). Vector Group in Real Euclidean Space. *Kodai Mathematical Seminar Reports*, **1**, 19-20.
- Saint-Guilhem, R. (1985). Sur les fondements de la similitude physique : le théorème de Federman. *J. Mec. Th. & Appl.*, **4**, 3, 337-356.
- Salençon, J. (2001). *Handbook of Continuum Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Salençon, J. (1990). An introduction to the Yield Design Theory and its applications to soil mechanics. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **9**, 477-500.
- Vaschy, A. (1892). *Annales télégraphiques*, 25-28, 189-211.