

MÉCANIQUE DES SOLS ET MILIEUX POREUX. — *Critère de résistance pour le matériau « terre-armée »*. Note de **Patrick de Buhan, Larbi Siad et Jean Salençon**, Correspondant de l'Académie.

Un critère de résistance pour le matériau « terre-armée » est construit à partir de l'analyse théorique développée dans [2], fondée sur une méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture. Le calcul de la capacité portante au poinçonnement d'un massif en terre-armée en s'appuyant sur ce critère permet, par la comparaison avec des résultats expérimentaux sur modèles réduits, antérieurement rapportés dans [3], une première validation de cette approche.

SOIL MECHANICS AND POROUS MEDIA. — Strength criterion for reinforced earth as a material.

A strength criterion for reinforced earth as a material is derived from the theoretical analysis developed in [2] which relies on a homogenization procedure in yield-design. The bearing capacity for punch indentation of a reinforced earth half space is calculated from this criterion and compared to reduced scale experimental results already presented in [3], this giving a first validation of this approach.

1. DOMAINE DE RÉSISTANCE DU SOL RENFORCÉ. — Le sol renforcé considéré est constitué d'un sol homogène, purement frottant, dont le domaine de résistance (cf. [1]) G_1 est défini par le critère de Coulomb avec un angle de frottement φ , renforcé par des lits plans d'armatures distribués périodiquement, perpendiculairement à l'axe Oy (fig. 1). Compte tenu des applications envisagées à des problèmes de calcul à la rupture en déformation plane pour le matériau homogénéisé, l'analyse est menée dans le cadre bidimensionnel dans le plan (Oxy) . Le matériau constitutif des armatures est supposé homogène purement cohérent; on sait, par [2], que la caractéristique significative à introduire pour la résistance du renforcement est la valeur σ_0 de la résistance en traction d'un lit d'armatures (par unité de longueur transversale). Dans le cas présent, guidé par l'intuition sur le « fonctionnement » pratique de la terre armée, afin de tenir compte du rôle négligeable joué par les armatures en compression, on convient d'adopter pour les armatures une résistance nulle en compression; cette hypothèse va, en tout état de cause, dans le sens de la sécurité. On suppose enfin que le contact à l'interface sol-armature se fait avec adhérence parfaite.

Le domaine de résistance G^{hom} du matériau homogénéisé correspondant est alors défini, dans l'espace des contraintes bidimensionnelles, par :

$$(1) \quad \Sigma \in G^{\text{hom}} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \sigma_1 \in G_1, \\ \exists \sigma \in [0, \sigma_0], \\ \text{t. q. } \Sigma = \sigma_1 + \sigma e_x \otimes e_x. \end{cases}$$

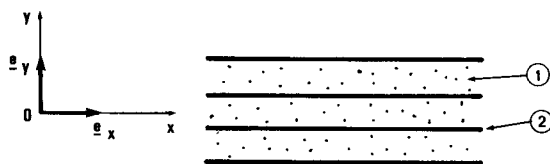


Fig. 1. — Le matériau « terre-armée ».

Fig. 1. — Reinforced earth material.

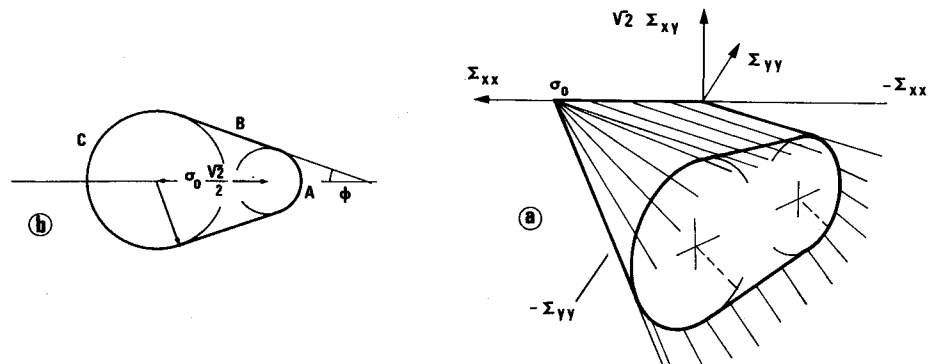


Fig. 2. — Domaine de résistance G^{hom} : (a) dans l'espace Σ_{xx} , Σ_{yy} , $\sqrt{2}\Sigma_{xy}$; (b) coupe par un plan déviateur.
 Fig. 2. — Strength domain G^{hom} : (a) in the Σ_{xx} , Σ_{yy} , $\sqrt{2}\Sigma_{xy}$ space; (b) intersection with a deviatoric plane.

Équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\Sigma_{xy}| \leq (\Sigma_{yy} - \Sigma_{xx})/2 \operatorname{tg} \varphi, \\ \sqrt{(\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy})^2/4 + \Sigma_{xy}^2} \leq -(\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy}) \sin \varphi/2, \\ (\Sigma_{yy} - \Sigma_{xx})/2 \operatorname{tg} \varphi \leq |\Sigma_{xy}| \leq (\sigma_0 + (\Sigma_{yy} - \Sigma_{xx}))/2 \operatorname{tg} \varphi, \\ |\Sigma_{xy}| \leq -\Sigma_{yy} \operatorname{tg} \varphi, \\ |\Sigma_{xy}| \geq (\sigma_0 + (\Sigma_{yy} - \Sigma_{xx}))/2 \operatorname{tg} \varphi, \\ \sqrt{((\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy})^2/4 + \Sigma_{xy}^2 - \sigma_0(\Sigma_{xx} - \Sigma_{yy}) + \frac{\sigma_0^2}{4})} \leq (\sigma_0 - (\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy})) \sin \varphi/2. \end{array} \right.$$

La figure 2 montre divers aspects du domaine de résistance G^{hom} , rapporté aux axes Σ_{xx} , Σ_{yy} , $\sqrt{2}\Sigma_{xy}$. G^{hom} est l'enveloppe convexe du cône de Coulomb caractérisant la résistance du sol initial et du cône translaté de σ_0 dans la direction Σ_{xx} .

Ceci met notamment clairement en évidence le renforcement des caractéristiques de résistance du sol (en effet : $G_1 \subset G^{\text{hom}}$). De plus, on peut distinguer, dans la frontière de G^{hom} , trois portions qui correspondent à des façons différentes d'atteindre la frontière dans [1] que l'on peut interpréter comme suit :

- pour les points de type A communs à la frontière de G^{hom} et de G_1 , la résistance du sol est mobilisée tandis que les armatures sont à la limite de leur résistance en compression (c'est-à-dire que l'effort y est nul);
- pour les points de type B, la résistance du sol est mobilisée, tandis que les armatures supportent un effort de traction inférieur à leur limite de résistance;
- pour les points de type C communs à la frontière de G^{hom} et du cône translaté, la résistance du sol est mobilisée, et la limite de résistance en traction est atteinte dans les armatures.

Cette interprétation des résultats d'une approche fondée sur les théories du calcul à la rupture et de l'homogénéisation n'a toutefois qu'une valeur heuristique quant aux mécanismes de rupture du matériau terre armée.

On peut enfin remarquer que le domaine G^{hom} ainsi construit rend bien compte, au niveau du matériau homogénéisé, de l'anisotropie évidente introduite par les armatures. La méthode employée a ainsi permis de déterminer le critère de résistance d'un matériau anisotrope issu d'une élaboration mécanique simple, à partir de la connaissance des critères de résistance des matériaux homogènes isotropes constitutifs : ce critère ne rentre pas dans le cadre de ceux étudiés par Boehler et Sawczuk [4] fondés sur la notion de tenseur d'anisotropie.

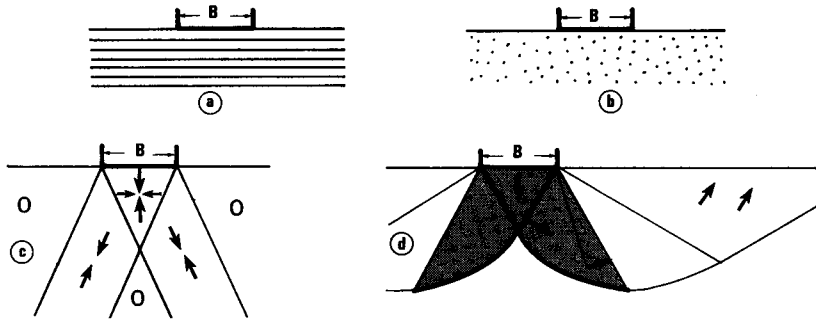


Fig. 3. — (a) Poinçonnement d'un demi-espace en terre-armée. (b) Problème homogénéisé associé. (c) Champ statique. (d) Champ cinématique de Prandtl.
 Fig. 3. — (a) Punch indentation of a reinforced earth half space. (b) Associated homogenized problem. (c) Static field. (d) Prandtl kinematic field.

Le calcul des fonctions « π » pour le domaine G^{hom} s'effectue aisément à partir de la définition même de ces fonctions et de la caractérisation de G^{hom} par la formule (1) :

$$\forall \mathbf{D} \text{ bidimensionnel, } \pi^{hom}(\mathbf{D}) = \text{Sup} \{ \Sigma : \mathbf{D} | \Sigma \in G^{hom} \},$$

d'où, compte tenu de (1),

$$(2) \quad \forall \mathbf{D} \text{ bidimensionnel, } \pi^{hom}(\mathbf{D}) = \text{Sup} \{ \sigma_1 : \mathbf{D} + \sigma \mathbf{D}_{xx} | \sigma_1 \in G_1, \sigma \in [0, \sigma_0] \}.$$

Cette dernière formule conduit aux résultats explicites :

$$(3) \quad \begin{cases} \pi^{hom}(\mathbf{D}) = \sigma_0 \langle \mathbf{D}_{xx} \rangle & \text{si } \text{tr} \mathbf{D} \geq (|D_1| + |D_2|) \sin \varphi, \\ \pi^{hom}(\mathbf{D}) = +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\langle \rangle$ indique la partie positive.

Dans le cas d'une discontinuité de vitesse \mathcal{V} à travers une ligne de normale \mathbf{n} :

$$(4) \quad \begin{cases} \pi^{hom}(\mathbf{n}; \mathcal{V}) = \sigma_0 \langle \mathcal{V}_x n_x \rangle & \text{si } \mathcal{V} \cdot \mathbf{n} \geq |\mathcal{V}| \sin \varphi, \\ \pi^{hom}(\mathbf{n}; \mathcal{V}) = +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarquera que les conditions sur \mathbf{D} ou $(\mathbf{n}; \mathcal{V})$ pour que les fonctions « π^{hom} » prennent des valeurs finies sont identiques à celles valables pour le sol de domaine de résistance G_1 .

2. APPLICATION. — Dans [3] Sawicki rend compte d'expériences sur modèles réduits de poinçonnement d'un sol en terre-armée. Le problème homogénéisé associé [5] au problème de calcul à la rupture correspondant est représenté sur la figure 3 où la fondation agit sur un sol dont le domaine de résistance est G^{hom} .

Compte tenu de la définition (1) de G^{hom} , on peut, en transposant aisément le raisonnement classique (cf. [6]), établir la formule « de superposition » suivante qui découple les effets de la pesanteur et du renforcement du sol en allant dans le sens de la sécurité. En désignant par p_{ult} la capacité portante, valeur maximale de la pression moyenne de poinçonnement, par γ le poids volumique du sol, et par B la largeur de la fondation étudiée :

$$(5) \quad p_{ult} \geq \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma(\varphi) + \sigma_0 N_{\sigma_0}(\varphi),$$

où $N_\gamma(\varphi)$ est le coefficient du terme de surface déterminé pour le sol homogène pesant de domaine de résistance G_1 défini par le critère de Coulomb, et où $N_{\sigma_0}(\varphi)$ est un coefficient sans dimension à déterminer pour le sol homogénéisé supposé non pesant.

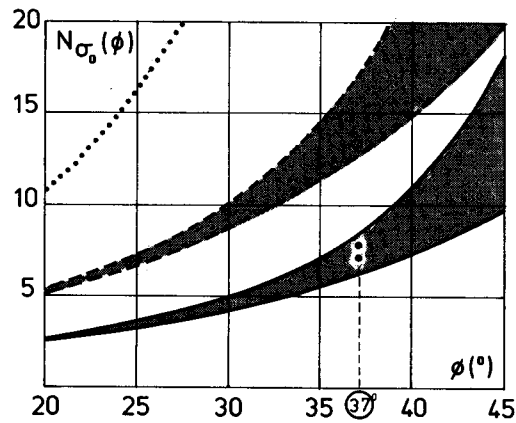


Fig. 4. — Comparaison des valeurs théoriques et expérimentales de $N_{\sigma_0}(\phi)$.
 ——— $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$; - - - - - $-\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_0$; « cohésion isotrope »; ● points expérimentaux.
 Fig. 4. — Comparison between theoretical and experimental values of $N_{\sigma_0}(\phi)$.
 ——— $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$; - - - - - $-\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_0$; "isotropic cohesion"; ● experimental points.

On utilise pour déterminer $N_{\sigma_0}(\phi)$ les approches par l'intérieur et par l'extérieur du calcul à la rupture.

En optimisant le champ de la figure 3 c :

$$(6) \quad N_{\sigma_0}(\phi) \geq \cos^2 \phi / (1 - 2 \sin \phi) \quad \text{si } \sin \phi \leq 1/4,$$

$$(7) \quad N_{\sigma_0}(\phi) \geq (1 + \sqrt{\sin \phi})^2 (1 + \sin \phi) / 2(1 - \sin \phi) \quad \text{si } \sin \phi \geq 1/4$$

(la formule (7) a été donnée par Sawicki [3]).

Avec le champ de vitesse de Prandtl de la figure 3 d

$$(8) \quad N_{\sigma_0}(\phi) \leq (1 + \sin \phi) \exp \left[\left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) \operatorname{tg} \phi \right],$$

en remarquant que dans ce champ de vitesse, les fonctions π^{hom} explicitées en (3) et (4) ne prennent des valeurs non nulles que dans les zones grisées et sur les lignes de discontinuité renforcées de la figure.

Les courbes correspondant à cet encadrement de $N_{\sigma_0}(\phi)$ sont représentées sur la figure 4 sur laquelle sont également reportés les résultats expérimentaux obtenus par Sawicki pour $\phi = 37^\circ$ que l'on a interprétés à travers la formule de superposition (5).

On remarque que ces résultats s'inscrivent parfaitement dans le faisceau ainsi délimité.

A titre de comparaison, ont été également représentés sur la figure 4 :

le faisceau obtenu si l'on suppose que les armatures peuvent également travailler en compression jusqu'à la limite σ_0 ;

la courbe en pointillé qui correspond à un calcul fait en supposant que les armatures confèrent au sol une cohésion isotrope égale à $\sigma_0(1 + \sin \phi) / 2 \cos \phi$. Ce dernier type de calcul conduit, ainsi que Stéfani et Long l'avaient déjà indiqué [7], à une estimation beaucoup trop optimiste de la capacité portante.

La position des points expérimentaux par rapport à ces deux dernières évaluations théoriques vient conforter la validité de l'approche par la méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture, et tend par ailleurs à prouver que l'hypothèse faite au départ rend bien compte du fonctionnement des armatures dans la terre armée.

Signalons que dans [8] Mangiavacchi et Pellegrini ont récemment étudié des résultats expérimentaux obtenus à l'appareil triaxial et conclu à la validité du critère proposé ici.

Il convient enfin d'indiquer qu'il est également possible de construire le critère de résistance d'un tel sol renforcé en supposant que l'interface entre sol et armatures n'est pas à adhérence parfaite. La formule de superposition (5) devra alors être modifiée.

Reçue le 26 décembre 1985.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J. SALENÇON, *Calcul à la rupture et analyse limite*, Presses de l'E.N.P.C., Paris, 1983.
- [2] P. DE BUHAN, Critère de rupture d'un matériau renforcé par armatures, *Comptes rendus*, 301, série II, 1985, p. 557-560.
- [3] A. SAWICKI, Plastic limit behavior of reinforced earth, *J. Geotechnical Division*, 109, n° 7, 1983, p. 1000-1005.
- [4] J. P. BOEHLER et A. SAWCZUK, Equilibre limite des sols anisotropes, *J. Mécan.*, 9, n° 1, 1970.
- [5] J. SALENÇON, Yield-strength of anisotropic soils, *Proc. XVIth I.C.T.A.M.*, Lyngby, Denmark, 1984, North Holland, p. 369-386.
- [6] J. SALENÇON, *Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols*, Eyrolles, Paris, 1973.
- [7] C. STÉFANI et N. T. LONG, Comportement de semelles sur un massif armé semi-infini, *C.R. Coll. Int. Renforcement des Sols*, I, Paris, 1979, p. 185-190.
- [8] R. MANGIAVACCHI et G. PELLEGRINI, *Analisi teorica del comportamento della terra armata mediante una procedura di omogeneizzazione*, Tesi di Laurea, Politecnico di Milano, 1985.

*Laboratoire de Mécanique des Solides,
E.N.P.C., E.M.P., École Polytechnique, UA n° 317, C.N.R.S.,
École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.*