

Modélisation micropolaire de la résistance d'un milieu renforcé par inclusions

Patrick de BUHAN, Luc DORMIEUX, Jean SALENÇON

Laboratoire de mécanique des solides, Ura 317, ENPC-CERCSO, 6 et 8 avenue Blaise-Pascal, cité Descartes, Champs-sur-Marne, 77455 Marne-la-Vallée cedex 2, France

(Reçu le 6 octobre 1997, accepté le 22 octobre 1997)

Résumé. Partant d'une modélisation mixte d'un matériau renforcé par une distribution uniforme d'inclusions traitées comme des poutres, on aboutit par homogénéisation à l'aide des puissances virtuelles, à un milieu homogénéisé de type micropolaire. Ce modèle est mis en œuvre dans le cadre de la théorie du calcul à la rupture, les capacités de résistance du milieu micropolaire étant déduites de la donnée des critères de résistance de chaque constituant. L'approche cinématique par l'extérieur est alors appliquée sur l'exemple de l'analyse de stabilité d'un talus vertical. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

calcul à la rupture / homogénéisation / micropolaire / renforcement

Yield strength of inclusion-reinforced materials as micropolar continua

Abstract. Starting from a mixed modelling of a matrix material reinforced by regularly embedded inclusions regarded as straight beams, and through a homogenization procedure making use of the virtual work method, a micropolar description is obtained for the homogenized composite medium. The model is implemented within the context of the yield design theory, the strength properties of the reinforced matrix material being simply deduced from those of its individual components. The upper bound kinematic method is then applied to the stability analysis of a reinforced vertical excavation. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

yield design / homogenization / micropolar / reinforcement

Abridged English Version

Let V be any volume made of a homogeneous material reinforced by a discrete number of inclusions denoted by L_k ($k = 1$ to K), which are regarded as straight beams oriented along a unit vector \underline{t} . According to a mixed modelling description of such a composite continuum, equation (1) gives the

Note présentée par Jean SALENÇON.

general expression of the work developed by the stress distribution $\underline{\underline{\sigma}}$ in the virtual velocity field $\underline{\underline{U}}$ defined throughout the matrix on the one hand, the generalized resultant force (\underline{R}) and moment (\underline{I}) distributions in the corresponding virtual translation and rotation velocity fields ($\underline{U}(s_k), \underline{\Omega}(s_k)$) defined along the inclusions on the other hand. Under the assumption of a uniform and sufficiently dense network of inclusions, the second term of the right hand member of equation (1) can be replaced by a volume integral such as equation (2), where \underline{r} and $\underline{\gamma}$ denote the corresponding densities of resultant force and moment per unit area transverse to the reinforcement direction, leading to equation (4), where the generalized stresses ($\underline{\underline{\Sigma}}, \underline{\underline{H}}$) are given by equation (5). The latter formulas, along with the corresponding equilibrium equations (7), clearly show that the homogenized reinforced material is amenable to a micropolar or Cosserat continuum description. The non-symmetry of stresses $\underline{\underline{\Sigma}}$ is due to the shear force density \underline{v} developed along the reinforcing inclusions, while the very existence of couple-stresses $\underline{\underline{H}}$ results from the moment density $\underline{\gamma}$. *Figure 2* provides a sketch of such internal stresses acting upon a representative volume element of composite reinforced matrix, in the case of a 2D problem (equations (8)). The associated equilibrium equations are given by equation (9).

The model so obtained is implemented within the context of the yield design theory, taking into account the strength properties of both the matrix material ('plane strain' strength condition), and the reinforcements for which an interaction formula such as equation (13) can be adopted in the case when the shear resistance of the inclusions may be considered as infinite. Making use of the upper bound kinematic approach of yield design, it appears that the relevant virtual velocity fields to be considered in the analysis, should comply with equation (14), the classical Navier-Bernoulli condition, so that the contribution due to the work of the shear component in such a field vanishes to zero.

The method is illustrated on the analysis of the stability of a vertical excavation of depth H , subject to its own specific weight ρg . The purely cohesive soil is reinforced by a periodic array of thin metallic tubes of diameter d and thickness δ , distributed throughout the soil mass according to a square pattern of period a (*figure 1a*), so that the axial and flexural strength characteristics of the inclusions to be introduced in equation (13) are given by equation (18), where σ_0 represents the uniaxial tensile resistance of the inclusion constituent material.

The stability of such a reinforced structure is examined through the kinematic approach, using the class of failure mechanisms sketched in *figure 1b*, which involves a shear zone with thickness h as a parameter. The corresponding calculations lead to the determination of an optimal upper bound estimate for the ultimate value of the stability factor defined as $\rho g H / C$. The results are summarized in *figure 3*. The curve of *figure 3a* in particular displays the variations of the upper bound estimate as a function of the ratio $\eta = d/H$ which provides a direct comparison between the inclusion diameter and the overall size of the structure. The limit case when η tends to zero corresponds to the particular situation where the contribution to the stability factor due to the bending resistance of the inclusions becomes negligible in comparison with the contribution derived from their axial resistance.

L'homogénéisation d'un milieu continu, renforcé périodiquement de fibres d'une rigidité très supérieure à celle de la matrice, a été abordée par plusieurs auteurs dans le cadre du comportement élastique des constituants. Caillerie [1] a par exemple montré qu'en faisant tendre vers l'infini les modules d'élasticité du matériau constituant les fibres, tandis que le diamètre de celles-ci tendait vers zéro plus rapidement que le petit paramètre d'homogénéisation, on obtenait un comportement macro-

scopique élastique. Tout récemment, Pideri et Seppecher [2], effectuant un choix particulier concernant les passages à la limite des paramètres précédents, aboutissent à un milieu élastique de second gradient. Dans cette note, sans se restreindre au seul cas particulier du comportement élastique, on aborde le problème à partir d'une modélisation mixte 1D/3D du milieu renforcé par inclusions.

1. Modélisation mixte d'un milieu renforcé par inclusions

On considère un volume V constitué d'une *matrice* modélisée comme un milieu continu classique, renforcée par des inclusions L_k ($k = 1-K$) schématisées comme des *poutres droites* (milieux curvilignes) de même vecteur unitaire orienté \underline{t} . Les mouvements virtuels d'un tel milieu sont définis d'une part par un champ vectoriel $\underline{\hat{U}}$ sur V , et, d'autre part, deux champs vectoriels $\underline{\hat{U}}$ et $\underline{\hat{\Omega}}$ sur les inclusions L_k , qui décrivent respectivement les cinématiques de translation et de rotation de la microstructure du milieu curviligne. On suppose que ces champs sont continûment différentiables, et qu'en outre, le champ $\underline{\hat{U}}$ sur L_k est défini par continuité à partir du champ $\underline{\hat{U}}$ sur V (cette dernière condition pourra être ultérieurement levée). La puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit dans le cadre d'une telle *modélisation mixte* du milieu renforcé par inclusions [3], en désignant par $\underline{R}(s_k)$ et $\underline{\Gamma}(s_k)$ les éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs au point courant s_k de L_k :

$$P_{(i)}(\underline{\hat{U}}, \underline{\hat{\Omega}}) = - \int_V \{ \underline{\sigma} : \underline{\text{grad}} \underline{\hat{U}} \} dV - \sum_{k=1}^K \int_{L_k} \{ \underline{R} \cdot (d\underline{\hat{U}}/ds_k + \underline{t} \wedge \underline{\hat{\Omega}}) + \underline{\Gamma} \cdot (d\underline{\hat{\Omega}}/ds_k) \} ds_k \quad (1)$$

On suppose désormais que les inclusions sont distribuées uniformément dans la matrice, par exemple selon un maillage périodique carré de côté a (voir sur la *figure 1a* l'exemple d'une excavation), dimension supposée très petite devant la taille caractéristique du volume V . On désigne par

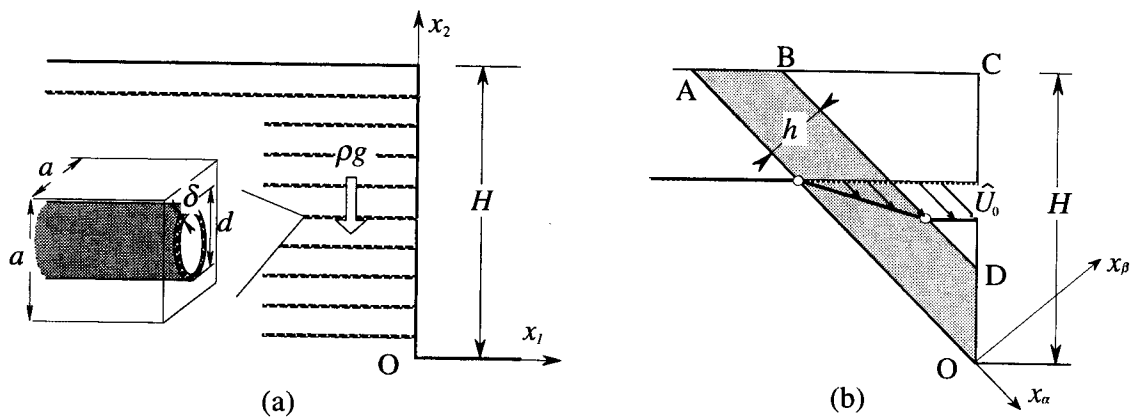


Figure 1. (a) Excavation renforcée par des inclusions horizontales disposées périodiquement. (b) Champ de vitesse virtuel considéré dans l'analyse de stabilité de l'ouvrage.

Figure 1. (a) Vertical cut reinforced by regularly distributed horizontal inclusions. (b) Virtual kinematics considered in the stability analysis of the structure.

P. de Buhan et al.

$\underline{r} = R/a^2$ et $\underline{\gamma} = \Gamma/a^2$ les densités d'efforts résultants et de moments par unité de surface transversale aux inclusions. Le second terme associé à la puissance des efforts intérieurs aux inclusions peut alors s'écrire sous la forme d'une intégrale de volume :

$$P_{(i)}^{inc}(\underline{\hat{U}}, \underline{\hat{\Omega}}) = - \int_V \{ \underline{r} \cdot (d\underline{\hat{U}}/ds + \underline{t} \wedge \underline{\hat{\Omega}}) + \underline{\gamma} \cdot (d\underline{\hat{\Omega}}/ds) \} dV \quad (2)$$

Avec $\underline{\hat{\Omega}}$, tenseur antisymétrique associé à $\underline{\hat{\Omega}}$, on a :

$$d\underline{\hat{U}}/ds = \underline{\text{grad}} \underline{\hat{U}} \cdot \underline{t}, \quad d\underline{\hat{\Omega}}/ds = \underline{\text{grad}} \underline{\hat{\Omega}} \cdot \underline{t}, \quad \underline{t} \wedge \underline{\hat{\Omega}} = -\underline{\hat{\Omega}} \cdot \underline{t} \quad (3)$$

d'où, en regroupant les termes relatifs à la matrice et aux inclusions, et en décomposant la densité d'efforts résultants \underline{r} en la partie relative à l'effort normal $n\underline{t}$ et en une autre relative à l'effort tranchant \underline{v} :

$$P_{(i)}(\underline{\hat{U}}, \underline{\hat{\Omega}}) = - \int_V \{ {}^T \underline{\Sigma} : (\underline{\text{grad}} \underline{\hat{U}} - \underline{\hat{\Omega}}) + {}^T \underline{H} : \underline{\text{grad}} \underline{\hat{\Omega}} \} dV \quad (4)$$

$$\underline{\Sigma} = \underline{\sigma} + n\underline{t} \otimes \underline{t} + \underline{v} \otimes \underline{t} \quad \text{et} \quad \underline{H} = \underline{\gamma} \otimes \underline{t} \quad (5)$$

2. Un modèle de milieu micropolaire

L'expression (4) de la puissance des efforts intérieurs s'identifie alors à celle obtenue dans le cas d'un *milieu micropolaire ou milieu de Cosserat* [4] (voir par exemple [5], pour une présentation par les puissances virtuelles). Les équations d'équilibre qui découlent de l'écriture du principe des puissances virtuelles sont, en l'absence de couples de masse :

$$\text{div} \underline{\Sigma} + \rho \underline{F} = 0, \quad \text{div} \underline{H} + 2 \underline{C} = 0 \quad (6)$$

où \underline{F} désigne la densité volumique d'efforts extérieurs, et \underline{C} représente le vecteur associé à la partie antisymétrique du tenseur $\underline{\Sigma}$. Compte tenu de (5), il vient alors :

$$\text{div} \underline{\Sigma} + \rho \underline{F} = \text{div} \underline{\sigma} + \underline{\text{grad}} (n\underline{t} + \underline{v}) \cdot \underline{t} + \rho \underline{F} = 0 \quad (7a)$$

$$\text{div} \underline{H} + 2 \underline{C} = \underline{\text{grad}} \underline{\gamma} \cdot \underline{t} + \underline{t} \wedge \underline{v} = 0 \quad (7b)$$

On remarque sur les relations (5) que la non-symétrie du tenseur des contraintes $\underline{\Sigma}$ est induite par la densité d'effort tranchant \underline{v} , tandis que l'existence du tenseur des couples-contraintes \underline{H} est associée à la densité de moments $\underline{\gamma}$. L'équation d'équilibre (7b) est l'homologue de l'équation d'équilibre usuelle en moment des poutres droites.

3. L'approche calcul à la rupture en déformation plane

On se restreint désormais (*figure 2*) au cas particulier du problème plan défini suivant les axes, Ox_1x_2 avec $\underline{e}_1 = \underline{i}$, $\underline{\nu} = \nu \underline{e}_2$, et $\underline{\chi} = \mu \underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2$, où μ représente la densité de moment de flexion induite par la présence des inclusions. On obtient alors à partir de (5) et (6) :

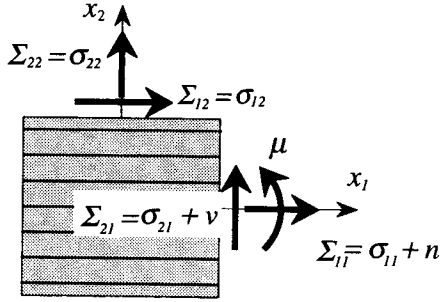


Figure 2. Système d'efforts intérieurs relatifs à un milieu renforcé par inclusions (cas plan).

Figure 2. Internal stress distribution relating to an inclusion-reinforced medium (plane case).

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\sigma}} + n \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \nu \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1, \quad \underline{\underline{H}} = \mu \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial n}{\partial x_1} + \rho F_1 = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \nu}{\partial x_1} + \rho F_2 = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x_1} + \nu = 0 \quad (9)$$

La formulation des problèmes de calcul à la rupture pour ce type de milieu requiert la donnée des critères de résistance de la matrice (critère en « déformation plane ») $f^m(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{21}) \leq 0$, et des inclusions de renforcement pour lesquelles on peut adopter un critère de la forme $f^r(n, \nu, \mu) = (n/n_0)^2 + (\nu/\nu_0)^2 + |\mu/\mu_0| - 1 \leq 0$ proposé par Anthoine [6], de Buhan et Salençon [3]. La fonctionnelle puissance résistante maximale s'écrit alors :

$$P_m(\underline{\hat{U}}, \underline{\hat{\Omega}}) = \int_V \pi^m(\underline{\hat{d}}) dV + \int_V \pi^r(\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\hat{U}}, \underline{\hat{\Omega}}, \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{\hat{\Omega}}) dV \quad (10)$$

$$\pi^m(\underline{\hat{d}}) = \sup_{\underline{\underline{\sigma}}} \{ \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\hat{d}}; f^m(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \} \quad (11)$$

$$\pi^r\left(\hat{d}_{11}, \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial x_1} - \hat{\Omega}, \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_1}\right) = \sup_{(n, \nu, \mu)} \left\{ n \hat{d}_{11} + \nu \left(\frac{\partial \hat{U}_2}{\partial x_1} - \hat{\Omega} \right) + \mu \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial x_1}; f^r(n, \nu, \mu) \leq 0 \right\} \quad (12)$$

4. Mise en œuvre de la méthode cinématique

On se place désormais dans la situation où $|\nu/\nu_0| \ll 1$, de sorte que le critère de résistance des inclusions se réduit à :

$$f^r(n, \nu, \mu) = (n/n_0)^2 + |\mu/\mu_0| - 1 \leq 0 \quad (13)$$

La définition (12) montre alors immédiatement que les mouvements virtuels pertinents, pour lesquels la valeur de $\pi^r(\cdot)$ demeure finie, sont ceux pour lesquels la condition de Navier–Bernoulli est satisfaite, comme pour le calcul des poutres en flexion [7] :

$$\frac{\partial \hat{U}_2}{\partial x_1} - \hat{Q} = 0 \quad (14)$$

Pour ces mouvements virtuels, tous calculs faits, avec $\hat{\varepsilon} = \hat{d}_{11} = \partial \hat{U}_1 / \partial x_1$ et $\hat{\chi} = \partial^2 \hat{U}_2 / \partial x_1^2$:

$$\pi^r(\hat{\varepsilon}, \hat{\chi}) = \begin{cases} n_0 |\hat{\varepsilon}| & \text{si } |n_0 \hat{\varepsilon} / 2 \mu_0 \hat{\chi}| \geq 1 \\ ((n_0 \hat{\varepsilon})^2 + 4(\mu_0 \hat{\chi})^2) / 4 \mu_0 \hat{\chi} & \text{sinon} \end{cases} \quad (15)$$

La prise en compte de discontinuités des champs \hat{U} et \hat{Q} au travers de lignes dans le plan $Ox_1 x_2$ introduit dans l'expression (10) de la puissance résistante maximale le terme (16), où $[\hat{U}]$ et $[\hat{Q}]$ désignent les valeurs des discontinuités à travers la ligne D , orientée transversalement par \underline{n} :

$$P_{rm}^{disc}(\hat{U}, \hat{Q}) = \int_D \pi^m(\underline{n}; [\hat{U}]) dD + \int_D \pi^r([\hat{U}], [\hat{Q}]) dD \quad (16)$$

$$\pi^r([\hat{U}], [\hat{Q}]) = \sup_{(n, \nu, \mu)} \{n[\hat{U}_1] + \nu[\hat{U}_2] + \mu[\hat{Q}]; f^r(n, \nu, \mu) \leq 0\} \quad (17)$$

Avec le critère (13), la condition de pertinence (14) est complétée par la continuité de \hat{U}_2 en tout point de V . Les expressions de la fonction d'appui π^r s'obtiennent à partir de l'équation (15), en remplaçant $\hat{\varepsilon}$ et $\hat{\chi}$ par $[\hat{U}_1]$ et $[\hat{Q}] = [\partial \hat{U}_2 / \partial x_1]$ respectivement.

5. Un exemple illustratif

On analyse, par l'approche cinématique du calcul à la rupture, la stabilité sous poids propre d'une excavation verticale creusée dans un sol homogène purement cohérent renforcé, sur toute la hauteur H de l'ouvrage, par des inclusions horizontales constituées de tubes métalliques circulaires minces de diamètre d et d'épaisseur δ , répartis selon un maillage carré de côté $a \ll H$ (figure 1a). En désignant par σ_0 la résistance en traction simple du matériau constitutif des inclusions, les paramètres n_0 et μ_0 à introduire dans (13) valent respectivement :

$$n_0 = \pi d \delta \sigma_0 / a^2 \quad \text{et} \quad \mu_0 = \delta d^2 \sigma_0 / a^2 = n_0 d / \pi \quad (18)$$

Avec les notations de la figure 1b, la classe de champs de vitesse virtuels utilisée est définie par : $\hat{U} = \hat{U}_0 \underline{e}_\alpha$, $\hat{U}_0 > 0$, dans BCD , $\hat{U} = 0$ au-delà de AO , et

$$\hat{U} = \hat{U}_0 \frac{x_\beta}{h} \underline{e}_\alpha \quad \text{dans} \quad ABDO \text{ d'épaisseur } h \quad (19)$$

En application de (14), on voit que $\hat{\Omega} = -\hat{U}_0/2h$ dans $ABDO$ et $\hat{\Omega} = 0$ ailleurs. Le champ \hat{U} est donc continu, en revanche, le champ $\hat{\Omega}$ est discontinu au franchissement de AO et BD :

$$[\hat{\Omega}] = -\hat{U}_0/2h \text{ sur } AO, \quad [\hat{\Omega}] = +\hat{U}_0/2h \text{ sur } BD \quad (20)$$

Il vient alors en définitive, tous calculs faits,

$$P_{rm}(\hat{U}) = CH\hat{U}_0 p_{rm}(n_0/C, \eta; \lambda) \quad (21)$$

$$P_e(\hat{U}) = \rho g H^2 \hat{U}_0 p_e(\lambda) \quad (22)$$

où p_{rm} et p_e sont des fonctions sans dimension des paramètres adimensionnels n_0/C , $\eta = d/H$ et $\lambda = h/H$. On obtient ainsi, pour la valeur extrême du facteur de stabilité de l'ouvrage, la majoration (23) à minimiser par rapport au paramètre λ dont dépend la famille de mécanismes considérée :

$$(\rho g H/C)^+ \leq p_{rm}(n_0/C, \eta; \lambda)/p_e(\lambda) \quad (23)$$

Les résultats, pour le cas particulier $n_0/C = 0,5$, sont donnés sur la figure 3 en fonction du paramètre $\eta = d/H$ à partir de la valeur $\eta = 0$ qui correspond à la situation où, dans le calcul de la puissance résistante maximale, le terme dû à la résistance en flexion des inclusions devient négligeable devant celui relatif à la résistance à l'effort normal (on retrouve évidemment alors le modèle anisotrope obtenu par homogénéisation périodique d'un composite renforcé par fibres minces de Buhan et Taliercio [8]).

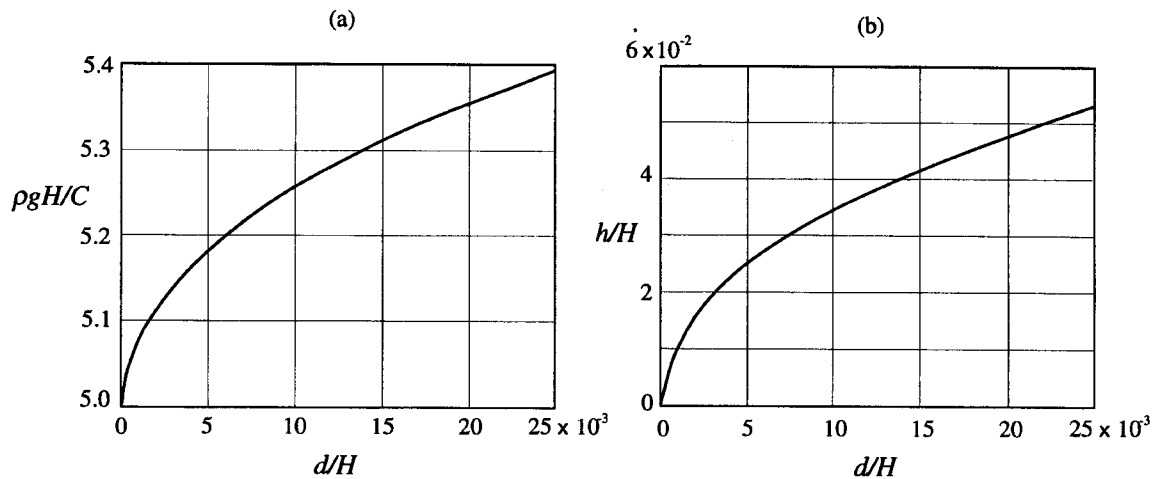


Figure 3. (a) Évolution du majorant du facteur de stabilité de l'excavation en fonction du facteur d'échelle.
(b) Épaisseur relative de la bande de cisaillement associée au mécanisme optimal.

Figure 3. (a) Upper bound estimates for the stability of the excavation as a function of the scale factor.
(b) Non-dimensional shear band thickness associated with the optimal mechanism.

La majoration obtenue pour $(\rho g H/C)^+$ est une fonction croissante du facteur η , ce qui met en évidence l'effet bénéfique de ce facteur d'échelle du point de vue de la stabilité de l'excavation. Un

P. de Buhan et al.

tel constat est d'ailleurs confirmé par l'analyse de la courbe de la *figure 3b*, qui donne l'évolution de l'épaisseur relative optimale $\lambda = h/H$ de la bande de cisaillement. On observe une décroissance de λ en fonction de la diminution relative du diamètre des inclusions, la bande de cisaillement dégénérant en ligne de discontinuité de vitesse, dans le cas d'inclusions parfaitement souples. Ce résultat est sans doute à rapprocher des analyses relatives au problème de la localisation des déformations plastiques dans les matériaux à microstructure [9].

Références bibliographiques

- [1] Caillerie D., Homogénéisation d'un corps élastique renforcé par des fibres minces de grande rigidité et réparties périodiquement, C. R. Acad. Sci. 292, série IIb (1981) 303–308.
- [2] Pideri C., Seppelcher P., Un résultat d'homogénéisation pour un matériau élastique renforcé périodiquement par des fibres élastiques de très grande rigidité, C. R. Acad. Sci. 324, série IIb (1997) 475–481.
- [3] de Buhan P., Salençon J., A comprehensive stability analysis of soil nailed structures, Eur. J. Mech., A/Solids, 12 (3) (1993) 325–345.
- [4] Cosserat E., Cosserat F., Théorie des corps déformables, Hermann, Paris, 1909.
- [5] Salençon J., Mécanique du continu, tome I : concepts généraux, Ellipses, AUPELF/UREF, Paris, 1996.
- [6] Antoine A., Stabilité d'une fouille renforcée par clouage, Proc. 4th French–Polish Coll. appl. Soil Mech., Grenoble, France, 1987.
- [7] Salençon J., Calcul à la rupture : poutres, plaques et dalles minces, Cours de calcul des structures anélastiques de l'ENPC, 1990.
- [8] de Buhan P., Taliencio A., A homogenization approach to the yield strength of composite materials, Eur. J. Mech., A/Solids 10(2) (1991) 129–154.
- [9] de Borst R., Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum, Eng. Comp. 8 (1991) 317–332.