

125

Collection **Recherches en Mathématiques Appliquées**
sous la direction de P.G. CIARLET et J.-L. LIONS
Membres de l'Institut

RMA **28**

***LES GRANDS SYSTÈMES
DES SCIENCES
ET DE LA TECHNOLOGIE***

Ouvrage en hommage à Robert Dautray

Coordonné par :

J. HOROWITZ et J.-L. LIONS

MASSON Paris Milan Barcelone 1994

Approche théorique du calcul aux états limites ultimes

Jean SALENÇON

*École polytechnique
Département de mécanique
91128 Palaiseau Cedex*

1.- Le concept

1.1- Principes de base du calcul aux états limites ultimes

Le calcul aux états limites ultimes (E.L.U.) tend actuellement, dans le domaine du génie civil et de la construction, à servir de référence aux analyses de sécurité, comme cela apparaît notamment dans les travaux d'élaboration de futurs règlements européens. Citant par exemple Krebs Ovesen (1989) on peut en définir les principes comme suit.

" Ultimate limit states involve safety : loss of static equilibrium or rupture of a critical section of the structures "...

" According to the principles of Limit States Design, the design criterion is simply to design for equilibrium in the design limit state of failure. The design criterion could be expressed in the following way :

$$S_d \leq R_d \quad (1.1)$$

S_d is the design load effect, ..., R_d the design resistance effect... "

Cet énoncé met en évidence en premier lieu que l'analyse mécanique de la structure doit clairement distinguer les *charges* appliquées à la structure et les *résistances* de ses éléments constitutifs. En deuxième lieu, on doit définir les *valeurs de calcul* de ces grandeurs. Enfin on doit préciser le concept d'*effet*..

1.2.- Les charges et leurs valeurs de calcul

Le concept de charges correspond aux *actions* — forces (concentrées, surfaciques, massiques), moments — connues en tant que sollicitations exercées sur la structure. Les valeurs de calcul de ces charges sont obtenues en affectant chacune d'elles d'un coefficient de sécurité partiel, multiplicateur, qui peut dépendre des combinaisons de charges considérées et qui est

- supérieur à l'unité lorsque l'*effet* de la charge est *défavorable* à l'équilibre
- inférieur à l'unité lorsque cet *effet* est *favorable*.

Ce dernier point met en évidence la nécessité, dès ce stade, d'une définition précise et mécaniquement rigoureuse de la notion d'*effet* évoquée au paragraphe précédent.

1.3.- Les résistances et leurs valeurs de calcul

Les résistances sont des caractéristiques mécaniques attribuées aux matériaux constitutifs de la structure étudiée. Dédites d'expériences d'identification ce sont des limitations qui s'imposent aux efforts intérieurs en chaque point de la structure. Dans le cas où la modélisation des efforts intérieurs est unidimensionnelle, la résistance de l'élément matériel s'exprime par des valeurs scalaires qui y limitent supérieurement et inférieurement l'intensité de l'effort intérieur : par exemple, résistance en traction et résistance en compression d'une barre soumise uniquement à un effort normal. Plus généralement, lorsque la modélisation est multidimensionnelle, la résistance de l'élément matériel est exprimée par un *critère* (c'est le cas des milieux continus classiques) ou par une *formule d'interaction* (c'est le cas des milieux curvilignes), qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres de résistance caractéristiques de l'élément. Les valeurs de calcul de ces paramètres, à introduire dans le critère de résistance, s'obtiennent en appliquant à chacun d'eux un coefficient de sécurité partiel, *diviseur*, supérieur à l'unité.

1.4.- Les effets des charges et des résistances

1.4.1.- Problématique

La définition du concept " d'effet sur l'équilibre du système " est évidemment essentielle pour la mise en oeuvre pratique des principes énoncés au paragraphe 1.1. L'équation (1.1) a un caractère symbolique qui doit être explicité et quantifié, ce qui suppose que l'effet des charges et l'effet des résistances puissent être mesurés par des grandeurs scalaires comparables c'est-à-dire correspondant à la même réalité physique.

1.4.2.- Cas d'une structure articulée isostatique

On peut d'abord examiner un exemple où aucune difficulté n'apparaît à ce propos : celui d'une structure articulée, chargée et appuyée en ses seuls noeuds d'assemblages, isostatique (figure 1).

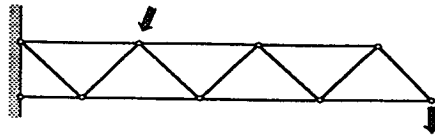


Figure 1 - Structure articulée isostatique.

La distribution des efforts intérieurs dans cette structure, en équilibre avec une combinaison de charges de calcul donnée, que l'on désignera par S_d , est déterminée de manière unique : c'est un champ d'efforts de traction ou de compression dans les barres, c'est-à-dire un champ scalaire.

Il est alors naturel d'interpréter l'équation (1.1) en comparant :

— pour les barres tendues, le champ des efforts de traction engendrés par ces charges de calcul, au champ des valeurs de calcul des résistances en traction (R_d^T) ;

— pour les barres comprimées, le champ des efforts de compression engendrés par ces charges de calcul, au champ des valeurs de calcul des résistances en compression (R_d^C).

En décomposant dans chaque barre (i) l'effort normal N_i en ses parties positive et négative

$$N_i = N_i^+ - N_i^- \quad (N_i^+ \geq 0, N_i^- \geq 0, N_i^+ N_i^- = 0) \quad (1.2)$$

on écrira ainsi pour exprimer (1.1) :

$$\forall i, \quad -(R_d^C)_i \leq N_i(S_d) \leq (R_d^T)_i \quad -$$

ou encore

$$\left. \begin{aligned} \text{Sup}_i \{ N_i^+(S_d) - (R_d^T)_i \} &\leq 0 \\ \text{Sup}_i \{ N_i^-(S_d) - (R_d^C)_i \} &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

1.4.3.- Structure isostatique avec efforts intérieurs multidimensionnels

Dans le même esprit on peut considérer le cas d'une structure isostatique pour laquelle le champ des efforts intérieurs est représenté par plusieurs champs scalaires

(effort normal N , moment fléchissant M, \dots). La résistance est définie en chaque point par une formule d'interaction du type :

$$f(R ; N, M, \dots) \leq 0, \quad (1.4)$$

où interviennent les paramètres de résistance caractéristiques de l'élément matériel symbolisé par R .

La même démarche logique que précédemment conduit à interpréter l'équation (1.1) en recherchant sur la structure la valeur maximale prise par la formule d'interaction pour le champ d'efforts intérieurs engendré par les charges de calcul S_d , avec les valeurs de calcul des paramètres de résistance R_d . Ainsi on écrira pour exprimer (1.1) :

$$\text{Sup}_i f(R_d ; N(S_d), M(S_d), \dots) \leq 0 \quad (1.5)$$

homologue de (1.3).

1.4.4.- Structures et systèmes hyperstatiques

Il est évident que ce qui a été proposé de façon naturelle ci-dessus repose sur le caractère isostatique de la structure considérée. Le cas des structures hyperstatiques et des systèmes étudiés dans le formalisme des milieux continus classiques ne permet pas ce type de réponse car il n'y a pas unicité du champ des efforts intérieurs en équilibre avec une combinaison de charges donnée.

Les principes du calcul aux états limites ultimes ne justifient l'introduction d'aucune hypothèse complémentaire (*) qui permettrait de distinguer un champ d'efforts intérieurs particulier parmi tous les champs statiquement admissibles avec une combinaison de charges de calcul donnée S_d . En désignant par $\mathcal{S}(S_d)$ l'ensemble de ces champs, l'interprétation naturelle de ces principes consiste à explorer $\mathcal{S}(S_d)$ de façon à contrôler si, pour au moins un champ d'efforts intérieurs statiquement admissible avec cette combinaison de charges de calcul, l'inégalité homologue de (1.5) est satisfaite.

En adoptant, pour la généralité, les notations de la mécanique des milieux continus tridimensionnels on désigne par :

$\underline{\sigma}$, le champ des efforts intérieurs,

Ω , le volume de la structure étudiée,

x , le point courant dans Ω ,

$f(R ; x, \underline{\sigma}(x)) \leq 0$, le critère de résistance de l'élément matériel en x .

(*) Hypothèse sur le comportement des matériaux et connaissance de tout ou partie de l'histoire de charge du système.

La formulation explicite de (1.1) devient ainsi :

$$\inf_{\sigma \in \mathcal{S}(S_d)} \sup_{x \in \Omega} f(R_d ; x, \sigma(x)) \leq 0 \quad (1.6)$$

1.5.- Commentaires

On remarque que les explicitations (1.3) à (1.6) proposées pour la mise en oeuvre de l'inégalité fondamentale (1.1), si elles présentent l'avantage d'être mathématiquement précises, perdent la structure de cette inégalité qui compare deux grandeurs liées respectivement l'une aux charges de calcul, l'autre aux résistances de calcul. Cet inconvénient est particulièrement apparent lorsque l'on souhaite modifier l'écriture de la formule (1.1) en y introduisant un « coefficient de méthode » Γ_s sous la forme :

$$\Gamma_s S_d \leq R_d \quad (1.7)$$

De plus, du point de vue de la mise en oeuvre pratique, il devient difficile dans ces formulations de distinguer les charges dont l'effet sur l'équilibre de la structure est défavorable et celles dont l'effet est favorable. Ceci nécessite d'examiner toutes les combinaisons de charges de calcul, en retenant pour chaque charge les deux hypothèses, pour conserver finalement la combinaison S_d qui fournit la valeur maximale du premier membre de l'inéquation (1.6).

On peut s'interroger sur le bien fondé de la formulation (1.6) qui se borne à rechercher, parmi tous les champs statiquement admissibles avec chaque combinaison de charges de calcul, s'il en existe un qui satisfait les conditions de résistance de calcul.

En fait l'inégalité (1.6) recèle toute la philosophie du calcul aux états limites ultimes. Rejoignant le raisonnement des bâtisseurs et la « méthode des descentes de charges » elle porte l'idée implicite que s'il est possible d'équilibrer les charges de calcul en respectant les conditions de résistance avec les valeurs de calcul la sécurité de la structure est assurée. On perçoit bien alors que la notion de valeurs *de calcul* est essentielle à la pertinence pratique d'une telle approche.

1.6.- Nécessité d'une approche théorique

Les paragraphes précédents, dans lesquels on a tenté d'explicitier les principes de base du calcul aux États Limites Ultimes pour leur mise en oeuvre pratique, mettent en évidence l'intérêt d'une formulation qui conserve la forme de l'inéquation (1.1). La théorie du calcul à la rupture fournit le fondement d'une réponse générale à cet objectif. On se propose d'en rappeler les principes de base et les résultats essentiels puis d'en présenter l'application pratique au calcul aux E.L.U.

2.- Théorie du calcul à la rupture : énoncés fondamentaux

2.1.- Notations

On se place, pour la présentation générale de la théorie, dans le cadre de la mécanique des milieux continus classique qui permet des transpositions faciles aux cas particuliers des milieux curvilignes, des plaques, ..., et des structures mixtes. Les notations sont les suivantes :

- Ω : volume du système étudié ;
- $\partial\Omega$: frontière de Ω ;
- \mathbf{x} : vecteur position du point courant dans Ω ;
- $\underline{\sigma}$: champ de tenseur des contraintes de Cauchy ;
- \mathbf{U} : champ de vitesse ; $\widehat{\mathbf{U}}$: champ de vitesse virtuel ;
- $\underline{\mathbf{d}}$: champ de taux de déformation correspondant à \mathbf{U} ; $\widehat{\underline{\mathbf{d}}}$ pour $\widehat{\mathbf{U}}$;
- $[\]$: saut d'une grandeur au franchissement d'une surface Σ en suivant la normale unitaire \mathbf{n} ;
- \cdot : symbole du produit contracté ($\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \sigma_{ij} n_j$) ;
- \cdot : symbole du produit doublement contracté ($\underline{\sigma} : \underline{\mathbf{d}} = \sigma_{ij} d_{ji}$) ;
- \otimes : symbole du produit tensoriel.

La convention de signes sur les contraintes est la convention classique de la mécanique des milieux continus : tractions positives.

2.2.- Principe des puissances virtuelles Paramètres de chargement

On suppose que le système considéré est soumis à un mode de chargement qui dépend d'un nombre fini de paramètres, de sorte que le principe des puissances virtuelles s'exprime sous la forme suivante.

Quel que soit le champ de contrainte $\underline{\sigma}$ statiquement admissible (S.A.) dans le mode de chargement, et quel que soit le champ de vitesse virtuel $\widehat{\mathbf{U}}$ cinématiquement admissible (C.A.) dans le mode de chargement, on a :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}(\mathbf{x}) : \widehat{\underline{\mathbf{d}}}(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{\Sigma} [\widehat{\mathbf{U}}(\mathbf{x})] \cdot \underline{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, d\Sigma = Q_j(\underline{\sigma}) \dot{q}_j(\widehat{\mathbf{U}}) \quad (2.1)$$

$$= Q(\underline{\sigma}) \cdot \dot{q}(\widehat{\mathbf{U}})$$

où les applications

$$\underline{\sigma} \rightarrow Q = Q(\underline{\sigma}) \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

$$\widehat{U} \rightarrow \widehat{q} = \dot{q}(\widehat{U}) \in \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

sont linéaires.

Les composantes Q_j du vecteur chargement Q sont les *paramètres de chargement*, auxquels sont associés les paramètres cinématiques \dot{q}_j composantes de \dot{q} .

On rappelle que les champs de contrainte statiquement admissibles sont continus et continûment différentiables, par morceaux, satisfont les équations d'équilibre sur Ω et les conditions aux limites sur les contraintes sur $\partial\Omega$. Les champs de vitesse cinématiquement admissibles sont continus et continûment différentiables, par morceaux, sur Ω et satisfont les conditions aux limites sur les vitesses sur $\partial\Omega$; il convient d'insister sur le fait que les discontinuités $[\widehat{U}]$ ne sont soumises à aucune restriction.

2.3.- Position du problème de calcul à la rupture

Le système mécanique étudié est défini géométriquement comme indiqué au paragraphe 2.1. par son volume Ω et son contour $\partial\Omega$. Il s'agit de sa géométrie initiale, connue, sous chargement nul. L'écriture du principe des puissances virtuelles (2.1) pour la définition des paramètres de chargement est faite sur cette géométrie en faisant l'hypothèse que les *changements de géométrie du système sont négligeables*.

Il est soumis, comme indiqué au paragraphe 2.2., à un mode de chargement qui dépend de n paramètres Q_j .

Il est caractérisé, du point de vue des propriétés mécaniques, par la donnée, en chaque point x de Ω , des capacités de résistance de son matériau constitutif (non nécessairement homogène) définies par le domaine $G(x)$ de \mathbb{R}^6 qui y détermine les états de contraintes admissibles :

$$\forall x \in \Omega \quad \underline{\sigma}(x) \in G(x) \subset \mathbb{R}^6 \quad (2.4)$$

et possède les propriétés expérimentalement évidentes :

$$\underline{\sigma}(x) = \underline{0} \in G(x),$$

$G(x)$ est étoilé par rapport à $\underline{0}$;

de plus, dans la pratique, $G(x)$ est *convexe*. Cette dernière hypothèse sera supposée vérifiée dans toute la suite (bien que la théorie puisse être établie dans un cadre plus général ; cf. Salençon, 1983).

La question posée s'énonce alors :

étant donné un chargement Q, peut-on décider de la « tenue » ou de la « rupture » du système sous ce chargement ?

2.4.- Chargements potentiellement supportables Chargements extrêmes

La réponse procède de la condition nécessaire évidente suivante.

Pour que le système supporte le chargement Q sous la condition de résistance (2.4) il est nécessaire que

$$\left. \begin{array}{l} \exists \sigma \text{ statiquement admissible avec Q} \\ \text{satisfaisant (2.4)} \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

Un chargement Q pour lequel la condition (2.5) est vérifiée est dit *potentiellement supportable* et le système est alors *potentiellement stable* sous ce chargement.

L'ensemble des chargements potentiellement supportables, désigné par K, est ainsi défini par :

$$Q \in K \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \text{S.A. avec Q} \\ \sigma(x) \in G(x), \forall x \in \Omega \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

où le champ σ est associé à Q par l'application linéaire (2.2).

Les propriétés suivantes de K sont conséquences directes de la définition (2.6) et de la linéarité de (2.2) :

$$\left. \begin{array}{l} Q = 0 \in K, \\ K \text{ est convexe} \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

Les chargements situés sur la frontière de K sont appelés *chargements extrêmes* du système. Ceci rappelle que si les chargements situés dans K ne sont que *potentiellement* supportables puisque la définition (2.5) correspond à une condition nécessaire de « stabilité », les chargements extérieurs à K entraînent, eux, à coup sûr, « l'instabilité » : ils ne peuvent être supportés par le système.

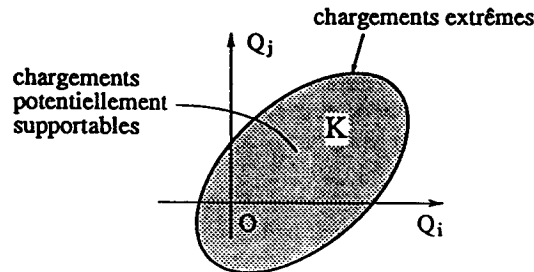


Figure 2 - Domaine K : chargements potentiellement supportables, chargements extrêmes.

2.5.- Commentaires

La réponse apportée ci-dessus à la question posée au paragraphe 2.3. n'est que partielle comme l'indique l'adverbe « potentiellement ». Ceci découle directement du fait que la seule information concernant les propriétés mécaniques du système disponible pour l'analyse réside dans la donnée des capacités de résistance du matériau constitutif, et que, par ailleurs, la question posée concerne un chargement Q donné indépendamment de la connaissance de l'état d'autocontrainte initial (sous $Q = 0$) et de l'histoire de chargement.

Ainsi, ce qui peut apparaître comme une faiblesse du résultat énoncé, en fait aussi l'attrait. Le domaine K est en effet indépendant de l'état d'autocontrainte initial du système, de l'histoire de chargement, des propriétés mécaniques des matériaux constitutifs sous réserve de la condition de résistance (2.4), pourvu que l'hypothèse des changements de géométrie négligeables soit vérifiée. Dans la mesure où, dans la pratique, les informations ci-dessus peuvent être, soit totalement soit partiellement manquantes dans certains cas, ou erronées dans d'autres, l'intérêt de l'analyse précédente est évident.

L'examen de la pertinence du domaine K et des concepts correspondants du point de vue des applications pratiques pose la question de savoir dans quelle mesure les chargements potentiellement supportables seront effectivement supportés par le système.

Une réponse théorique a été apportée à cette question (Brezis, 1973) (cf. Halphen et Salençon, 1987) dans le cas d'un système constitué d'un matériau élastique et parfaitement plastique obéissant au principe du travail maximal : tout chargement de K sera effectivement supporté. Dans la pratique on se trouve rarement devant un tel « cas d'école » et la pertinence de K doit aussi être évaluée par les essais et l'expérience de l'ingénieur. On retiendra notamment l'idée que la pertinence pratique de l'analyse à la rupture est liée au fait que les déformations nécessaires pour mobiliser la résistance des éléments concernés du système doivent être physiquement compatibles. En outre, les hypothèses géométriques doivent être validées.

2.6.- Approche par l'intérieur statique

La définition (2.6) conduit directement au mode de construction de K : tout champ de contrainte $\underline{\sigma}$ statiquement admissible dans le mode de chargement et satisfaisant la condition de résistance (2.4) détermine par (2.2) un chargement potentiellement supportable $Q = Q(\underline{\sigma})$:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\sigma} \text{ S.A. dans le mode} \\ \underline{\sigma}(\mathbf{x}) \in G(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \Omega \end{array} \right| \begin{array}{l} (2.2) \\ \rightarrow Q(\underline{\sigma}) \in K \end{array} \quad (2.8)$$

L'enveloppe convexe de tels chargements Q fournit une approche par l'intérieur de K ou une « borne inférieure » des chargements extrêmes (figure 3).

La détermination exacte de K nécessite l'exploration complète de l'ensemble des champs $\underline{\sigma}$ de (2.8) (ou beaucoup de chance!). Hormis le cas des structures curvilignes simples on se satisfera dans la pratique d'une approche par l'intérieur de K , choisie pour un bon équilibre entre la simplicité des moyens mis en oeuvre et la qualité des résultats obtenus. Ceci met en évidence l'utilité d'une approche complémentaire permettant d'obtenir une « borne supérieure » des chargements extrêmes pour disposer d'un encadrement.

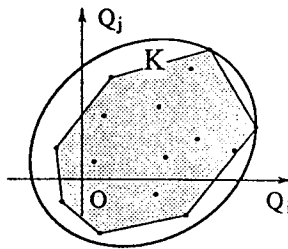


Figure 3 - Approche statique par l'intérieur.

2.7.- Énoncé fondamental de l'approche cinématique

A partir de la définition (2.6) du domaine K on peut écrire l'équation (2.1) du principe des puissances virtuelles pour tout chargement potentiellement supportable Q en considérant comme champ $\underline{\sigma}$ un champ de contrainte associé à Q par (2.6), et comme champ \widehat{U} un champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible dans le mode :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma}(\mathbf{x}) : \widehat{\underline{d}}(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{\Sigma} [\widehat{U}(\mathbf{x})] \cdot \underline{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, d\Sigma = Q(\underline{\sigma}) \cdot \dot{q}(\widehat{U}) \quad (2.9)$$

$$= P_c(Q, \widehat{U})$$

On introduit les fonctions « π » définies comme suit :

$$\pi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x})) = \text{Sup} \{ \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x}) : \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x}) \mid \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x}) \in G(\mathbf{x}) \} \quad (2.10)$$

$$\pi(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), [\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x})]) = \text{Sup} \{ [\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x})] \cdot \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \mid \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x}) \in G(\mathbf{x}) \} \quad (2.11)$$

Puisque le champ $\boldsymbol{\sigma}$ de (2.9) vérifie la condition de résistance (2.4) on déduit de (2.9) à (2.11) que :

$$\forall Q \in K, \forall \hat{\mathbf{U}} \text{ C.A.}, \quad (2.12)$$

$$P_e(Q, \hat{\mathbf{U}}) = Q \cdot \dot{q}(\hat{\mathbf{U}}) \leq \int_{\Omega} \pi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x})) \, d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), [\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x})]) \, d\Sigma$$

En désignant par $P_{rm}(\hat{\mathbf{U}})$, puissance résistante maximale dans le champ $\hat{\mathbf{U}}$, le second membre de (2.12)

$$P_{rm}(\hat{\mathbf{U}}) = \int_{\Omega} \pi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x})) \, d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}), [\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x})]) \, d\Sigma \quad (2.13)$$

le résultat obtenu s'énonce sous forme compacte :

$$\left. \begin{array}{l} \forall \hat{\mathbf{U}} \text{ C.A.}, \\ K \subset \{ P_e(Q, \hat{\mathbf{U}}) \leq P_{rm}(\hat{\mathbf{U}}) \} \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

2.8.- Les fonctions π

2.8.1.- Signification mécanique des fonctions π

L'énoncé précédent repose sur l'introduction des fonctions π définies par (2.10 et 2.11) dont il est nécessaire d'examiner la signification mécanique.

La formule (2.10) montre que, étant donné $\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x})$, taux de déformation virtuel au point \mathbf{x} , $\pi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x}))$ représente la valeur maximale de la puissance qui peut être développée dans $\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x})$ par tout état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x})$ satisfaisant la condition de résistance du matériau constitutif au point \mathbf{x} . Ainsi $\pi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x}))$ apparaît comme la densité de puissance résistante maximale dans le taux de déformation virtuel $\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x})$ sous la condition de résistance définie par $G(\mathbf{x})$.

Du point de vue mathématique $\pi(x, \cdot)$ est la fonction d'appui du convexe $G(x)$ et l'on sait que la donnée de cette fonction est équivalente à celle de $G(x)$ (par un critère de résistance par exemple), ce qui signifie que $\pi(x, \cdot)$ contient sous forme dualisée toute l'information donnée par $G(x)$.

La justification de l'adjectif « résistante » qui apparaît dans la terminologie est évidente sur l'écriture (2.1) du principe des puissances virtuelles où la puissance des efforts extérieurs est équilibrée par la puissance résistante, opposée de la puissance des efforts intérieurs dans sa définition classique, (Germain, 1986).

Tout ce qui vient d'être dit à propos de la fonction $\pi(x, \cdot)$ vaut pour la fonction $\pi(x, \Pi(x), \cdot)$ définie par (2.11) car on vérifie aisément que :

$$\pi(x, n(x), [\hat{U}(x)]) = \frac{1}{2} \pi(x, n(x) \otimes [\hat{U}(x)] + [\hat{U}(x)] \otimes n(x)) \quad (2.15)$$

Il convient de signaler que l'idée fondamentale de cette approche cinématique, qui consiste à définir $G(x)$ par dualité au moyen des fonctions π , a été énoncée par Prager (1955) dans le cadre de la plasticité.

2.8.2.- Calcul des fonctions π

Compte tenu de (2.15), on se bornera à évoquer le cas des fonctions $\pi(x, \hat{d}(x))$. La figure 4 présente schématiquement les deux cas typiques rencontrés dans le calcul de cette fonction.

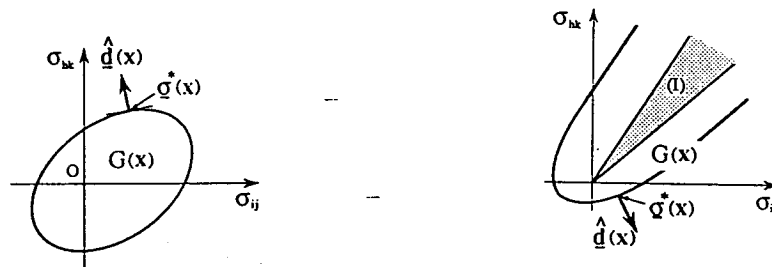


Figure 4 - Calcul de $\pi(x, \hat{d}(x))$.

1°- Si le convexe $G(x)$ est borné dans toutes les directions de \mathbb{R}^6 on a :

$$\pi(x, \hat{d}(x)) = \underline{\sigma}^*(x) : \hat{d}(x) \quad (2.16)$$

où $\underline{\sigma}^*(x)$ désigne le (ou les) état de contrainte à la frontière de $G(x)$ où une normale extérieure est colinéaire à $\hat{d}(x)$ et de même sens. Dans ce cas $\pi(x, \hat{d}(x))$ a une valeur finie quel que soit $\hat{d}(x)$.

2°- Si le convexe $G(\mathbf{x})$ n'est pas borné dans toutes les directions on désigne par (I) le cône convexe de ses directions à l'infini dans \mathbb{R}^6 . Alors,

• si $\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x})$ appartient au cône convexe orthogonal à (I) , $\pi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x}))$ prend une valeur finie :

$$\pi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x})) = \sigma^*(\mathbf{x}) : \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

où $\sigma^*(\mathbf{x})$ a la même définition que dans le cas précédent ;

• si $\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x})$ n'appartient pas à ce cône, $\pi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x}))$ est infinie :

$$\pi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x})) = +\infty \quad (2.18)$$

En mécanique des milieux continus tridimensionnels, les domaines de résistance usuels sont du second type évoqués ci-dessus (critères de Tresca, von Mises, Coulomb, Drucker-Prager,...) : les fonctions π correspondantes prennent donc une valeur finie ou infinie suivant le taux de déformation virtuel considéré. Le cas d'une fonction π toujours infinie correspondrait au matériau dont la résistance serait illimitée pour toute sollicitation.

Dans certaines conditions de chargement pour le milieu continu tridimensionnel (contrainte plane par exemple), et pour les milieux continus uni- ou bidimensionnels (poutres, plaques), les domaines de résistance sont bornés dans toutes les directions (premier type sur la figure 3).

On trouvera notamment dans (Salençon, 1983), une importante (mais non exhaustive) liste de critères de résistance et des fonctions π correspondantes.

Les fonctions π possèdent les propriétés mathématiques évidentes suivantes :

- $\pi(\mathbf{x}, \bullet)$ est non négative,
- $\pi(\mathbf{x}, \bullet)$ est positivement homogène de degré 1,
- $\pi(\mathbf{x}, \bullet)$ est convexe.

2.9.- Approche par l'extérieur cinématique

2.9.1.- Approche par l'extérieur

L'énoncé (2.14) est le fondement de l'approche par l'extérieur cinématique du domaine K .

Considérant \hat{U} , champ de vitesse virtuel cinématique admissible quelconque, on calcule $P_m(\hat{U})$ à partir des expressions connues des fonctions π et on calcule

$P_e(Q, \hat{U}) = Q \cdot \dot{q}(\hat{U})$, forme linéaire de Q où $\dot{q}(\hat{U})$ est connu : le domaine K est alors inclus dans le demi-espace de \mathbb{R}^n défini par l'inéquation (2.14). En répétant l'opération pour divers champs \hat{U} on obtient rapidement une approche par l'extérieur du domaine K telle que représentée sur la figure 5 et une « borne supérieure » pour les chargement extrêmes.

De plus on peut démontrer, au prix de quelques hypothèses mathématiques complémentaires (Nayroles, 1970 ; Frémond et Friaà, 1978 ; Friaà, 1979) que la formulation (2.14) est la *définition duale exacte* de K , c'est-à-dire que K peut être engendré en appliquant (2.14) à tous les champs de vitesse virtuels cinématiquement admissibles.

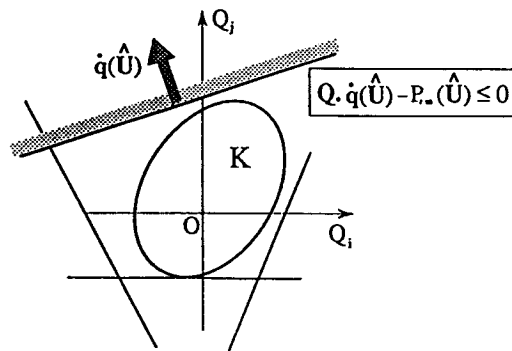


Figure 5 - Approche par l'extérieur cinématique.

2.9.2.- Champs de vitesse pertinents

L'exploitation de l'inéquation (2.14) ne conduit à un résultat non trivial que si :

- la puissance des efforts extérieurs n'est pas nulle, $P_e(Q, \hat{U}) \neq 0$;
- la puissance résistante maximale est finie, $P_m(\hat{U}) < +\infty$.

La première de ces conditions n'appelle aucun commentaire particulier si ce n'est qu'elle est conforme au bon sens.

La seconde signifie que \hat{U} doit être choisi de façon à ce que $\pi(x, \hat{q}(x))$ et $\pi(x, n(x), [\hat{U}(x)])$ soient finies. De tels champs de vitesse virtuels seront dits *pertinents*. Il convient d'insister sur le fait que ce concept est uniquement lié à la formulation duale de la condition de résistance (2.4) et n'a aucun rapport (si ce n'est la similitude mathématique) avec une loi d'écoulement plastique ou toute autre hypothèse relative au comportement du matériau lorsque la condition de résistance est saturée.

2.10.- Remarques finales

Au terme de cette présentation rapide des principaux résultats de la théorie du Calcul à la rupture on peut souligner que cette théorie repose sur la condition nécessaire à la tenue du système étudié de :

$$\text{Compatibilité entre } \left\{ \begin{array}{l} \text{équilibre (du système)} \\ \text{résistance (du matériau)} \end{array} \right. , \quad (2.19)$$

aucune autre donnée n'intervenant dans l'analyse.

L'approche statique est la conséquence logique de cette condition, exploitée par Hill (1954, 1966).

L'approche cinématique, exprimée par la formule (2.14), est issue de la dualisation de l'approche statique et fait intervenir les champs de vitesse *virtuels* cinématiquement admissibles sans référence à aucune hypothèse supplémentaire sur le comportement du matériau.

3.- Formulation et justification du calcul aux états limites ultimes à travers la théorie du calcul à la rupture

3.1.- Identification des problèmes étudiés

3.1.1.- Identité des principes de base

Le rapprochement des principes de base du calcul aux états limites ultimes présentés au paragraphe 1.1 et de ceux du calcul à la rupture rappelés au paragraphe 2.10 par (2.19) met en évidence l'identité des points de vue des deux analyses qui s'appuient exclusivement sur les notions d'*équilibre* et de *résistance* dont on doit assurer la *compatibilité*.

L'identification des problèmes nécessite évidemment que l'on précise les correspondances entre les paramètres qui interviennent dans chacun d'eux.

3.1.2.- Les charges et leurs valeurs de calcul

Comme on l'a dit au paragraphe 1.2. les sollicitations de la structure calculée aux E.L.U. sont constituées d'une ou plusieurs combinaisons de charges dont les valeurs sont connues et sont pondérées par des coefficients multiplicateurs qui en définissent les valeurs de calcul.

La correspondance avec la théorie du calcul à la rupture se fait simplement en affectant à chacune de ces charges un *paramètre* de chargement Q_j .

Le problème est alors de situer, par rapport au domaine $K(R_d)$ défini dans la suite (§ 3.1.3), les chargements $Q(S_d)$ obtenus en considérant les diverses combinaisons réglementaires des valeurs connues des charges affectées des coefficients de sécurité partiels appropriés.

Dans la mesure où le coefficient de sécurité partiel prend des valeurs différentes suivant l'effet défavorable ou favorable de la charge correspondante sur l'équilibre, on est amené, pour chaque telle combinaison, à examiner la position des chargements $Q(S_d)$ obtenus en considérant toutes les permutations des valeurs maximales et minimales des coefficients de sécurité partiels. Comme cela est représenté schématiquement sur la figure 6, cela signifie que pour chaque combinaison de charges on vérifie que les sommets d'un hypercube de R^n sont situés dans $K(R_d)$.

On remarque ici que la *convexité*, démontrée par la théorie du calcul à la rupture, du domaine $K(R_d)$ dans l'espace des paramètres de chargement (cf. § 3.1.3) est l'argument essentiel pour justifier cette démarche car elle assure que l'hypercube lui-même est alors entièrement contenu dans $K(R_d)$.

3.1.3.- Les résistances et leurs valeurs de calcul

Les capacités de résistance des matériaux constitutifs de la structure calculée aux E.L.U. sont définies par des paramètres de résistance symbolisés par R dont R_d désigne les valeurs de calcul (§ 1.3).

La correspondance avec la théorie du calcul à la rupture se fait en explicitant les paramètres de résistance dans l'écriture de la condition de résistance (2.4) :

$$\forall x \in \Omega \quad \varrho(x) \in G(R ; x) \quad (3.1)$$

$G(R ; x)$ étant défini par le critère de résistance introduit au paragraphe 1.4 :

$$f(R ; x, \varrho(x)) \leq 0 \Leftrightarrow \varrho(x) \in G(R ; x) \quad (3.2)$$

On fait l'hypothèse que, pour toutes les valeurs des paramètres de résistance R , $G(R ; x)$ possède les propriétés énoncées au paragraphe 2.3, dont la *convexité* (1).

La théorie du calcul à la rupture permet alors de déterminer, dans l'espace des paramètres de chargement définis au paragraphe précédent, le domaine $K(R)$ qui possède les propriétés (2.7).

Le calcul de la structure aux E.L.U. se réfère au domaine $K(R_d)$ qui correspond aux valeurs de calcul des paramètres de résistance.

(1) On trouvera dans (Salençon et Tristan-Lopez, 1983) un exemple de critère de résistance dont la convexité n'est pas assurée pour toutes les valeurs pratiques des paramètres.

3.2.- Formulation théorique statique du calcul aux E.L.U.

Les paragraphes précédents ont décrit la mise en correspondance du calcul aux E.L.U. et de la théorie du calcul à la rupture.

La figure 6 résume de façon schématique la démarche correspondante qui consiste à déterminer $K(R_d)$ pour contrôler que les divers chargements $Q(S_d)$ (cf. § 3.1.2) y sont contenus.

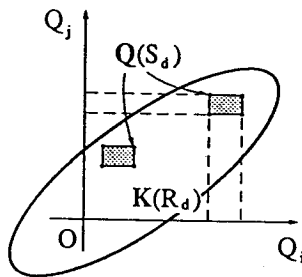


Figure 6 - Formulation statique du calcul aux E.L.U.

En désignant, comme au paragraphe 1.4.4, par $\mathcal{S}(S_d)$ l'ensemble des champs de contrainte σ statiquement admissibles avec $Q(S_d)$, et compte tenu des définitions (2.6) de K et (3.2) de $G(R; x)$, on est ainsi amené à contrôler pour chaque valeur de S_d s'il existe au moins un champ σ tel que :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma \in \mathcal{S}(S_d), \\ f(R_d; x, \sigma(x)) \leq 0, \forall x \in \Omega \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

c'est-à-dire si

$$\inf_{\sigma \in \mathcal{S}(S_d)} \sup_{x \in \Omega} f(R_d; x, \sigma(x)) \leq 0 \quad (3.4)$$

On reconnaît en (3.4) l'énoncé (1.6) qui avait été proposé pour expliciter la formule fondamentale du calcul aux E.L.U. dans le cas des structures et systèmes hyperstatiques.

Les formules (3.3) ou (3.4) sont la formulation théorique statique du calcul aux états limites ultimes.

3.3.- A propos des coefficients de sécurité partiels sur les charges et les résistances

Diverses considérations justifient dans la pratique l'introduction des coefficients de sécurité partiels sur les charges et les résistances pour déterminer les valeurs de calcul, dont certaines se réfèrent aux caractères aléatoires (différents) des charges et des résistances. La théorie du calcul à la rupture apporte ici un argument supplémentaire lié au caractère partiel de la réponse à la question de la tenue de l'ouvrage, qui a été commenté aux paragraphes 1.5 et 2.5.

3.4.- Formulation théorique cinématique du calcul aux E.L.U.

3.4.1.- Énoncé

On admettra, pour simplifier, que sont satisfaites les hypothèses mathématiques complémentaires nécessaires pour établir que la formule (2.14) est la définition duale de K (§ 2.9.1), soit :

$$K = \bigcap_{\widehat{U} \text{ C.A.}} \{P_e(Q, \widehat{U}) \leq P_{rm}(\widehat{U})\} \quad (3.5)$$

Dans cette formule on doit désormais faire apparaître explicitement, au second membre, les paramètres de résistance R qui définissent $G(R; x)$ et donc les fonctions π :

$$P_{rm}(R; \widehat{U}) = \int_{\Omega} \pi(R; x, \widehat{d}(x)) d\Omega + \int_{\Sigma} \pi(R; x, n(x), [\widehat{U}(x)]) d\Sigma \quad (3.6)$$

A partir de la définition duale de $K(R_d)$ par (3.5) on obtient la formulation cinématique duale, équivalente à (3.3) ou (3.4), pour chaque chargement $Q(S_d)$ qui s'écrit :

$$\left. \begin{array}{l} \forall \widehat{U} \text{ C.A.}, \\ P_e(S_d, \widehat{U}) \leq P_{rm}(R_d; \widehat{U}) \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

où l'on a posé :

$$P_e(S_d, \widehat{U}) = P_e(Q(S_d), \widehat{U}) \quad (3.8)$$

C'est la *formulation théorique cinématique* du calcul aux états limites ultimes.

3.4.2.- Commentaires

L'intérêt de cette formulation est évident si l'on se reporte aux commentaires donnés au paragraphe 1.5. On y retrouve une expression dont la structure est celle, cherchée, de la formule (1.1).

S_d et R_d désignent ici les *valeurs de calcul* des charges et des paramètres de résistance, dont les effets sont séparés, représentés chacun par un scalaire qui a la dimension d'une puissance, calculée dans un champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible. L'inégalité (3.7) doit être vérifiée pour *tous les champs* \hat{U} C.A.

Pour chaque champ \hat{U} C.A., il est aisé d'identifier les charges « défavorables » à l'équilibre et les charges « favorables » ce qui permet d'affecter d'emblée à chacune d'elle le coefficient approprié ; il suffit en effet d'examiner le signe de la contribution de la charge concernée dans la puissance $P_e(S_d, \hat{U})$; s'il est positif, la charge est « défavorable » à l'équilibre, s'il est négatif, elle lui est « favorable ».

3.5.- Mise en oeuvre pratique de la formulation cinématique du calcul aux E.L.U.

La formule (3.7) apporte ainsi la *réponse précise* à la question posée dans la première section de cette étude.

L'exploitation complète de cette formule implique l'exploration intégrale de l'ensemble des champs \hat{U} C.A. pertinents (§ 2.9.2). Dans la pratique on se restreint habituellement à une exploitation partielle, plus ou moins raffinée, de cette formule sur un sous-ensemble de champs \hat{U} C.A. pertinents.

Pour se prémunir contre le biais dû à une telle exploitation partielle, une idée consiste à introduire un *coefficient de méthode* Γ_s , supérieur à l'unité, qui dépend de la méthode utilisée c'est-à-dire du sous-ensemble C_M de champ \hat{U} C.A. exploré, en écrivant :

$$\left. \begin{array}{l} \forall \hat{U} \in C_M, \\ \Gamma_s P_e(S_d, \hat{U}) \leq P_m(R_d; \hat{U}) \end{array} \right\} \quad (3.9)$$

Un exemple, tiré de la mécanique des sols, permet d'illustrer ce propos.

Pour le problème de la capacité portante d'une fondation superficielle de type semelle filante sur un sol purement cohérent de cohésion C , l'exploitation complète de la formule (3.7) détermine la valeur exacte de la force portante.

$$F = (\pi + 2) BC, \quad (3.10)$$

obtenue par exemple en prenant pour \hat{U} le champ de vitesse de Prandtl (figure 7).

Une exploitation partielle de cette même formule (3.7) sur les seuls champs de vitesse avec cercles de glissement (figure 7) conduit à la valeur :

$$F = 5,53 BC. \quad (3.11)$$

La comparaison de ces deux valeurs conduit alors à introduire, pour l'exploitation partielle indiquée, un coefficient de méthode de l'ordre de 1,08.

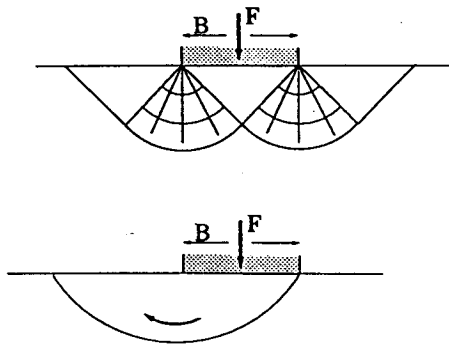


Figure 7 - Capacité portante d'une semelle filante : champ de vitesse de Prandtl et champ de vitesse avec cercle de glissement.

D'autres considérations pratiques entrent généralement en jeu à propos de l'introduction du coefficient de méthode, qui sont l'objet de controverses, alors que le propos précédent met clairement en évidence la nécessité d'un tel coefficient dès que l'exploitation de l'inégalité (3.7) n'est pas faite sur tous les champs \hat{U} C.A. (pertinents).

On peut remarquer que, « par construction », la formulation cinématique (3.7) n'est liée à aucune classe particulière de champs \hat{U} C.A. ce qui permet son application sans ambiguïté à des champs de vitesse aussi différents que ceux de la figure 7 et permet d'en « comparer les mérites ». En ce sens elle apparaît comme la *réponse complète* à la question initialement posée. Elle se différencie ainsi d'autres tentatives plus ou moins heureuses qui sont toujours liées à une classe particulière de champs de vitesse (« modes de rupture »).

4.- En conclusion

La théorie du calcul à la rupture constitue le fondement du calcul aux états limites ultimes.

Par son approche statique elle permet la formulation précise du problème posé et apporte les justifications théoriques de diverses pratiques.

Par son approche cinématique, obtenue par dualisation au moyen du principe des puissances virtuelles, elle fournit la formulation précise et complète de l'inégalité fondamentale du calcul aux états limites ultimes. Les effets des charges et des résistances y sont distingués sans ambiguïté, dans la puissance des efforts extérieurs d'une part, et la puissance résistante maximale de l'autre :

$$\left. \begin{array}{l} \forall \hat{U} \text{ C.A.}, \\ P_e(S_d, \hat{U}) \leq P_{rm}(R_d; \hat{U}) \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

L'exploitation de cette inégalité sur des ensembles restreints de champs \hat{U} C.A. justifie l'introduction du coefficient de méthode.

On espère que l'effort de clarification tenté dans cette étude facilitera les débats qui se déroulent actuellement pour la mise en place de règlements fondés sur cette approche de la sécurité à l'échelle européenne. Ceci paraît particulièrement nécessaire en mécanique des sols pour résoudre les problèmes posés par l'utilisation du critère de résistance de Coulomb.

Références

- BREZIS H. (1973), *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de construction dans les espaces de Hilbert*, North Holland, Mathematic studies.
- FRÉMOND M. et FRIAÀ A. (1978), *Analyse limite. Comparaison des méthodes statique et cinématique*, C.R.Ac.Sc. Paris, 286, série A, pp. 107-110.
- FRIAÀ A. (1979), *La loi de Norton-Hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité*, Thèse Dr. Sc. Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- GERMAIN P. (1986), *Mécanique*, Ellipses, Paris.
- HALPHEN B. et SALENÇON J. (1987), *Élasto-plasticité*, Presses de l'E.N.P.C., Paris, 448 p.
- HILL R. (1954), *On the limits set by plastic yielding to the intensity of singularities of stress*, J. Mech. Phys. Solids, 2, 4, pp. 278-285.
- HILL R. (1966), *The extremal stress-field concept*, J. Mech. Phys. Solids, 14, 5, pp. 239-243.
- KREBS OVESEN N. (1989), *General Report, session 30 : Codes and standards*, Proc. XII Int. Conf. Soil Mech. & Found. Eng., Rio de Janeiro, vol.4.
- NAYROLES B. (1970), *Essai de théorie fonctionnelle des structures rigides plastiques parfaites*, J. Méc., 9, pp. 491-506.

PRAGER W. (1955), *Théorie générale des états limites d'équilibre*, J. Math. Pures Appl., 34, pp. 395-406.

SALENÇON J. (1983), *Calcul à la rupture et analyse limite*, Presses de l'E.N.P.C., Paris, 366 p.

SALENÇON J. et TRISTÁN-LÓPEZ A. (1983), *Calcul à la rupture en mécanique des sols : cas des sols cohérents anisotropes*, Ann. I.T.B.T.P., 413, pp. 54-83.

Ce texte a été rédigé en hommage au Professeur Robert Dautray, en témoignage de reconnaissance pour l'intérêt qu'il a toujours manifesté pour mes travaux et les encouragements qu'il m'a prodigués à maintes reprises à les poursuivre et à les diffuser.