

## APPROCHE PROBABILISTE DE LA RÉSISTANCE DES STRUCTURES

Alain CARMASOL, Jean SALENÇON -

LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLIDES  
ECOLE POLYTECHNIQUE  
91128 PALAISEAU CEDEX  
(France)

On étudie par la théorie du calcul à la rupture le problème de la stabilité d'ouvrages avec prise en compte d'aspects probabilistes, tant au niveau des chargements qu'au niveau des capacités de résistance.

On s'intéresse aux systèmes formés d'un nombre fini de zones dans lesquelles le domaine de résistance du matériau constitutif varie en chaque point de façon homothétique proportionnellement à un unique paramètre de dimensionnement : l'ensemble des paramètres correspondant constitue le vecteur dimensionnement du système, noté  $\alpha$ .

Par ailleurs, le mode de chargement dépend linéairement d'un nombre fini de paramètres scalaires, composantes du vecteur chargement, noté  $Q$ .

On sait que la théorie du calcul à la rupture permet de définir le concept de stabilité potentielle d'un système. On aboutit ainsi, selon le point de vue adopté :

- . au domaine  $K(\alpha)$  des chargements potentiellement supportables pour un dimensionnement donné ;
- . au domaine  $\Delta(Q)$  des dimensionnements potentiellement stables pour un chargement donné ;
- . au domaine  $K$  de stabilité potentielle, défini dans l'espace chargement-dimensionnement.

Ceux-ci peuvent être approchés par l'intérieur par voie statique, ou par l'extérieur par voie cinématique.

Lorsque le chargement et/ou les capacités de résistance sont aléatoires, on ne peut plus fournir de réponse déterministe au problème de la stabilité potentielle d'un système. On introduit alors la notion de probabilité de stabilité potentielle, avec les définitions suivantes :

1- Si le dimensionnement est un vecteur aléatoire et le chargement un vecteur déterministe :

Dans ce cas, l'espace  $(\mathbb{R}_+)^m$  des paramètres de dimensionnement est muni d'une mesure de probabilité  $\mu_\alpha$ .

On définit alors la probabilité de stabilité potentielle sous un chargement  $\underline{Q}$  donné,  $P_s(\underline{Q})$ , par :

$$P_s(\underline{Q}) = \mu_{\underline{\alpha}} [ \Delta(\underline{Q}) ] \quad .$$

2- Si le chargement est un vecteur aléatoire et le dimensionnement un vecteur déterministe :

Dans ce cas, l'espace  $\mathcal{R}^n$  des paramètres de chargement est muni d'une mesure de probabilité  $\mu_{\underline{Q}}$  .

On définit alors la probabilité de stabilité potentielle du système dans un dimensionnement donné  $\underline{\alpha}$ ,  $P_s(\underline{\alpha})$ , par :

$$P_s(\underline{\alpha}) = \mu_{\underline{Q}} [ K(\underline{\alpha}) ] \quad .$$

3- Si le couple chargement-dimensionnement est un vecteur aléatoire défini par sa loi de probabilité conjointe :

Dans ce cas, l'espace  $\mathcal{R}^n \times (\mathcal{R}_+)^m$  est muni d'une mesure de probabilité  $\mu(\underline{Q}, \underline{\alpha})$  .

On définit alors la probabilité de stabilité potentielle du système,  $P_s$ , par :

$$P_s = \mu(\underline{Q}, \underline{\alpha}) [ K ] \quad .$$

Ces probabilités peuvent être approchées par voies statiques et cinématiques par des méthodes homologues de celles développées en Calcul à la Rupture déterministe. On peut aussi mettre en oeuvre une méthode d'approximation numérique du type Monte-Carlo.

Les résultats sont donnés ci-dessous dans le cas où seul le vecteur dimensionnement est aléatoire, mais la démarche est tout à fait analogue dans les deux autres cas.

#### . Approche statique :

On montre qu'à tout champ de contrainte statiquement admissible  $\underline{\sigma}$  on peut associer un ensemble  $B(\underline{Q}, \underline{\sigma})$  dans l'espace des dimensionnements dont la mesure est un minorant de  $P_s(\underline{Q})$ . On en déduit que :

$$\sup_{\underline{\sigma} \text{ S.A.}} \mu_{\underline{\alpha}} [ B(\underline{Q}, \underline{\sigma}) ] \leq P_s(\underline{Q}) \quad .$$

#### . Approche cinématique :

On montre qu'à tout champ de vitesse cinématiquement admissible  $\underline{v}$  on peut associer un demi-espace  $A(\underline{Q}, \underline{v})$  dans l'espace des dimensionnements dont la mesure est un majorant de  $P_s(\underline{Q})$ . On en déduit que :

$$P_s(\underline{Q}) \leq \inf_{\underline{v} \text{ C.A.}} \mu_{\underline{\alpha}} [ A(\underline{Q}, \underline{v}) ] \quad .$$

#### . Méthode de Monte-Carlo :

On suppose que l'on est capable de simuler la loi de probabilité du vecteur dimensionnement, c'est-à-dire que l'on dispose d'un échantillon représentatif du vecteur aléatoire  $\underline{\alpha}$  .

Soient  $N$  la taille de l'échantillon, et  $N_s(Q, N)$  le nombre de vecteurs  $\alpha^i$  de l'échantillon appartenant à  $\Delta(Q)$ .

On montre alors que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N_s(Q, N)}{N} = P_s(Q)$$

Les diverses approches exposées peuvent être illustrées sur l'exemple suivant :

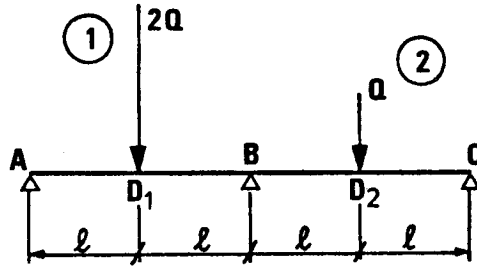


Figure 1 : Structure étudiée.

On considère la poutre à deux travées représentée sur la figure 1.

Le chargement déterministe dépend d'un paramètre  $Q \geq 0$ . Le moment limite en flexions positive et négative dans chaque travée, repérée par l'indice  $i$ , est de la forme :

$$m_i = \alpha_i m, \quad i = 1, 2, \quad m > 0$$

Les paramètres de dimensionnement  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

Nous avons représenté sur la figure 2 les résultats obtenus pour une loi uniforme sur un intervalle  $(1/2, 3/2)$ . Dans ce cas, l'écart par rapport à la valeur exacte de  $P_s(Q)$  est en moyenne de l'ordre de 2% pour l'approche cinématique, de 9% pour l'approche statique.

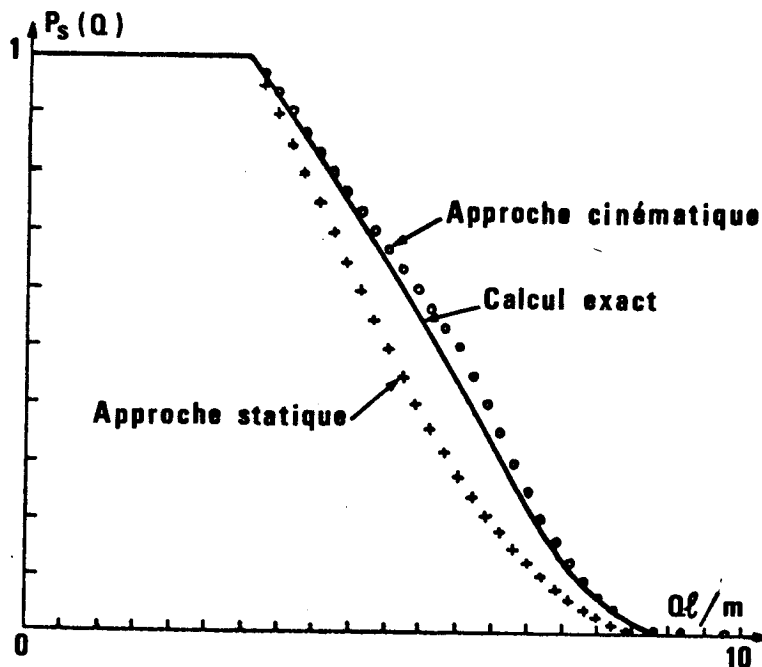


Figure 2 : Comparaison de  $P_s(Q)$  et des approches statique et cinématique.

Nous avons représenté sur la figure 3 un exemple de comparaison des courbes  $P_s(Q)$  en fonction de  $Q$  tracée exactement pour une loi uniforme, et obtenues à partir d'une simulation (taille d'échantillon = 10000) pour une loi normale et pour une loi de Gumbel, de même moyenne et de même écart type.

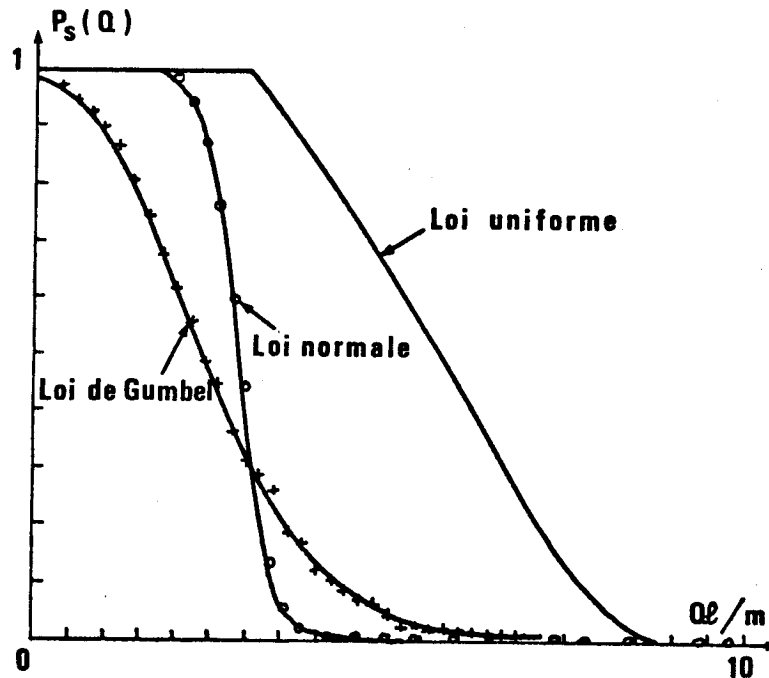


Figure 3 : Comparaison entre plusieurs lois.

Nous constatons notamment sur cet exemple que pour des niveaux de probabilité élevés, la loi normale conduit à un résultat plus optimiste que la loi de Gumbel.

#### Références :

- AUGUSTI G., BARATTA A., (1972), Theory of probability and limit analysis of structures under multi-parameter loading, Foundations of Plasticity, Warsaw, August 30, Sept. 2, Ed. A. Sawczuk, pp. 347-364.
- CARMASOL A., (1983), Approche probabiliste du calcul à la rupture, Thèse Docteur-Ingénieur, E.N.P.C., Paris.
- DAVIN, (1956-1957), Etudes statistiques sur la résistance des corps prismatiques soumis à des champs de contraintes uniformes, Annales des Ponts et Chaussées, n° 6, 1956, n° 1 et n° 2, 1957.
- GAVARINI C., (1977), Aspects probabilistes de la rupture, "Evolution et théories modernes en élasticité et plasticité", Saint-Rémy-lès-Chevreuse, 12-15 Déc. 1977, CISCO, pp. 131-157.
- PARIMI S.R., COHN M.Z., (1978), Optimal solutions in probabilistic structural design, J. Mécanique Appliquée, vol. 2, n° 1, pp. 47-92.
- SALENÇON J., (1975), Optimisation des structures par le calcul aux états limites, "Les méthodes d'optimisation dans la construction", séminaire UTI-CISCO, 1973, Eyrolles, Paris, pp. 117-124.
- SALENÇON J., (1982), Calcul à la rupture et Analyse limite, cours ENPC, Paris.