

Une approche probabiliste du dimensionnement des structures par le calcul à la rupture

A probabilistic approach of the yield design of structures

par

A. CARMASOL* et J. SALENÇON**

RÉSUMÉ. — A partir de la théorie du calcul à la rupture on définit la probabilité de stabilité d'un système dont le dimensionnement est considéré comme aléatoire, soumis à un processus de chargement déterministe. La dualisation de cette approche fournit de manière cohérente la définition de la même probabilité de stabilité en considérant les mécanismes de ruine. Des approximations par défaut et par excès de cette probabilité sont données qui peuvent par exemple être calculées par simulation par des méthodes de Monte-Carlo. On définit les domaines de confiance en fixant, pour les chargements qui les constituent, un niveau minimum de la probabilité de stabilité du système, et on en établit les propriétés essentielles. Des exemples simples illustrent les concepts introduits, à propos desquels apparaît l'importance de la loi de probabilité choisie pour modéliser les caractéristiques de résistance du système, et en particulier la surestimation fréquente de la probabilité de stabilité liée à l'utilisation systématique de la loi normale.

ABSTRACT. — On the basis of the theory of yield design a definition is proposed for the probability of stability of a system with a stochastic design under a deterministic loading process. By dualizing this approach the consistent definition of the same probability through the consideration of the system's collapse mechanisms is obtained. Methods for evaluating the probability of stability (lower and upper bounds) are given. They can be applied for example through Monte-Carlo techniques. Safety domains for a given probability level are defined for the loadings, and their fundamental properties are presented. Simple examples illustrate the paper where the importance of the choice of the law of probability for modeling material characteristics clearly appears.

1. « Sécurité » et probabilité

Dans les normes et règlements de calculs utilisés pour le dimensionnement des structures, en particulier dans le domaine du génie civil, les ingénieurs ont depuis longtemps introduit des coefficients de sécurité. L'interprétation et la « philosophie » de ces coefficients sont loin d'être définitivement établies mais on peut les considérer comme la manifestation concrète, numérique, de la distance entre les problèmes pratiques posés et les problèmes modélisés auxquels la théorie mécanique permet d'apporter des réponses.

* Maître-assistant, Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex.

** Professeur, Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.

Certains auteurs (voir par exemple les travaux de Lévi [19, 20]) ont proposé de faire appel à la théorie des probabilités pour rationaliser ce concept de sécurité, notamment en se référant aux incertitudes sur les sollicitations imposées aux structures et sur les caractéristiques mécaniques des matériaux prises en compte dans les calculs. De nombreux travaux ont été faits dans cet esprit sans que se soit encore dégagée une démarche unitaire en ce qui concerne l'aspect proprement mécanique du problème. Prenant à titre d'exemple le cas des structures constituées de barres fléchies, on trouve pour la définition et l'évaluation de la « probabilité de ruine », des approches fondées sur un calcul élastique (Krée et Met [17], Parimi et Cohn [21]) et des approches fondées sur un calcul plastique (Frangopol et Nguyen Dang Hung [9], Parimi et Cohn [21]) tandis que Augusti et Baratta [1] et Gavarini [12] ont dégagé des concepts essentiels pour l'étude probabiliste de la ruine des structures, en se référant à l'analyse limite.

De plus la réflexion a aussi porté sur la signification même de l'application de la théorie des probabilités à ce type de problèmes. Des travaux tels que ceux de Krée et Trezos [18] considèrent que l'approche probabiliste des problèmes de résistance des structures de génie civil permet seulement de dégager des indices de sécurité pour les ouvrages étudiés.

Récemment la mise en forme de la théorie du calcul à la rupture [24] s'est attachée à distinguer, dans les résultats de l'analyse limite, les rôles respectifs des diverses hypothèses que celle-ci postule. On a montré qu'en s'appuyant uniquement sur la connaissance des capacités de résistance des matériaux constituant une structure donnée, on peut définir et déterminer le domaine des chargements pour lesquels il y a stabilité potentielle de la structure, et son complémentaire correspondant aux chargements pour lesquels la ruine de la structure est certaine.

L'étude présentée ici est menée dans le formalisme du calcul à la rupture. Laissant de côté, pour la simplification de l'exposé, le caractère aléatoire des sollicitations (sa prise en compte ne présente pas de difficulté particulière [2]), un modèle est construit, en supposant que les capacités de résistance des matériaux constitutifs de la structure dépendent d'un nombre fini de paramètres de dimensionnement aléatoires. On peut ainsi donner une définition précise de la probabilité de stabilité potentielle de l'ouvrage soumis à un chargement donné. On introduit alors la notion de domaines de confiance obtenus en cotant les chargements par leur niveau de probabilité de stabilité, et l'on expose les principales propriétés de ces domaines ainsi que des méthodes d'approche par l'intérieur et par l'extérieur. Les méthodes numériques de Monte-Carlo peuvent se révéler d'une grande utilité pratique; ici l'application d'une telle méthode à l'étude d'un exemple simple permet d'analyser le comportement de la probabilité de stabilité (potentielle) d'une structure selon le choix de la loi de probabilité adoptée pour les capacités de résistance de ses éléments constitutifs.

Il va de soi que, du point de vue mécanique, l'applicabilité de l'approche probabiliste présentée, tout comme celle de l'approche déterministe en calcul à la rupture, nécessite que la stabilité *potentielle* soit proche de la stabilité concrète et réelle de la structure [24]; dans le cas où les matériaux constitutifs ont un comportement parfaitement plastique obéissant au principe du travail plastique maximal il y a purement et simplement identité entre ces deux notions, la théorie du calcul à la rupture rejoignant celle de l'analyse limite; mais l'expérience montre que la théorie peut aussi être raisonnablement appliquée hors de cette hypothèse très forte sur le comportement des matériaux. Pour ce qui concerne la signification du modèle probabiliste lui-même on adopte le point de vue exposé plus haut, le but de l'étude étant de

construire une théorie mécaniquement cohérente pour que l'indice de sécurité correspondant puisse être significatif.

2. Dimensionnement déterministe en calcul à la rupture

2.1. HYPOTHÈSES

Le point de vue adopté ici a été exposé par Salençon [23, 24], en généralisation de celui de Gavarini [11].

On se place dans le cadre du formalisme du milieu continu tridimensionnel. On étudie un système de volume V fixé, soumis à un mode de chargement dépendant linéairement de n paramètres scalaires Q_i , composantes d'un vecteur chargement de \mathcal{R}^n .

Les capacités de résistance sont définies comme suit : soit $\{V_j\}_{j=1}^m$ une partition finie de V ; on suppose que dans chaque zone V_j le domaine admissible pour les contraintes en un point x est :

$$G(x, \alpha_j) = \alpha_j G_j(x), \quad \alpha_j \geq 0,$$

où $G_j(x)$ est un domaine donné fermé de \mathcal{R}^6 , qui n'est fonction que de x dans la zone V_j . On suppose de plus que tous les $G_j(x)$ contiennent l'état de contrainte nul et sont convexes.

Les capacités de résistance sont donc entièrement déterminées par la donnée des domaines de référence $G_j(x)$ et du m -uplet $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ que nous appellerons *vecteur dimensionnement du système*. Un champ de contrainte $\underline{\sigma}$ est alors dit *admissible pour le dimensionnement α* si et seulement si :

$$\underline{\sigma}(x) \in G(x, \alpha_j), \quad \forall x \in V_j, \quad \forall j = 1, \dots, m$$

ce que nous convenons de noter dorénavant :

$$\underline{\sigma}(x) \in G(x, \alpha), \quad \forall x \in V.$$

2.2. CHARGEMENTS POTENTIELLEMENT SUPPORTABLES

Soit α un dimensionnement fixé. On se retrouve alors dans les hypothèses de la théorie du calcul à la rupture [24], en considérant que les divers concepts introduits dans cette théorie sont indexés par le paramètre α .

Ainsi on définit le domaine $K(\alpha)$ des *chargements potentiellement supportables pour le dimensionnement α* par l'équivalence suivante :

$$(1) \quad K(\alpha) = \{ Q \mid \exists \underline{\sigma} \text{ S.A. } Q; \forall x \in V \underline{\sigma}(x) \in G(x) \} \quad (1).$$

On sait d'après la théorie du calcul à la rupture que, sous les hypothèses du paragraphe 2.1, $K(\alpha)$ est un *convexe contenant le chargement nul*. On peut ainsi, à l'aide de (1) déterminer un sous-ensemble de $K(\alpha)$: c'est *l'approche par l'intérieur par les contraintes*.

(1) $\underline{\sigma}$ S.A. Q : $\underline{\sigma}$ statiquement admissible, en équilibre avec Q .

On introduit aussi les fonctions suivantes définies en tout point x de chaque zone V_j ($j = 1, \dots, m$) par :

$$\begin{aligned}\pi_j(x; \underline{d}(x)) &= \text{Sup} \{ \underline{\sigma}(x) : \underline{d}(x) | \underline{\sigma}(x) \in G_j(x) \} \\ \pi_j(x; \mathbf{n}(x); \mathbf{V}(x)) &= \text{Sup} \{ \mathbf{V}(x) \cdot \underline{\sigma}(x) \cdot \mathbf{n}(x) | \underline{\sigma}(x) \in G_j(x) \} \quad (1)\end{aligned}$$

dans lesquelles $\underline{d}(x)$ est un tenseur symétrique, $\mathbf{n}(x)$ et $\mathbf{V}(x)$ deux vecteurs. (Ces fonctions dualisent la définition des capacités de résistance en chaque point.)

Soit alors \mathbf{v} un champ de vitesse et \underline{d} le champ de vitesse de déformation correspondant; on désigne par $[[\mathbf{v}(x)]]$ la discontinuité de \mathbf{v} au point x au franchissement d'une surface de discontinuité Σ de normale $\mathbf{n}(x)$ (la partie de Σ située dans une zone V_j sera notée Σ_j); on pose :

$$\mathbf{P}_j(\mathbf{v}) = \int_{V_j} \pi_j(x; \underline{d}(x)) dV + \int_{\Sigma_j} \pi_j(x; \mathbf{n}(x); [[\mathbf{v}(x)]]) d\Sigma$$

et on note $\mathbf{P}(\mathbf{v})$ le m -uplet :

$$\mathbf{P}(\mathbf{v}) = (P_1(\mathbf{v}), P_2(\mathbf{v}), \dots, P_m(\mathbf{v})).$$

On établit alors l'inclusion

$$(2) \quad \mathbf{K}(\alpha) \subset \{ \mathbf{Q} | \forall \mathbf{v} \text{ C.A. } \alpha \cdot \mathbf{P}(\mathbf{v}) - \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) \geq 0 \} \quad (2)$$

où $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{v})$ désigne le paramètre cinématique, fonction linéaire du champ \mathbf{v} , introduit dans la théorie des paramètres de chargement [23]. L'inclusion (2) est le fondement de l'approche par l'extérieur de $\mathbf{K}(\alpha)$ par les vitesses. L'égalité des deux membres de (2) est assurée sous certaines hypothèses [10].

Signalons enfin qu'il est commode, dans la pratique, d'introduire le concept de coefficient de rupture [24] : pour un système dont le dimensionnement α est fixé, le coefficient de rupture sous le chargement \mathbf{Q} est défini par :

$$(3) \quad F_\alpha(\mathbf{Q}) = \text{Sup} \{ \lambda | \lambda \mathbf{Q} \in \mathbf{K}(\alpha) \};$$

il indique, selon qu'il est supérieur ou inférieur à 1, que le système est ou n'est pas stable sous \mathbf{Q} . L'approche par l'extérieur du calcul à la rupture (2), sous les hypothèses énoncées dans [10] supposées désormais vérifiées, fournit pour $F_\alpha(\mathbf{Q})$ la formule :

$$(4) \quad F_\alpha(\mathbf{Q}) = \inf_{\mathbf{v} \text{ C.A.}} \left\{ \frac{\alpha \cdot \mathbf{P}(\mathbf{v})}{\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{v})} \mid \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) > 0 \right\}.$$

(1) Le symbole $:$ indique le produit doublement contracté
Le symbole \cdot indique le produit simplement contracté.

(2) C.A. : cinématiquement admissible.

2.3. DIMENSIONNEMENTS POTENTIELLEMENT STABLES

Si l'on adopte le point de vue « inverse » du précédent on peut, en s'appuyant sur les résultats ci-dessus, définir pour chaque chargement Q , le domaine $\Delta(Q)$ des dimensionnements potentiellement stables pour Q ([24], [2]), par l'équivalence :

$$\alpha \in \Delta(Q) \Leftrightarrow Q \in K(\alpha).$$

Compte tenu de cette définition, les formules (1) et (2) conduisent de façon évidente à des approches par l'intérieur et par l'extérieur de $\Delta(Q)$.

• Approche par l'intérieur

Pour un chargement Q et un champ de contrainte σ statiquement admissible avec Q donnés, on définit dans l'espace des dimensionnements l'ensemble :

$$B(Q, \sigma) = \{ \alpha \mid \sigma(x) \in G(x, \alpha), \forall x \in V \};$$

on montre alors que $\Delta(Q)$ peut s'écrire :

$$(5) \quad \Delta(Q) = \bigcup_{\sigma \text{ S.A. } Q} B(Q, \sigma).$$

• Approche par l'extérieur

Pour un chargement Q et un champ de vitesse v C.A., on définit le demi-espace :

$$A(Q, v) = \{ \alpha \mid \alpha \cdot P(v) - Q \cdot \dot{q}(v) \geq 0 \};$$

de (2) on déduit alors l'inclusion :

$$(6) \quad \Delta(Q) \subset \bigcap_{v \text{ C.A.}} A(Q, v).$$

L'égalité des deux membres de (6) est assurée sous les hypothèses énoncées dans [10].

La figure 1 schématise, dans le cas d'un dimensionnement dépendant de deux paramètres, les approches par l'intérieur et par l'extérieur de $\Delta(Q)$ issues des formules (5) et (6).

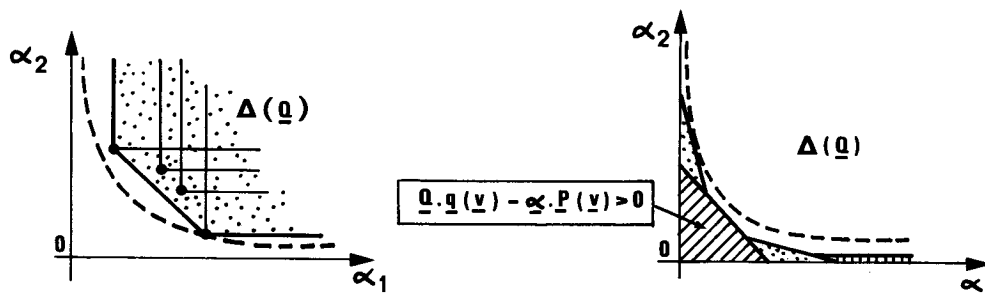


Fig. 1. — Approche par l'intérieur et par l'extérieur du domaine des dimensionnements potentiellement stables dans le cas $m = 2$.

Fig. 1. — Approaches from inside and from outside for the domain of potentially safe designs in the case $m = 2$.

2.4. STABILITÉ POTENTIELLE DANS L'ESPACE CHARGEMENT-DIMENSIONNEMENT

On peut aussi, suivant la démarche introduite par Gavarini et Veneziano [13], [14], puis généralisée dans [23], définir dans l'espace $\{ \mathbf{Q} \} \times \{ \boldsymbol{\alpha} \}$ le *domaine K de stabilité potentielle du système* par :

$$(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{K} \Leftrightarrow \mathbf{Q} \in \mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \in \Delta(\mathbf{Q}).$$

On démontre, dans les hypothèses du paragraphe 2.1, que \mathbf{K} est un *cône convexe issu de l'origine* [24], [2], pour lequel les formules (1) et (2) fournissent des approches par l'intérieur et par l'extérieur.

2.5. CONVENTION

On a déjà indiqué à la fin de la présentation de cette étude que l'applicabilité pratique de la théorie du calcul à la rupture suppose, bien évidemment, que la stabilité potentielle du système au sens indiqué ci-dessus ne soit pas trop éloignée de sa « stabilité effective ». Tirant avantage de cette remarque dans le but de simplifier le langage on conviendra dans toute la suite de laisser de côté les mentions « potentielle » et « potentiellement » dans la terminologie employée.

2.6. MILIEUX CONTINUS GÉNÉRALISÉS

Cette brève présentation de l'approche déterministe du dimensionnement en calcul à la rupture a été faite dans le cadre du formalisme du milieu continu tridimensionnel. Sa généralisation à d'autres types de formalismes ne présente pas de difficultés : milieux continus bidimensionnels pour les « problèmes plans », milieux continus généralisés, etc. C'est ainsi qu'il est possible d'appliquer les résultats ci-dessus au cas des structures formées de barres ou de poutres fléchies. Il en ira de même pour l'approche probabiliste dans la suite et les exemples étudiés porteront sur de telles structures.

3. Approche probabiliste

3.1. INTRODUCTION

Nous nous intéressons ici à un système dont seules les capacités de résistance sont aléatoires. En fait tous les résultats obtenus dans ce cas sont transposables au cas de systèmes dont les capacités de résistance sont déterministes soumis à un chargement aléatoire, et aussi au cas de systèmes pour lesquels capacités de résistance et chargement sont simultanément aléatoires. Ces deux dernières approches sont traitées en détail dans [2].

3.2. PROBABILITÉ DE STABILITÉ

Définition

On considère un système soumis à un chargement connu \mathbf{Q} , dont les capacités de résistance sont supposées aléatoires. Pour cela on s'appuie sur le point de vue développé au paragraphe 2.3.

On suppose que le dimensionnement est un *vecteur aléatoire*, c'est-à-dire que l'espace $\{\alpha\}$ est muni d'une *mesure de probabilité* μ_α .

Compte tenu de la signification de l'ensemble $\Delta(\mathbf{Q})$ on définit naturellement la *probabilité de stabilité du système sous le chargement donné* \mathbf{Q} par ([2], [3], [4]) :

$$(7) \quad P_s(\mathbf{Q}) = \mu_\alpha[\Delta(\mathbf{Q})].$$

Si α admet une *densité de probabilité* f_α , la formule (7) peut encore s'écrire :

$$P_s(\mathbf{Q}) = \int_{\Delta(\mathbf{Q})} f_\alpha(a) da.$$

Approches statiques et cinématiques

Il est clair d'après (7) que toute approche par l'intérieur de $\Delta(\mathbf{Q})$ conduit à une minoration de $P_s(\mathbf{Q})$, et que toute approche par l'extérieur conduit à une majoration. En particulier, si l'on considère l'expression (5), $P_s(\mathbf{Q})$ peut s'écrire :

$$P_s(\mathbf{Q}) = \mu_\alpha \left[\bigcup_{\sigma \text{ S.A. } \mathbf{Q}} B(\mathbf{Q}, \sigma) \right],$$

dont on déduit la minoration statique :

$$(8) \quad \sup_{\sigma \text{ S.A. } \mathbf{Q}} \mu_\alpha[B(\mathbf{Q}, \sigma)] \leq P_s(\mathbf{Q}).$$

De même, on déduit de (6) la majoration :

$$(9) \quad P_s(\mathbf{Q}) \leq \mu_\alpha \left[\bigcap_{v \text{ C.A.}} A(\mathbf{Q}, v) \right].$$

L'égalité dans (9) est assurée sous les hypothèses déjà signalées [10], qui sont en règle générale satisfaites pour les systèmes étudiés dans la pratique, et en particulier pour les structures dans le formalisme habituel.

On déduit de la formule (9) la majoration cinématique :

$$(10) \quad P_s(\mathbf{Q}) \leq \inf_{v \text{ C.A.}} \mu_\alpha[A(\mathbf{Q}, v)].$$

On peut donc résumer ainsi les résultats relatifs à la probabilité de stabilité du point de vue du calcul à la rupture, définie par (7); (on se place désormais dans les hypothèses, énoncées dans [10], où (9) est une égalité) :

$$(11) \quad \begin{aligned} \sup_{\sigma \text{ S.A. } \mathbf{Q}} \mu_\alpha[B(\mathbf{Q}, \sigma)] &\leq \mu_\alpha \left[\bigcup_{\sigma \text{ S.A. } \mathbf{Q}} B(\mathbf{Q}, \sigma) \right] = P_s(\mathbf{Q}) \\ P_s(\mathbf{Q}) &= \mu_\alpha \left[\bigcap_{v \text{ C.A.}} A(\mathbf{Q}, v) \right] \leq \inf_{v \text{ C.A.}} \mu_\alpha[A(\mathbf{Q}, v)]. \end{aligned}$$

Commentaires

L'examen des diverses publications consacrées à l'analyse probabiliste de la stabilité des structures montre qu'une difficulté essentielle, plus ou moins apparente, réside dans la

définition précise de l'événement dont on cherche à mesurer la probabilité. L'approche adoptée ici a conduit de façon naturelle et cohérente à la définition de la probabilité de stabilité (7), à sa minoration par voie statique (8), à sa dualisation (9) et à sa majoration par voie cinématique (10, 11).

A titre d'exemple, pour illustrer les concepts introduits ci-dessus on peut traiter le cas de la poutre continue à deux travées ABC (fig. 2), soumise à un chargement qui dépend du seul paramètre Q , et dont le dimensionnement dépend des deux paramètres α_1 et α_2 :

- le moment limite (en flexions positive et négative) dans chaque travée est :

$$m_j = \alpha_j m \quad j = 1, 2$$

où m est un moment de valeur fixée;

- on suppose que α_1 et α_2 sont deux variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, suivant une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ ($a > 0$).

La simplicité du système étudié et des données, permet d'effectuer complètement et explicitement toutes les opérations des formules (7, 8, 10 et 11). On constate sur les résultats représentés sur la figure 2 :

- que les valeurs de $P_s(Q)$ obtenues à partir de la définition (7) et de sa dualisation comme indiqué dans (9), sont égales et fournissent la valeur exacte;
- que les encadrements fournis par les formules (8) et (10) sont bien vérifiés et que la majoration cinématique est plus proche de la valeur exacte que la minoration statique.

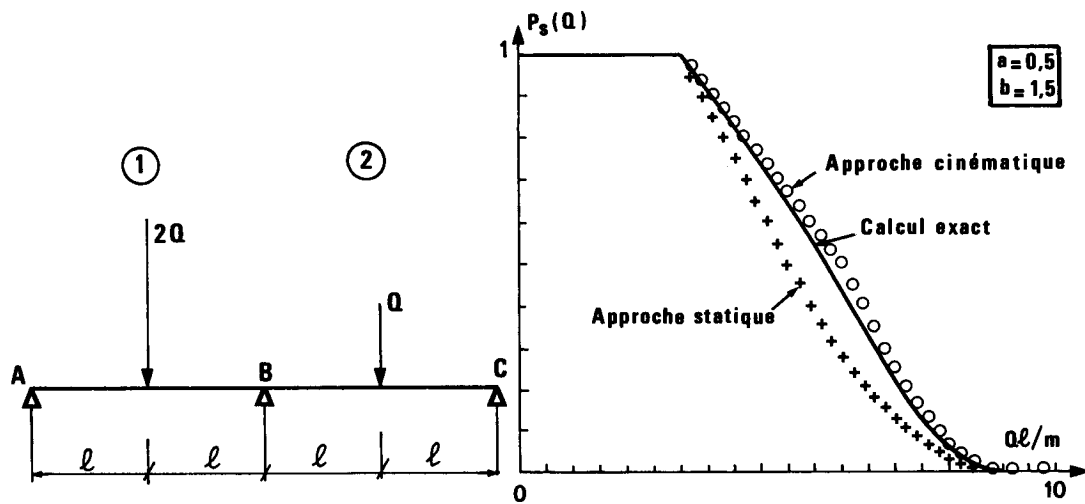


Fig. 2. — Poutre continue à deux travées; comparaison de $P_s(Q)$ et des approches statique et cinématique.

Fig. 2. — Two span continuous beam; comparison between $P_s(Q)$ and its static and kinematic approaches.

Ces résultats sont à rapprocher de l'étude faite par Parimi et Cohn [21] : cherchant à définir la probabilité de ruine pour une telle structure à partir des mécanismes de ruine

possibles, ces auteurs ont proposé une formule qui, avec les notations du présent article, reviendrait à mettre la probabilité de stabilité sous la forme :

$$P_s(Q) = \inf_{\nu \text{ C.A.}} \mu_\alpha[A(Q, \nu)].$$

On a vu par (10) que cette valeur n'est qu'une estimation par excès de la probabilité de stabilité, et la structure de la figure 2 fournit en quelque sorte un contre-exemple où il n'y a pas égalité dans (10); elle laisse aussi percevoir dans quelle mesure, suivant l'utilisation qui sera faite de la probabilité de stabilité notamment par le niveau de confiance (cf. § 3.4) qui sera fixé, on pourra utiliser cette approximation.

3.3. ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE DU COEFFICIENT DE RUPTURE

En reprenant la notion de coefficient de rupture introduite au § 2.2 par la formule (3) on voit que dans l'approche probabiliste où nous nous situons désormais, lorsque le dimensionnement α est un vecteur aléatoire, Q étant déterminé, $F_\alpha(Q)$ est une variable aléatoire. Sacchi [21] a établi un résultat concernant l'espérance mathématique de cette variable dans le cas d'un système à barres fléchies. Nous en donnons ici la généralisation.

On définit le « système moyen » associé au système étudié, comme le système déterministe de géométrie identique dont le dimensionnement est l'espérance mathématique du vecteur dimensionnement aléatoire α soit $E(\alpha)$. On note $F_{E(\alpha)}(Q)$ le coefficient de rupture de ce système sous le chargement Q .

En utilisant la linéarité de l'opérateur espérance mathématique on démontre alors [2] l'inégalité :

$$E(F_\alpha(Q)) \leq \inf_{\nu \text{ C.A.}} \left\{ \frac{E(\alpha) \cdot P(\nu)}{Q \cdot \dot{q}(\nu)} \mid Q \cdot \dot{q}(\nu) > 0 \right\}$$

dans laquelle $E(F_\alpha(Q))$ représente l'espérance mathématique de la variable aléatoire coefficient de rupture, et où le second membre n'est autre, d'après (4), que $F_{E(\alpha)}(Q)$.

D'où la majoration :

$$E(F_\alpha(Q)) \leq F_{E(\alpha)}(Q)$$

c'est-à-dire que l'espérance mathématique du coefficient de rupture du système sous un chargement donné est majorée par le coefficient de rupture du « système moyen » sous ce même chargement.

3.4. DOMAINES DE CONFIANCE

Définition. Propriétés

Le calcul à la rupture déterministe distingue comme on l'a vu au § 2.2, pour chaque dimensionnement α donné du système, les chargements (potentiellement) supportables, éléments de $K(\alpha)$, et ceux qui ne le sont pas, extérieurs à $K(\alpha)$.

On se propose, maintenant que le dimensionnement du système est aléatoire, de classer les chargements selon leur probabilité d'être (potentiellement) supportables.

Plus précisément on définit dans l'espace des chargements le *domaine de confiance au niveau de probabilité u* par :

$$(12) \quad K(\mu_\alpha, u) = \{ \mathbf{Q} \mid P_s(\mathbf{Q}) \geq u \}, \quad u \in [0, 1].$$

Moyennant quelques manipulations, on peut exprimer $K(\mu_\alpha, u)$ sous la forme :

$$(13) \quad K(\mu_\alpha, u) = \bigcup_{\substack{B \subset \{\alpha\} \\ \mu_\alpha(B) \geq u}} \left[\bigcap_{\alpha \in B} K(\alpha) \right]$$

qui permet d'établir les propriétés essentielles des domaines de confiance.

On démontre notamment que la famille $\{ K(\mu_\alpha, u) \}$ est décroissante (au sens de l'inclusion) en fonction du paramètre u , et que les domaines $K(\mu_\alpha, u)$ sont *étoilés par rapport à l'origine*, c'est-à-dire que :

$$\forall \lambda, \quad u \in [0, 1] \quad \mathbf{Q} \in K(\mu_\alpha, u) \Rightarrow \lambda \mathbf{Q} \in K(\mu_\alpha, u).$$

Mais, on remarque aussi que *la convexité de $K(\mu_\alpha, u)$ n'est pas assurée* en général. Nous exposerons plus loin un exemple de non-convexité.

Approches par l'intérieur et par l'extérieur

Il est clair d'après (12) que toute minoration de $P_s(\mathbf{Q})$ conduit à une approche par l'intérieur de $K(\mu_\alpha, u)$, et que toute majoration de $P_s(\mathbf{Q})$ conduit à une approche par l'extérieur de $K(\mu_\alpha, u)$. En particulier on déduit de (8) l'approche par l'intérieur statique :

$$(14) \quad \sup_{\sigma \text{ S.A. } \mathbf{Q}} \mu_\alpha[B(\mathbf{Q}, \sigma)] \geq u \Rightarrow \mathbf{Q} \in K(\mu_\alpha, u).$$

En remarquant que :

$$\sup_{\sigma \text{ S.A. } \mathbf{Q}} \mu_\alpha[B(\mathbf{Q}, \sigma)] \geq u \Leftrightarrow \exists \sigma \text{ S.A. } \mathbf{Q}, \quad \mu_\alpha[B(\mathbf{Q}, \sigma)] \geq u,$$

on peut écrire (14) sous la forme équivalente :

$$(15) \quad \bigcup_{\sigma \text{ S.A. } \mathbf{Q}} \{ \mathbf{Q} \mid \mu_\alpha[B(\mathbf{Q}, \sigma)] \geq u \} \subset K(\mu_\alpha, u);$$

elle exprime qu'à tout champ de contrainte σ statiquement admissible, en équilibre avec \mathbf{Q} , on peut associer un domaine $\{ \mathbf{Q} \mid \mu_\alpha[B(\mathbf{Q}, \sigma)] \geq u \}$ contenu dans $K(\mu_\alpha, u)$, et que la réunion de tous ces domaines constitue une approximation par l'intérieur de $K(\mu_\alpha, u)$.

De même on déduit de (10) l'approche par l'extérieur cinématique :

$$(16) \quad \mathbf{Q} \in K(\mu_\alpha, u) \Rightarrow \inf_{v \text{ C.A.}} \mu_\alpha[A(\mathbf{Q}, v)] \geq u.$$

En remarquant que :

$$\inf_{v \text{ C.A.}} \mu_\alpha[A(\mathbf{Q}, v)] \geq u \Leftrightarrow \forall v \text{ C.A.}, \quad \mu_\alpha[A(\mathbf{Q}, v)] \geq u,$$

on peut écrire (16) sous la forme équivalente :

$$(17) \quad K(\mu_\alpha, u) \subset \bigcap_{v \text{ C.A.}} \{ \mathbf{Q} \mid \mu_\alpha[A(\mathbf{Q}, v)] \geq u \};$$

elle exprime qu'à tout champ de vitesse v cinématiquement admissible, on peut associer un domaine $\{ Q \mid \mu_\alpha[A(Q, v)] \geq u \}$ contenant $K(\mu_\alpha, u)$, et que l'intersection de tous ces domaines constitue une approche par l'extérieur de $K(\mu_\alpha, u)$.

Il est important de remarquer que (16) et (17) conduisent l'une et l'autre à des approximations convexes de $K(\mu_\alpha, u)$.

L'exemple d'une structure réticulée simple, étudié dans [2], permet d'appréhender concrètement les notions précédentes : la structure de la figure 3 est composée de trois barres articulées dont les limites de résistance (en traction et en compression) sont définies par :

$$L_j = \alpha_j L \quad \alpha_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$$

L étant une force de valeur fixée.

Le vecteur dimensionnement de cette structure est :

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Le chargement, déterministe, dépend de deux paramètres H et V , composantes de la force appliquée au sommet de la structure :

$$Q = (H, V).$$

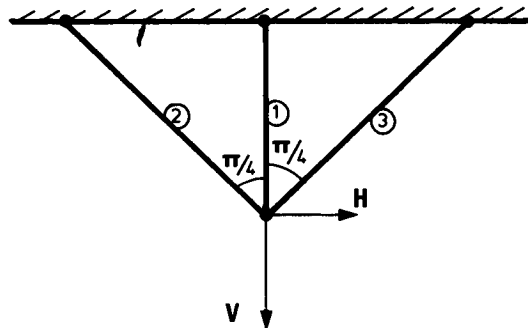


Fig. 3. — Exemple de structure réticulée.

Fig. 3. — Truss structure.

Un chargement Q étant donné, le domaine $\Delta(Q)$ des dimensionnements stables peut être construit par l'intérieur ou par l'extérieur, ces deux approches conduisant au même résultat; $\Delta(Q)$ est défini par le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 \geq \frac{\sqrt{2}}{L} |H| \\ \alpha_1 + \sqrt{2}\alpha_2 \geq \frac{1}{L} |V + H| \\ \alpha_1 + \sqrt{2}\alpha_3 \geq \frac{1}{L} |V - H|. \end{cases}$$

On suppose que α est un vecteur aléatoire dont les composantes sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes définies comme suit :

$$\begin{cases} \text{Prob} [\alpha_j = \alpha_j^1] = 1/2 \\ \text{Prob} [\alpha_j = \alpha_j^2] = 1/2 \end{cases}, \quad j = 1, 2, 3.$$

α est donc un vecteur aléatoire pouvant prendre 8 valeurs équiprobables :

$$\text{Prob} [\alpha = \alpha^k] = 1/8, \quad k = 1, 2, \dots, 8;$$

La mesure μ_α est ainsi une mesure discrète.

Il est alors aisé, \mathbf{Q} étant donné, de déterminer $P_s(\mathbf{Q})$; on a :

$$(18) \quad P_s(\mathbf{Q}) = \frac{N(\mathbf{Q})}{8}$$

où $N(\mathbf{Q})$ désigne le nombre de vecteurs α^k contenus dans $\Delta(\mathbf{Q})$.

Il est par conséquent possible de tracer exactement les domaines de confiance $K(\mu_\alpha, k/8)$, où k est un entier compris entre 1 et 8.

Donnant aux variables aléatoires α_j les valeurs équiprobables suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_1^1 = 1 & \alpha_1^2 = 2 \\ \alpha_2^1 = \sqrt{2} & \alpha_2^2 = 2\sqrt{2} \\ \alpha_3^1 = \sqrt{2} & \alpha_3^2 = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

on a déterminé et tracé sur la figure 4 le domaine $K(\mu_\alpha, 1/4)$ obtenu exactement à partir de la formule (18), qui correspond à l'approche par l'intérieur (14 ou 15). On a aussi représenté sur

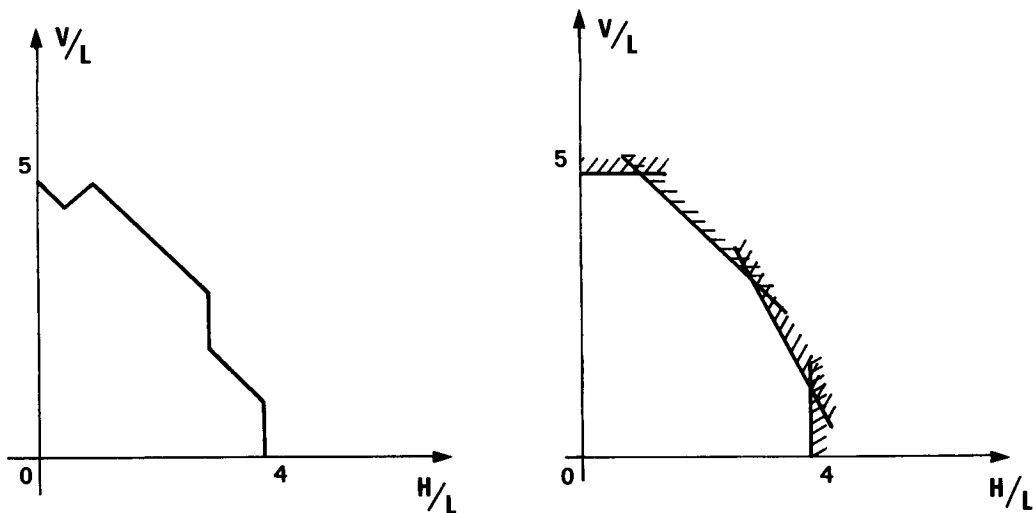


Fig. 4. — Domaine $K(\mu_\alpha, 1/4)$ et approche par l'extérieur de celui-ci pour la structure réticulée de la figure 3.

Fig. 4. — Domain $K(\mu_\alpha, 1/4)$ and its approach from outside for the truss at figure 3.

la même figure le résultat obtenu par l'approche par l'extérieur correspondant aux formules (16 ou 17). En fait ces domaines étant symétriques par rapport aux axes de coordonnées on ne les a représentés que dans le premier quadrant.

On remarque :

- que le domaine de confiance $K(\mu_\alpha, 1/4)$ est étoilé par rapport à l'origine mais qu'il n'est pas convexe;
- que l'approche par l'extérieur donnée par (16 ou 17) est convexe et n'est autre, dans ce cas, que l'enveloppe convexe du domaine $K(\mu_\alpha, 1/4)$.

La figure 5 présente les huit domaines $K(\mu_\alpha, k/8)$, $k = 1, \dots, 8$, obtenus exactement à partir de la formule (18) pour la structure de la figure 3.

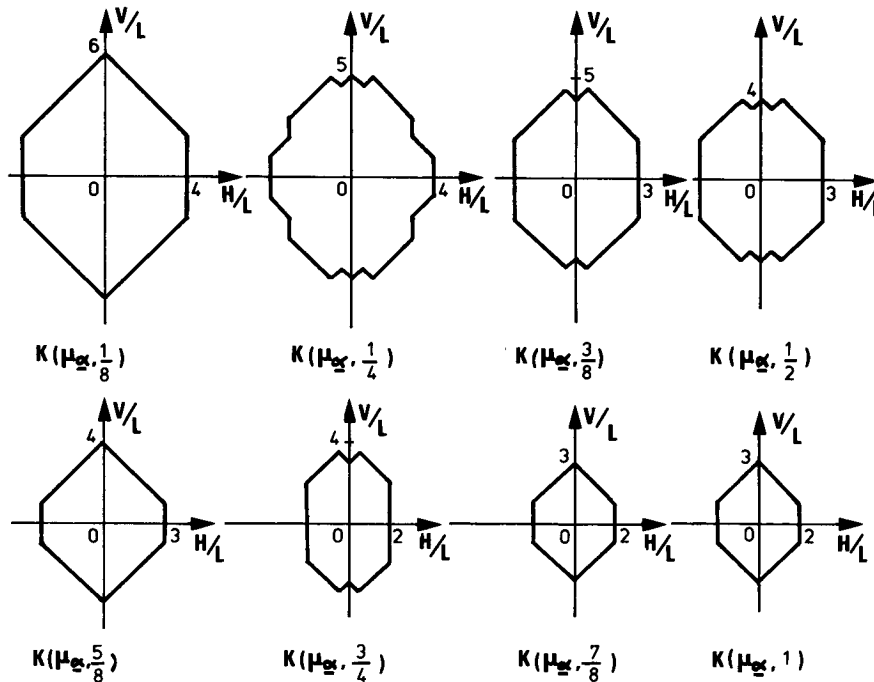


Fig. 5. — Domaines $K(\mu_\alpha, k/8)$, $k = 1, \dots, 8$, pour la structure de la figure 3.

Fig. 5. — Domains $K(\mu_\alpha, k/8)$, $k = 1, \dots, 8$, for the truss at figure 3.

3.5. UTILISATION D'UNE MÉTHODE DE MONTE-CARLO

La simplicité de l'exemple traité au § 3.2 (fig. 2) a permis d'en faire l'étude analytique complète explicite mais, dans la pratique, on a bien souvent affaire à des situations plus complexes qui rendent impossible un tel traitement.

En effet, les diverses expressions (exactes ou approchées) de la probabilité de stabilité potentielle font apparaître une intégration sur un domaine de l'espace à m dimensions des

paramètres α_j . Cette intégration peut rarement être faite analytiquement, même pour les lois de probabilité les plus courantes. On est ainsi amené à faire appel à des méthodes d'intégration numérique. Les méthodes de Monte-Carlo ([16], [25]) sont ici particulièrement intéressantes par leur aspect probabiliste, et par l'avantage qu'elles présentent sur les méthodes classiques d'intégration numérique lorsque l'ordre de multiplicité de l'intégrale est grand.

Le principe du calcul approché de $P_s(Q)$ par une méthode de Monte-Carlo est le suivant. On suppose que l'on est capable de *simuler* la loi de probabilité du vecteur dimensionnement α . Cela signifie que l'on dispose d'un échantillon $\{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^N\}$ pouvant être considéré comme une suite de réalisations du vecteur aléatoire α . Soit $N_s(Q, N)$ le nombre de vecteurs α^i de l'échantillon appartenant à $\Delta(Q)$. On montre alors à l'aide de la loi des grands nombres que le rapport $N_s(Q, N)/N$ tend en probabilité vers $P_s(Q)$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Afin d'illustrer cette méthode de simulation et d'évaluer la qualité des résultats qu'elle permet d'obtenir, on l'a utilisée sur l'exemple de la figure 2 avec les mêmes données (α_1 et α_2 variables indépendantes uniformément distribuées sur l'intervalle $[a, b]$), en considérant deux échantillons $\{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^N\}$: $N = 100$ et $N = 1000$. Les résultats sont représentés sur la figure 6 et sont comparés à la courbe donnant la valeur exacte de $P_s(Q)$ en fonction de Ql/m déterminée analytiquement (cf. § 3.2). On constate que l'écart par rapport au calcul exact est de l'ordre de 3 % pour une taille d'échantillon de 100, de 0,7 % pour une taille d'échantillon de 1000.

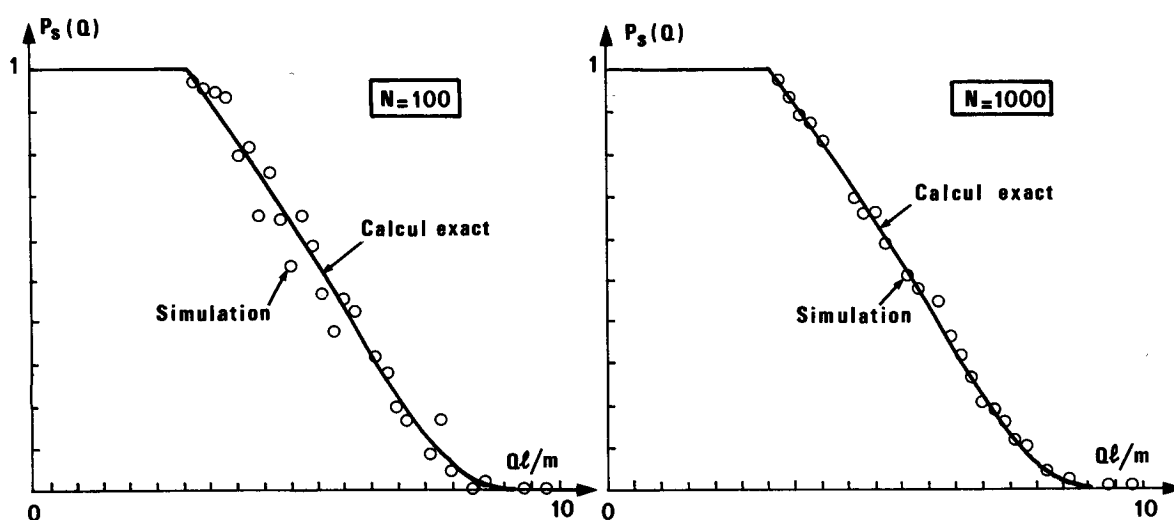


Fig. 6. — Calcul approché de $P_s(Q)$ pour la structure de la figure 2 par une méthode de simulation de Monte-Carlo (α_1 et α_2 variables indépendantes uniformément distribuées).

Fig. 6. — Evaluations of $P_s(Q)$ for the structure at figure 2, by means of Monte-Carlo techniques (α_1 and α_2 are uniformly distributed independent variables).

La qualité des résultats obtenus par cette simulation laisse à penser que la méthode peut valablement être employée avec d'autres lois de probabilité pour le vecteur aléatoire α . C'est ainsi que, pour la même structure de la figure 2 soumise au même chargement, on a procédé à la détermination de $P_s(Q)$ par simulation de Monte-Carlo en supposant pour α_1 et α_2 ,

variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, les lois de probabilité suivantes :

- loi normale.
- loi de Gumbel [15],

ajustées de façon à avoir même moyenne et même écart-type que la loi uniforme utilisée auparavant.

Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 7 où ils sont comparés à celui correspondant à la distribution uniforme.

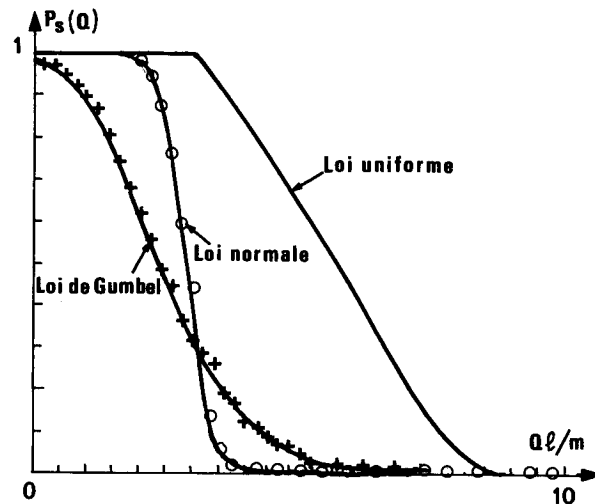


Fig. 7. — Calcul approché de $P_s(Q)$ pour la structure de la figure 2 par simulation, pour diverses lois de probabilité sur α_1 et α_2 .

Fig. 7. — Evaluations of $P_s(Q)$ for the structure at figure 2, by means of Monte-Carlo techniques for various laws of probability.

On remarque notamment :

- que $P_s(Q)$ décroît très brusquement de 1 à 0 lorsque Q augmente, dans le cas de la loi normale, alors que cette décroissance est plus progressive dans le cas de la loi uniforme; cela peut s'interpréter par le fait que la densité d'une loi normale est concentrée autour de la valeur moyenne, alors que la densité d'une loi uniforme est étalée;
- que pour les niveaux de probabilité élevés (qui sont ceux qui intéressent le praticien), le résultat obtenu à partir de la loi normale est plus optimiste que celui fourni par la loi de Gumbel.

Cette dernière constatation, quoique ponctuelle sur un exemple élémentaire, peut constituer une mise en garde contre un emploi trop systématique de la loi normale.

En effet il est courant que la loi normale soit utilisée pour décrire, en termes de variables aléatoires, les caractéristiques mécaniques des matériaux; l'habitude, et certaines considérations théoriques exactes mais pas toujours pertinentes, viennent justifier cet emploi malgré des distorsions parfois significatives entre les modélisations ainsi construites et les résultats expérimentaux. Les lois de valeurs extrêmes [15, 26, 27], dont la loi de Gumbel est un exemple, apparaissent dans certains cas comme mieux adaptées à la description des

résultats expérimentaux (cf. Davin [5]). De plus le résultat obtenu ci-dessus, qui rejoint ceux de Fauchon et col. [8] pour des problèmes différents de fiabilité de structures, montre que les évaluations de la probabilité de stabilité faites à partir de la loi de Gumbel vont significativement dans le sens de la sécurité par rapport à celles obtenues à partir de la loi normale, pour les niveaux de probabilité élevés. Cela implique corrélativement qu'une utilisation mal fondée de la loi normale peut conduire à une surestimation importante de la probabilité de stabilité de la structure.

Il convient enfin de rappeler, à propos de l'emploi des méthodes de Monte-Carlo, qu'elles s'appuient sur la simulation de la loi de probabilité du vecteur aléatoire α et que ceci ne nécessite nullement l'indépendance des variables aléatoires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

4. Conclusion

Fondée sur la théorie du calcul à la rupture, l'étude présentée ici propose une définition précise de la probabilité de stabilité d'un système dont les capacités de résistance dépendent d'un nombre fini de paramètres aléatoires. La dualisation de cette approche fournit de façon cohérente la définition de la probabilité de stabilité à partir de la considération des mécanismes de ruine du système.

On en déduit les méthodes d'approximation par défaut et par excès de la probabilité de stabilité, pour lesquelles l'emploi de méthodes de Monte-Carlo peut se révéler très efficace.

Les domaines de confiance qui ont été introduits dans l'espace des paramètres de chargement, et dont on a présenté certaines propriétés essentielles, ont pour le calcul des systèmes dont le dimensionnement est aléatoire, l'utilisation homologue de celle des domaines $K(\alpha)$ pour les systèmes à dimensionnement déterministe : on retiendra toutefois qu'ils ne sont pas (nécessairement) convexes bien que les $G_i(x)$ soient supposés convexes.

Tous ces résultats explicitent les divers aspects de la construction et de l'évaluation de la capacité de résistance probabiliste du système étudié, à partir de la donnée des capacités de résistance aléatoires des éléments constitutifs. De ce point de vue ils pourraient être utilisés dans une approche probabiliste de la résistance d'un matériau par un processus de changement d'échelle (passage « micro-macro »).

L'étude faite et les résultats présentés sont transposables aux cas de systèmes pour lesquels les capacités de résistance sont fixées de façon déterministe, soumis à un chargement aléatoire, ou aux cas de systèmes pour lesquels capacités de résistance et chargement sont simultanément aléatoires. Au lieu de travailler à partir du domaine $\Delta(S)$, il suffit de travailler à partir du domaine $K(\alpha)$ pour le premier cas, ou K pour le deuxième (il est d'ailleurs à remarquer que l'analyse ne nécessite pas l'indépendance entre les variables aléatoires du chargement et celles du dimensionnement).

Nous avons été amenés, afin d'énoncer des résultats précis, à restreindre le cadre de travail en ne considérant que des systèmes décrits par un nombre fini de paramètres de dimensionnement. Pourtant, même si en l'état actuel la partition du système en un nombre fini de zones semble exclure le cas du milieu continu, on peut envisager d'effectuer pour un tel problème un calcul approché, basé sur la modélisation proposée, moyennant une discrétisation préalable du système; on peut se référer à ce propos aux travaux de Dolinski et Sawczuk [6, 7].

RÉFÉRENCES

- [1] AUGUSTI G., BARATTA A., *Theory of probability and limit analysis of structures under multi-parameter loading* (Foundations of Plasticity, Warsaw, august 30, sept. 2, ed. A. SAWCZUK, 1972, pp. 347-364).
- [2] CARMASOL A., *Approche probabiliste du calcul à la rupture*. Thèse Docteur-Ingénieur, ENPC, Paris, 1983.
- [3] CARMASOL A., SALENÇON J., *Approche probabiliste de la résistance des structures*. 6^e Congrès Français de Mécanique, Lyon, 5-9 sept. 1983.
- [4] CARMASOL A., *Dimensionnement probabiliste en calcul à la rupture* (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 297, série II, 1983, pp. 181-184).
- [5] DAVIN, *Études statistiques sur la résistance des corps prismatiques soumis à des champs de contraintes uniformes* (Annales des Ponts et Chaussées, n° 6, 1956, n^{os} 1 et 2, 1957).
- [6] DOLIŃSKI K., *A model of stochastic non-homogeneity of soil and its application in the limit analysis*. EUROMECH 134, Design against failure in soils, 1980.
- [7] DOLIŃSKI K., SAWCZUK A., *Probabilistic limit analysis of plates on plastic subgrade* (Proceedings – Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, 2nd International Conference 15th-18th sept. 1975, Aachen, F. R. Germany, vol. III, 1975, pp. 185-205).
- [8] FAUCHON J., HERBIN G., RATTANA S., *Approche probabiliste de la résistance des ressorts hélicoïdaux. Lois de probabilité suivies par le coefficient de correction de contrainte et la contrainte maximale de cisaillement*. 6^e Congrès Français de Mécanique. Lyon, 5-9 sept. 1983.
- [9] FRANGOPOL D., NGUYEN DANG HUNG, *Calcul plastique probabiliste des structures en acier formées de barres* (Construction métallique, n° 1, 1977, pp. 19-43).
- [10] FRÉMOND M., FRIAÀ A., *Analyse limite. Comparaison des méthodes statique et cinématique* (C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286, série A, 1978, pp. 107-110).
- [11] GAVARINI C., *L'analyse limite des structures au moyen de la programmation mathématique*. Séminaire « Plasticité et Viscoplasticité », 1972, École Polytechnique, Paris, Ediscience, 1974, pp. 231-250.
- [12] GAVARINI C., *Aspect probabiliste de la rupture*. « Évolution et théories modernes en élasticité et plasticité », Saint-Rémy-lès-Chevreuse, 12-15 déc. 1977, CISCO, 1977, pp. 131-157.
- [13] GAVARINI C., VENEZIANO D., *Calcolo a rottura e programmazione stocastica* (Giornale del Genio Civile, n° 4, 1970).
- [14] GAVARINI C., VENEZIANO D., *On the safety domain of structures*. 1^{re} Conf. Nat. Italienne de méca. theor. et appl., Udine, juin 1971.
- [15] GUMBEL E. J., *Statistics of extremes*. Columbia University Press, New York, 1958.
- [16] HAMMERSLEY J. M., HANDSCOMB D. C., *Les méthodes de Monte-Carlo*. Dunod, Paris, 1967.
- [17] KRÉE P., MET P.-N., *Probabilité de ruine des structures élastiques* (Construction Métallique, n° 4, 1973, pp. 49-60).
- [18] KRÉE P. et TREZOS C., *Une méthode pour aider à l'analyse et à l'amélioration des codes de construction* (Annales de l'ITBTP, vol. 216, mai 1978, pp. 66-90).
- [19] LÉVI R., *Calculs probabilistes de la sécurité des constructions* (Annales des Ponts et Chaussées, vol. 119, juil.-août 1949, pp. 493-539).
- [20] LÉVI R., *Suggestions relatives à quelques problèmes de résistance des constructions* (Annales de l'ITBTP, mars-avril 1950).
- [21] PARIMI S. R., COHN M. Z., *Optimal solutions in probabilistic structural desing* (J. Mécanique Appliquée, vol. 2, n° 1, 1978, pp. 47-92).
- [22] SACCHI G., *Étude probabiliste des structures élastoplastiques*. Séminaire CTICM sur le Calcul aux États Limites des Structures à Barres, Puteaux, 8-12 oct. 1973.
- [23] SALENÇON J., *Optimisation des structures par le calcul aux états limites*. « Les méthodes d'optimisation dans la construction », séminaire UTI-CISCO, 1973, Eyrolles, Paris, 1975, pp. 117-124.
- [24] SALENÇON J., *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'ENPC, Paris, 1983.
- [25] SHREIDER Yu. A., *The Monte-Carlo method*. Pergamon Press, 1966.
- [26] WEIBULL W., *A statistical Theory of the Strength of Materials* (Ing. Vet. Ak. Handl., n° 151, Stockholm, 1939).
- [27] WEIBULL W., *A statistical Distribution Function of Wide Applicability* (J. of Applied Mechanics, sept. 1951, pp. 293-297).

(Manuscrit reçu le 9 juillet 1984,
accepté le 2 janvier 1985.)