

Action d'une conduite circulaire sur un sol cohérent

Indentation of a cohesive soil by a circular pipe

J. Salençon – Professeur, Conseil général des ponts et chaussées, Laboratoire de mécanique des solides, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex

RÉSUMÉ : On s'intéresse à la détermination théorique de la capacité portante d'un sol homogène, isotrope, purement cohérent sur lequel repose une conduite circulaire. Les deux conditions extrêmes de contact à l'interface entre la conduite et le sol (interface lisse sans résistance à la traction et interface totalement adhérente) sont envisagées ce qui permet d'encadrer la solution du problème réel. On a appliqué les méthodes d'approche par l'intérieur statique et d'approche par l'extérieur cinématique de la théorie du calcul à la rupture pour une analyse paramétrique en fonction de la profondeur d'enfoncement de la conduite. Les évaluations par défaut et par excès ainsi obtenues montrent que l'effet de la gravité est purement additif, égal à la simple « poussée d'Archimède » exercée par le sol et améliorent, dans le cas de l'interface lisse, les résultats antérieurs de Murff, Wagner & Randolph.

ABSTRACT: The interaction between a rigid circular pipe with a purely cohesive isotropic soil layer underneath is studied from the point of view of the bearing capacity as a function of the embedment depth. The analysis is performed within the framework of the theory of Yield design, assuming either perfect bonding at the interface between the pipe and the soil layer or a perfectly smooth interface. Lower- and upper bound estimates have been determined for the bearing capacity through the construction of admissible stress fields or the consideration of potential collapse mechanisms. The obtained estimates show that the contribution of gravity forces reduces to the addition of Archimedes' uplift thrust due to the soil and improve previous results by Murff, Wagner & Randolph, in the case of a smooth interface condition.

1 INTRODUCTION

On s'intéresse à la détermination de la résistance au poinçonnement d'un massif de sol homogène, isotrope et purement cohérent soumis à l'action d'une conduite indéformable, qui repose sur la surface horizontale du massif. La conduite est infinie dans la direction z , sa section est circulaire de centre Ω et de rayon extérieur R . Elle est encastrée dans le sol à la profondeur $h \leq R$ sur la largeur $A'A = B$. On introduit l'angle χ défini sur la figure 1 en sorte que :

(1) $h = R(1 - \sin \chi)$

(2) $B = 2R \cos \chi$.

γ est le poids volumique du sol et l'action de la conduite sur le sol est représentée par une force F , linéique par unité de longueur selon Oz , dirigée selon la verticale Ox . Aucune surcharge n'est appliquée à la surface du sol de part et d'autre de la conduite. Le massif de sol est immobile à l'infini. Le sol purement cohérent a pour cohésion c et admet pour critère de résistance le critère de Tresca :

(3) $\text{Max} \{ \sigma_i(x) - \sigma_j(x) \mid i, j = 1, 2, 3 \} \leq 2c$.

Pour la condition de résistance à l'interface de contact entre la conduite et le massif de sol, on considérera les deux conditions extrêmes :

- adhérence totale, qui signifie qu'aucune limitation n'est imposée au vecteur contrainte $T(x)$ agissant sur l'interface ;
- contact lisse, qui impose que la contrainte de cisaillement sur l'interface soit nulle et la contrainte normale compressive :

(4) $T(x) = T(x)n(x)$

$T(x) \leq 0$

où $n(x)$ désigne la normale extérieure à l'interface. (Les contraintes sont comptées positivement en traction.)

Ces deux conditions seront repérées par un paramètre m prenant respectivement les valeurs 1 et 0.

La résistance au poinçonnement sera caractérisée par la valeur maximale F_w de la force F qu'il est possible d'équilibrer par un champ de contrainte σ respectant les conditions de résistance dans le massif et à l'interface. Le problème de calcul à la rupture ainsi posé est bidimensionnel dans le plan Oxy .

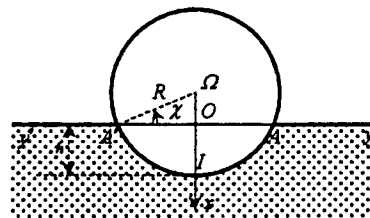


Figure 1. Description géométrique

Ce problème a fait l'objet d'une analyse approfondie par Murff, Wagner & Randolph (1989) dans le formalisme de l'analyse limite. Ces auteurs, utilisant notamment des résultats antérieurs de Randolph & Houlsby (1984), ont établi des bornes inférieures et supérieures pour la force de poinçonnement et dans certains cas ont pu en déterminer la valeur exacte. Le formalisme du calcul à la rupture adopté ici diffère peu de celui de ces auteurs mais il permet d'inclure les conditions de contact dans les conditions de résistance. L'objet de l'étude est d'améliorer les encadrements disponibles et d'établir la contribution des forces de gravité.

De sa définition, il résulte que F_w est une fonction des paramètres R, χ, γ, c et m , qui se met sous la forme adimensionnelle :

$$(5) F_{ut} = 2Rc f\left(\chi, \frac{\gamma R}{c}, m\right)$$

où f est une fonction scalaire des arguments indiqués.

2 CONTRIBUTION DES FORCES DE GRAVITÉ

2.1 Interface lisse ($m = 0$)

Soit σ^0 un champ de contrainte quelconque statiquement admissible pour le problème dans le cas du matériau non pesant ($\gamma = 0$) et respectant les conditions de résistance (3) et (4). On définit en tout point du massif de sol le champ de contrainte σ' par :

$$(6) \sigma'(x) = \sigma^0(x) - \gamma x I$$

où I désigne le tenseur isotrope. Le champ σ' est évidemment statiquement admissible pour le problème dans le cas du sol pesant. Il respecte comme σ^0 la condition de résistance de Tresca. À l'interface, le vecteur contrainte correspondant est :

$$(7) T(x) = \sigma'(x) \cdot n(x) = \sigma^0(x) \cdot n(x) - \gamma x n(x),$$

qui satisfait la condition (4) puisque celle-ci est satisfaite par σ^0 et que $x \geq 0$ sur $A'IA$. Il en résulte qu'en intégrant (7) sur $A'IA$ on obtient une borne inférieure de la force de poinçonnement pour le sol pesant, d'où l'inégalité :

$$(8) f(\chi, 0, 0) + \frac{\gamma R}{2c} \left(\frac{\pi}{2} - \chi - \sin \chi \cos \chi \right) \leq f\left(\chi, \frac{\gamma R}{c}, 0\right)$$

où le deuxième terme du premier membre n'est autre que la « poussée d'Archimède » exercée par le sol pesant purement cohérent. À ce stade, en raison de la condition (4), il n'est pas possible de mettre en œuvre la réciproque du raisonnement et d'établir l'égalité dans (8) qui demeure donc une approche conservative. Cette incertitude sera levée dans la conclusion.

2.2 Interface à adhérence totale ($m = 1$)

Le même raisonnement est applicable et conduit à l'inégalité homologue de (8). De plus, puisque aucune limitation n'est imposée au vecteur contrainte à l'interface la réciproque est valable et l'on établit que :

$$(9) f(\chi, 0, 1) + \frac{\gamma R}{2c} \left(\frac{\pi}{2} - \chi - \sin \chi \cos \chi \right) = f\left(\chi, \frac{\gamma R}{c}, 1\right).$$

Compte tenu des résultats (8) et (9), la suite de l'étude sera restreinte au cas du sol non pesant.

3 ÉVALUATIONS PAR DÉFAUT DE LA RÉSISTANCE AU POINÇONNEMENT

3.1 Interface lisse ($m = 0$)

La définition de F_{ut} montre que tout champ de contrainte statiquement admissible pour le problème et respectant les capacités de résistance du sol et de l'interface fournit, par intégration du vecteur contrainte correspondant sur $A'IA$, une évaluation par défaut de la résistance au poinçonnement du massif. Le champ de contrainte esquissé sur la figure 2 a été proposé pour la première fois par Murff, Wagner & Randolph (1989); il s'appuie sur la théorie des équilibres limites plans (Hill, 1950; Sokolovski, 1960). Le champ de contrainte, symétrique par rapport à Ox , est homogène dans ACD et semi-homogène dans $IBCAI$, constitué de l'éventail de Prandtl IBC et de la zone $IBAI$ où les caractéristiques α sont des développantes du cercle de centre Ω et de rayon $R\sqrt{2}/2$. Il est ici prolongé au-delà de $IBCD$ en appliquant la méthode de

Shield (1954) comme annoncé dans (Murff, Wagner & Randolph, 1989). Il conduit à l'évaluation par défaut de la résistance au poinçonnement (10) représentée sur la figure 8 en fonction du paramètre h/R :

$$(10) \int_0^{\frac{\pi}{2}-\chi} (2 + \pi - 2\xi) d\xi = 2((1 + \chi)\cos \chi + 1 - \sin \chi) \leq f(\chi, 0, 0)$$

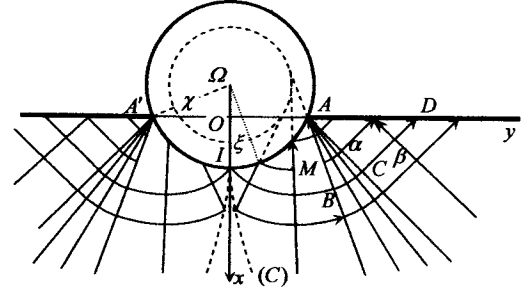


Figure 2. Champ de contrainte dans le cas de l'interface lisse

3.2 Interface à adhérence totale ($m = 1$)

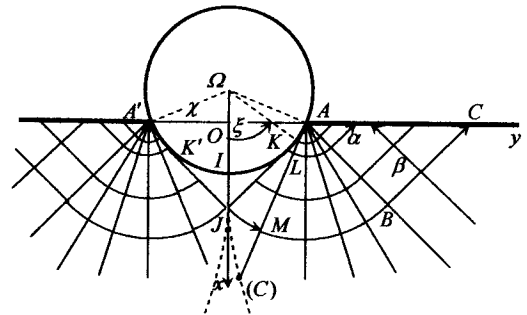


Figure 3. Champ de contrainte dans le cas de l'interface à adhérence totale pour $0,29 \leq h/R \leq 1$

Pour $0,29 \leq h/R \leq 1$, le champ de contrainte est construit et prolongé selon les mêmes méthodes (figure 3). Il fournit, pour la résistance au poinçonnement, l'évaluation par défaut :

$$(11) (\pi + 2) \frac{\sqrt{2}}{2} + \int_{\chi/4}^{\frac{\pi}{2}-\chi} \left((1 + \frac{3\pi}{2} - 2\xi) \cos \xi + \sin \xi \right) d\xi \leq f(\chi, 0, 1)$$

$$(12) 2\sqrt{2} - 3 \sin \chi + (1 + \pi/2 + 2\chi) \cos \chi \leq f(\chi, 0, 1)$$

représentée sur la figure 8 et valable pour $0,29 \leq h/R \leq 1$.

Pour $0 \leq h/R \leq 0,29$, le champ de contrainte n'est autre que le champ classique de Prandtl, prolongé, par exemple, par la méthode de Shield (figure 4). L'évaluation par défaut de la résistance au poinçonnement est immédiate, représentée sur la figure 8 :

$$(13) (\pi + 2) \cos \chi \leq f(\chi, 0, 1).$$

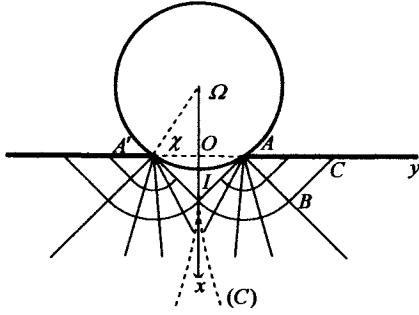


Figure 4. Champ de contrainte dans le cas de l'interface à adhérence totale pour $0 \leq h/R \leq 0,29$

4 ÉVALUATIONS PAR EXCÈS DE LA RÉSISTANCE AU POINÇONNEMENT

4.1 Principe

On applique l'approche par l'extérieur de la théorie du calcul à la rupture (Salençon, 1983, 1990). Soit \mathbf{v} un champ de vitesse virtuel respectant l'immobilité du massif à l'infini. On désigne par $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ le taux de déformation correspondant, en un point M et par $\llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket$ la discontinuité de vitesse éventuelle en un point M au franchissement d'une ligne de discontinuité de normale $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Les densités de puissance résistante maximale définies à partir des critères de résistance du sol et de l'interface s'écrivent:

- pour le sol
- (14) $\pi(\mathbf{d}(\mathbf{x})) = +\infty$ si $\text{tr } \mathbf{d}(\mathbf{x}) \neq 0$
 $\pi(\mathbf{d}(\mathbf{x})) = c(|d_1| + |d_2| + |d_3|)$ si $\text{tr } \mathbf{d}(\mathbf{x}) = 0$
avec d_1, d_2, d_3 valeurs principales de $\mathbf{d}(\mathbf{x})$, et
- (15) $\pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket) = +\infty$ si $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket \neq 0$
 $\pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket) = c \|\llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket\|$ si $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket = 0$;
- pour l'interface lisse,
- (16) $\pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket) = +\infty$ si $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket < 0$
 $\pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket) = 0$ si $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket \geq 0$
où $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ et $\llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket$ se rapportent à l'interface ;
- pour l'interface à adhérence totale,
- (17) $\pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket) = +\infty$ si $\llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket \neq 0$.

Dans un tel champ de vitesse virtuel, la puissance de la force de poinçonnement F est de la forme

$$(18) P_c(F, \mathbf{v}) = F U$$

et la puissance résistante maximale est

$$(19) P_m(\mathbf{v}) = \int \pi(\mathbf{d}(\mathbf{x})) + \int \pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket)$$

où la première intégrale est prise sur le massif de sol et la seconde concerne à la fois le sol et l'interface. L'évaluation par excès de la résistance au poinçonnement est alors donnée par l'inégalité fondamentale :

$$(20) P_c(F_{uh}, \mathbf{v}) = F_{uh} U \leq P_m(\mathbf{v}) .$$

4.2 Interface à adhérence totale

Pour $0 \leq h/R \leq 0,29$, le champ de vitesse considéré est évidemment le champ classiquement associé au champ de contrainte de Prandtl. Le résultat est immédiat qui montre que

(13) est la valeur exacte de la résistance au poinçonnement (figure 8).

Pour $0,29 \leq h/R \leq 1$, l'idée naturelle est de construire un champ de vitesse virtuel en utilisant les équations de Geiringer (1937) le long des lignes caractéristiques des contraintes du champ de la figure 3. Cette méthode a été utilisée par Murff, Wagner & Randolph (1989) et l'estimation par excès obtenue est représentée sur la figure 8. Ainsi que ces auteurs l'ont remarqué, la borne obtenue n'est pas égale à l'estimation par défaut. Du point de vue du calcul à la rupture, ceci provient du fait que ce champ de vitesse n'est pas associé au champ de contrainte par la règle mathématique de normalité. On peut même affirmer, en s'appuyant sur le théorème d'existence (Salençon, 1983), que l'inégalité (12) fournit une borne inférieure stricte au sens mathématique du terme. Dans le but d'affiner ce résultat, on a procédé à la construction de divers champs de vitesse virtuels permettant de mettre en œuvre l'inégalité (20).

Le mécanisme décrit sur la figure 5 s'inspire du champ de vitesse de Prandtl : il introduit un coin $A'JA$ sous la conduite, qui est animé du même mouvement de translation verticale de vitesse U que celle-ci. Les discontinuités de vitesse à travers JA et JBC sont respectivement $U \cos \chi$ et $U \sin \chi$. La zone AJB est en cisaillement et le volume ABC a un mouvement rigidifiant. Le calcul de la puissance résistante maximale conduit à l'estimation par excès :

$$(21) f(\chi, 0, 1) \leq \frac{1}{\tan \chi} \left(\left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\chi \right) \sin \chi + \cos \chi \right) .$$

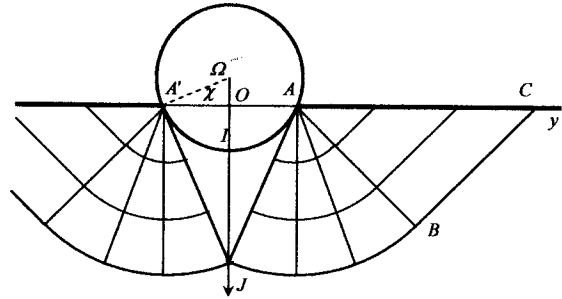


Figure 5. Champ de vitesse virtuel pour $0,29 \leq h/R \leq 1$

La majoration (21) est représentée sur la figure 8. Elle paraît apporter une très légère amélioration, pour $0,29 \leq h/R \leq 0,47$, par rapport au résultat déjà excellent de Murff, Wagner & Randolph.

Par ailleurs, on peut signaler le mécanisme de la figure 6 qui comporte deux volumes de sol $L'T'JKL'$ et $LTJK'L$ en rotation autour de S et S' respectivement, $LTJK$ et $L'T'JK'$ étant des arcs de cercle centrés en S et S' . Au-dessous de ces arcs de cercle le massif est immobile. Il n'y a pas de discontinuité de vitesse à l'interface entre la conduite et le sol. La conduite et les volumes de sol $LA'TL$, $L'AT'L$, $JT'TJ$ sont animés du même mouvement de translation verticale de vitesse $U = \omega d$. Le mécanisme étant décrit géométriquement au moyen des angles λ et u , $0 < \chi < u < \lambda < \pi/2$, on obtient l'estimation par excès :

$$(21) f(\chi, 0, 1) \leq \left(\frac{\pi}{2} - u \right) \frac{(\sin \lambda - \sin \delta)^2}{(\sin u - \sin \delta)(\sin \lambda - \sin u) \cos \lambda}$$

sur laquelle on a procédé à la minimisation numérique par rapport à λ et u . Le résultat correspondant est légèrement meilleur que celui de Murff, Wagner & Randolph pour $0,47 \leq h/R < 1$ et aboutit à la même valeur 5,93 pour $h/R = 1$.

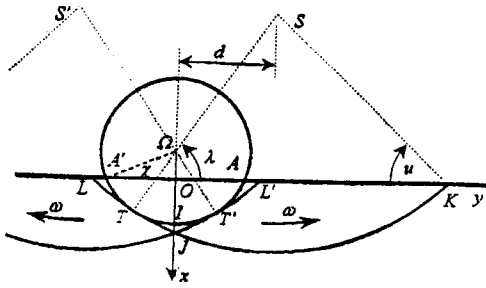


Figure 6. Champ de vitesse virtuel pour $0,47 \leq h/R \leq 1$

4.3 Interface lisse

Comme dans le cas précédent, Murff, Wagner & Randolph ont construit un champ de vitesse virtuel en intégrant les équations de Geiringer le long des caractéristiques des contraintes de la figure 2. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, la majoration obtenue n'est pas égale à l'estimation par défaut. En s'inspirant d'une étude de Randolph & Houlsby (1984) pour un problème apparenté, ils ont construit un champ de vitesse alternatif qui améliore l'encadrement pour $0,63 \leq h/R \leq 1$. Ces résultats sont présentés sur la figure 8.

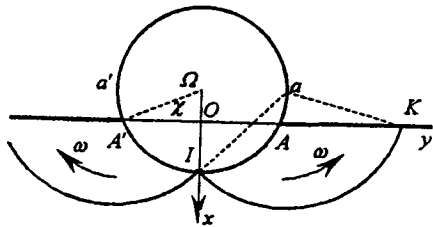


Figure 7. Interface lisse : champ de vitesse virtuel

On propose le mécanisme symétrique représenté sur la figure 7. La conduite a un mouvement de translation verticale à la vitesse U ; a et a' désignant les extrémités du diamètre horizontal de la conduite, IK et IK' sont deux arcs de cercles de centres a et a' respectivement. Les volumes de sol $AIKA$ et $A'IK'A'$ sont animés chacun d'un mouvement de rotation autour de a et a' respectivement, à la vitesse angulaire $\omega = U/R$. Le champ de taux de déformation d est nul en tout point. La discontinuité de vitesse au franchissement de IK est tangentielle, égale à $[[v(x)]] = U\sqrt{2}$. Sur l'interface IA , la discontinuité de vitesse entre la conduite et le sol est purement tangentielle (il n'y a pas de décollement) et constante: $[[v(x)]] = U$. Le calcul de l'estimation par excès ainsi obtenue pour la résistance au poinçonnement ne présente aucune difficulté :

$$(23) \quad f(\chi, 0, 0) \leq 2 \left(\frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \chi\right) \right).$$

Ce résultat est reporté sur la figure 8 où l'on constate qu'il améliore significativement la borne supérieure antérieure pour $0,43 < h/R \leq 1$: à titre d'exemple, pour $h/R=1$, la borne supérieure est ramenée de 4,99 à 4,71.

5 COMMENTAIRES ET CONCLUSION

L'analyse présentée ici apporte une amélioration sensible de l'estimation de la résistance au poinçonnement dans le cas de contact sans frottement entre la conduite et le massif de sol, complétant l'étude de Murff, Wagner & Randolph.

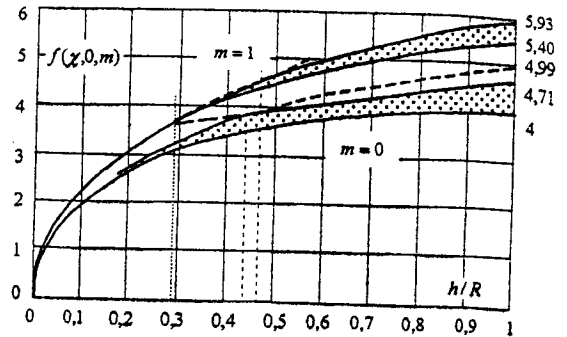


Figure 8. Encadrements de la résistance au poinçonnement du massif de sol non pesant

On rappelle que ces résultats se rapportent au cas du sol non pesant. Il est maintenant possible de revenir sur l'effet des forces de pesanteur.

Ceci ne présente aucune difficulté dans le cas de l'interface à adhérence totale. En effet, on a démontré au paragraphe 2.2, à travers l'équation (9), qu'il suffit d'ajouter à la résistance du sol non pesant un terme de pesanteur, strictement égal au poids du volume de sol déplacé par la conduite.

En revanche, dans le cas de l'interface lisse, on n'a pu obtenir que l'inégalité (7), qui va dans le sens de la sécurité: il s'ensuit que l'addition de ce même terme de pesanteur à la borne inférieure pour le sol non pesant fournit encore une borne inférieure pour le sol pesant. En ce qui concerne les bornes supérieures, il convient de reprendre les calculs de puissance des efforts extérieurs et de la puissance résistante maximale dans chacun des champs de vitesse virtuels utilisés. Puisque dans aucun de ceux-ci il n'y a de séparation entre la conduite et le massif de sol et que les champs de vitesse virtuels sont sans variation de volume, l'application du théorème de la divergence fournit la puissance des efforts extérieurs sous la forme :

$$(24) \quad P_e(F, \gamma, v) = FU - \gamma R^2 (\pi/2 - \chi - \sin \chi \cos \chi) U,$$

tandis que la puissance résistante maximale n'est évidemment pas modifiée. En conséquence les bornes supérieures pour le sol pesant sont, elles aussi, obtenues par addition du terme de pesanteur égal à la « poussée d'Archimède » exercée par le sol. On retiendra donc dans tous les cas :

$$(25) \quad F_u = 2Rc f(\chi, 0, m) + \gamma R^2 (\pi/2 - \chi - \sin \chi \cos \chi).$$

RÉFÉRENCES

- Geiringer, H. 1937. Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes. *Mem. Sc. Math.*, 86, Gauthier-Villars, Paris.
- Hill, R. 1950. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press, Oxford (GB).
- Murff, J. D., Wagner, D. A. & Randolph, M. F. 1989. Pipe penetration in cohesive soil. *Géotechnique*, 39, 2, 213-229.
- Randolph, M. F. & Houlsby, G. T. 1984. The limiting pressure on a circular pile loaded laterally in cohesive soil. *Géotechnique*, 34, 4, 613-623.
- Salençon, J. 1983. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'ENPC, Paris.
- Salençon, J. 1990. An Introduction to the Yield design Theory and its Applications to Soil Mechanics. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 9, 5, 477-500.
- Shield, R. T. 1954. Plastic potential theory and Prandtl bearing capacity solution. *J. Appl. Mech.*, 21, 193-194.
- Sokolovski, V. V. 1960. *Statics of Soil Media*. Butterworths scient. Publ., London.