

**CONFERENCIA INTERNACIONAL  
DE MECANICA DE SUELOS**

**INTERNATIONAL CONFERENCE  
OF SOIL MECHANICS**

**CONFERENCE INTERNATIONALE  
DE MECANIQUE DES SOLS**

*Calcul à la rupture  
en Mécanique des Sols*

Jean Salençon

**M E X I C O**

sociedad mexicana de mecánica de suelos, a. c.

REUNION CONMEMORATIVA

1957 - 1982

## CALCUL A LA RUPTURE EN MECANIQUE DES SOLS

Jean Salençon

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris

Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.

**RESUME :** Le calcul à la rupture est un mode de raisonnement traditionnel des ingénieurs en Génie Civil, aussi bien dans le domaine du calcul des structures que dans celui de la mécanique des sols pour les analyses de stabilité. Récemment, profitant des possibilités de clarification apportées par les mathématiques, une formulation théorique en a été donnée dont on présentera les principaux résultats. Quelques méthodes classiques, utilisées pour les analyses de stabilité de pente seront examinées à la lumière de cette théorie, ce qui permettra de les situer précisément du point de vue mécanique. On montrera aussi comment il est alors possible de procéder, sur des bases mécaniquement cohérentes, à l'étude de problèmes nouveaux : un exemple sera donné concernant l'analyse de stabilité d'un remblai sur sol purement cohérent anisotrope.

### 1 - UNE APPROCHE HISTORIQUE

Le terme de *calcul à la rupture* fait partie du vocabulaire courant des ingénieurs du Génie Civil, tant parmi ceux qui exercent leur activité dans le domaine du calcul des structures que parmi les mécaniciens des sols. On pourrait dire que les modes de raisonnement qui lui sont associés dans les diverses disciplines du Génie Civil font partie des réflexes quasi-instinctifs du projeteur, tant l'idée de concevoir et de dimensionner un ouvrage en s'appuyant uniquement sur des considérations de statique et de résistance (c'est-à-dire de non rupture) de la matière paraît naturelle.

Il s'agit là certainement de l'approche la plus anciennement utilisée par les bâtisseurs.

Il est classique de se référer à Galilée (1638) pour donner un premier exemple de raisonnement ressortissant à l'esprit du calcul à la rupture pour un problème de calcul de structure (poutre-console, fig.1).

Le mémoire célèbre de Coulomb (1773) traite tout à la fois de problèmes de structures, d'ouvrages et de mécanique des sols : résistance d'un pilier, stabilité des voûtes, poussée des terres (figure 2).

Les références historiques ultérieures sont nombreuses; on trouvera en particulier dans Heyman (1966, 1969, 1972, 1980), Prager (1972), Delbecq (1981, 1982) des bibliographies critiques pour les applications autres que la mécanique des sols.

#### Figure 1 :

Extrait de : *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze - Leyden, 1638.*  
Reproduit d'après C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*, Springer-Verlag, 1968.

#### Figure 2 :

"Essai de 1773 de Charles-Augustin Coulomb"

*vo esser eretto all'Orizzonte, & il Prisma, à Cilindro fitto nel n ad angoli retti) è manifesto che douendosi spezzare si romperà*

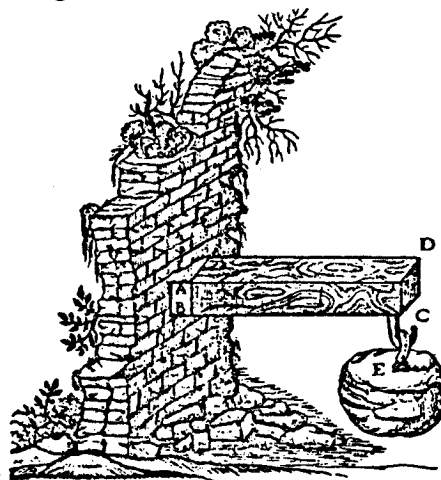


Figure 1

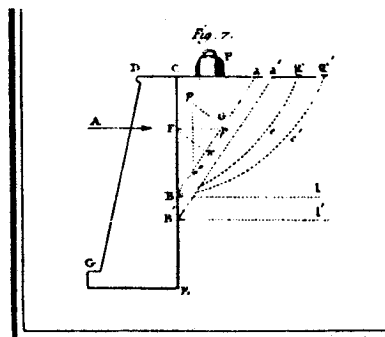


Figure 2

La mécanique des sols s'est, quant à elle, pour ainsi dire longtemps identifiée à l'étude, par les méthodes du calcul à la rupture de trois problèmes fondamentaux : poussée et butée des terres, stabilité des pentes, capacité portante des fondations superficielles ; quelques noms fameux suffisent à témoigner de cette époque : outre Coulomb, Massau, Rankine, Kötter, Caquot...

On se propose dans cette contribution :

1° de donner la formulation précise de la théorie du calcul à la rupture telle qu'elle peut maintenant être dégagée en mettant à profit les possibilités de clarification apportées par quelques concepts mécaniques et mathématiques ;

2° d'interpréter à travers cette formulation, tout en l'illustrant, quelques méthodes classiques utilisées pour les analyses de stabilité de pente qui ressortissent à l'esprit du calcul à la rupture ;

3° de montrer les développements permis par cette formulation, dans la conception et la mise en oeuvre de méthodes mécaniquement cohérentes pour l'étude de problèmes nouveaux tels que les analyses de stabilité d'ouvrages en sols anisotropes.

Réservant au chapitre suivant un exposé détaillé de la théorie, on se bornera maintenant à en présenter les grandes lignes et en particulier les hypothèses fondamentales, de façon à en préciser la portée.

Le calcul à la rupture s'appuie sur la connaissance de la géométrie de l'ouvrage étudié, du mode de chargement qui lui est appliqué, et des capacités de résistance des matériaux qui le constituent : ceci est en quelque sorte le "règlement" du calcul, et on écrit qu'une condition *nécessaire* pour que la "stabilité" ou la tenue de l'ouvrage soit assurée est qu'il y ait *compatibilité entre l'équilibre quasi-statique de l'ouvrage et les capacités de résistance de son matériau constitutif*. De là on déduit une approche directe "statique" permettant de déterminer les chargements pour lesquels il y a "stabilité potentielle" de l'ouvrage dans les conditions imposées ; par dualisation mathématique au moyen du principe des puissances virtuelles on met en évidence une approche "cinématique" permettant de déterminer commodément des chargements pour lesquels "l'instabilité" de l'ouvrage dans les conditions indiquées est certaine.

Le trait essentiel de ce type d'analyses est que le matériau y est caractérisé uniquement par son critère de résistance, c'est-à-dire par une limitation imposée à l'état de contrainte en chaque point ; c'est bien l'esprit des analyses dites de "stabilité" en mécanique des sols, portant sur les fondations superficielles, les pentes ou les remblais.

Le raisonnement de l'approche directe, "statique", paraît très intuitif, au point que l'on parle parfois à son propos de simple raisonnement de statique, ce qui peut conduire à des interprétations erronées. Deux points sont en effet essentiels à retenir :

♦ la compatibilité entre les équations de l'équilibre quasi-statique et les capacités de résistance du matériau, n'est qu'une condition *nécessaire* de "stabilité" ; il n'est pas possible d'aller au-delà de cette conclusion sauf à disposer d'informations complémentaires sur le comportement du matériau constitutif.

♦ cette compatibilité est à vérifier en tout point de l'ouvrage, c'est-à-dire que l'on doit contrôler la possibilité de construire un *champ de contrainte* respectant les équations de l'équilibre de la mécanique des milieux continus et les capacités de résistance ; aussi, des solutions qui mettent en évidence cette compatibilité dans une partie limitée de l'ouvrage ne permettent-elles pas d'affirmer la stabilité potentielle : ceci se rencontre couramment en mécanique des sols, notamment dans des études fondées sur la théorie des équilibres limites plans (voir à ce sujet : Bishop 1953, Salençon, 1974 et 1981). Il en va de même pour le raisonnement de Coulomb pour la poussée des terres ou la stabilité des pentes qui examine la compatibilité entre l'équilibre *global* d'une partie de l'ouvrage et les conditions de résistance considérées seulement *au contour* du volume correspondant. Il ne peut, lui non plus, permettre d'affirmer la stabilité potentielle, même si on l'optimise en recherchant le volume "le plus défavorable". Par contre, il est évident que le raisonnement contraposé, c'est-à-dire examinant les cas d'*incompatibilité* pour le même problème permet, lui, d'affirmer *l'instabilité certaine* de l'ouvrage. C'est ainsi que Coulomb l'a utilisé et c'est la véritable interprétation de la méthode du "prisme de Coulomb" en tant que méthode statique. De la même manière on peut interpréter, mais dans le seul cas du sol purement cohérent, le raisonnement de Fellenius (1936) qui s'intéresse à l'équilibre global d'un volume limité par un arc de cercle (cf Coussy et Salençon, 1979).

Les raisonnements évoqués ci-dessus, qui s'appuient sur l'approche statique requièrent en règle générale beaucoup de soin dans le maniement des implications logiques, notamment lorsque l'on se borne, comme on l'a dit, à ne considérer que des équilibres globaux, voire à ne satisfaire que certaines équations de ces équilibres globaux.

Il est possible, en dualisant le problème statique au moyen du principe des puissances virtuelles, d'aboutir à une approche "cinématique". Celle-ci se révèle d'application aisée pour affirmer l'incompatibilité "équilibre-capacité de résistance", c'est-à-dire l'instabilité de l'ouvrage. Elle permet, notamment dans les cas cités ci-dessus, d'aboutir aux mêmes résultats que ceux issus du raisonnement statique contraposé, par des voies plus simples et plus claires : un exemple de cette simplification est fourni par la comparaison des longs raisonnements de calcul des variations nécessaires pour déterminer le volume dont l'équilibre global est "le plus défavorable", par l'approche statique (Baker et Garber, 1978), (voir aussi Révilla et Castillo, 1977), à ceux qui peuvent être menés, aussi bien pour les matériaux cohérents que pour les matériaux frottants en s'appuyant sur l'approche cinématique du calcul à la rupture et qui aboutissent aux mêmes résultats (Coussy et Salençon, 1979).

Deux points méritent encore d'être évoqués dans cette présentation, qui touchent à la portée pratique de la méthode en mécanique des sols.

L'analyse des ouvrages de grande longueur peut, dans certaines conditions être faite par tranches planes. On peut alors utiliser, pour construire des solutions dans le cadre des approches du calcul à la rupture, des méthodes mathématiques raffinées, regroupées sous le nom de théorie des équilibres limites plans, fondées essentiellement sur la méthode des caractéristiques : Massau, (1899), Kötter, (1909), Mandel (1942),

Sokolovski (1960, 1962). Ces méthodes sont strictement identiques à celles employées dans l'étude des déformations plastiques "libres" des métaux considérés comme matériaux parfaitement plastiques standards (Hill 1950). Ceci a parfois conduit à assimiler le calcul à rupture à l'étude du schéma de comportement rigide parfaitement-plastique avec la loi d'écoulement plastique déduite par la règle de normalité. Ce point de vue qui aboutit à lier les approches du calcul à la rupture à une hypothèse de comportement plastique, standard, diminuerait considérablement la portée de la théorie présentée ici pour le mécanicien des sols.

Enfin on rappellera que le calcul à la rupture, en raison du caractère limité de l'information fournie au niveau du matériau, ne traite que d'une condition *nécessaire de stabilité* de l'ouvrage étudié dans une géométrie donnée : les charges ainsi déterminées ou approchées sont des charges extrêmes qui peuvent ne présenter qu'un intérêt réduit pour certains types de problèmes et certains types de comportement des matériaux constitutifs. En mécanique des sols l'expérience a montré que les analyses effectuées dans l'esprit du calcul à la rupture constituent en général, un élément valable pour le dimensionnement des fondations superficielles ou des soutènements ; par contre ce type d'analyse ne s'est pas révélé convaincant dans le cas des fondations profondes.

**2 - LA THEORIE DU CALCUL A LA RUPTURE**

**2.1 - Présentation**

Bien que, comme on l'a dit, le calcul à la rupture soit un mode de raisonnement ancien de la part des ingénieurs constructeurs, il a paru utile récemment, profitant des possibilités de clarification apportées par les mathématiques, (Moreau 1966), de mettre en forme la théorie du calcul à la rupture, (Salençon 1976 et 1981). Nous nous proposons de présenter ici les principaux résultats de cette théorie, renvoyant le lecteur à la bibliographie pour plus de détails.

A partir de cette présentation il sera possible, pour-suivant ce qui a été dit au chapitre 1, d'examiner la signification des méthodes traditionnellement employées pour certaines analyses en mécanique des sols et qui ressortissent à l'esprit du calcul à la rupture. On montrera également en quoi l'apport de la théorie est indispensable à l'étude de certains problèmes nouveaux.

**2.2 - Principaux résultats de la théorie**

**du calcul à la rupture**

**2.2.1 - Position du problème - chargements potentiellement supportables**

On étudie un système mécanique dans le formalisme du milieu continu tridimensionnel. On en désigne le volume par  $V$  et le contour par  $S$ .  $\underline{\sigma}$  est le champ de contrainte,  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  le tenseur-contrainte au point  $\underline{x}$  compté avec la convention de signe de la mécanique des sols c'est-à-dire : normale rentrante positive (compressions positives). Un champ de vitesse sera désigné par  $\underline{v}$  et  $\underline{d}$  est le champ de vitesse de déformation

correspondant (avec la convention de signe usuelle).  $[[\underline{v}(\underline{x})]]$  désigne la discontinuité de vitesse au franchissement d'une surface de discontinuité  $\Sigma$  en un point  $\underline{x}$  suivant la normale  $\underline{n}(\underline{x})$ .

Les données du problème sont les suivantes :

- ♦ La géométrie du système est donnée et fixe.
- ♦ Le système est soumis à un mode de chargement dépendant linéairement de  $n$  paramètres scalaires  $Q_j$ , composantes d'un vecteur chargement  $\underline{Q}$  de  $\mathbb{R}^n$ , en sorte que le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$(2.1) \int_V \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) dV - \int_{\Sigma} [[\underline{v}(\underline{x})]] \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) d\Sigma = \underline{Q}(\underline{\sigma}) \cdot \underline{q}(\underline{v})$$

$\forall \underline{\sigma}$  statiquement admissible,  $\forall \underline{v}$  cinématiquement admissible, dans le mode,

où  $\underline{Q}(\underline{\sigma})$  et  $\underline{q}(\underline{v})$  sont des fonctions linéaires de  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{v}$ .

- ♦ Le matériau constitutif du système est donné par ses capacités de résistance définies en chaque point  $\underline{x}$  de  $V$  par un domaine  $G(\underline{x})$  de  $\mathbb{R}^n$  assigné à  $\underline{\sigma}(\underline{x})$ . D'une manière générale,  $G(\underline{x})$  contient  $\underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{0}$  et est étoilé par rapport à  $\underline{0}$  ; il est souvent convexe ; il peut être défini par une fonction scalaire de  $\underline{\sigma}(\underline{x})$ , soit  $f[\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x})]$  telle que :

$$f[\underline{x} ; \underline{\sigma}(\underline{x})] < 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{intérieur de } G(\underline{x}) \\ = 0 \text{ } \longleftrightarrow \text{ } \\ > 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{frontière de } G(\underline{x}) \\ \text{extérieur de } G(\underline{x}) \end{array} \right.$$

La question posée est de savoir si le système, étudié dans cette géométrie avec le matériau indiqué sera "stable" sous un chargement donné  $\underline{Q} \in \mathbb{R}^n$  ; ou encore : déterminer l'ensemble des chargements sous lesquels le système sera stable.

Une condition nécessaire de "stabilité" est évidemment la

$$(2.2) \text{ compatibilité } \left\{ \begin{array}{l} \text{équilibre quasi-statique sous } \underline{Q} \\ \text{capacités de résistance du} \\ \text{matériau} \end{array} \right.$$

Si (2.2) est satisfaite on dira que le système est "potentiellement stable" sous  $\underline{Q}$  ou encore que  $\underline{Q}$  est un chargement "potentiellement supportable" par le système dans les conditions indiquées, ce qui s'écrit plus précisément :

$$(2.3) \left\{ \begin{array}{l} \underline{Q} \text{ "potentiellement supportable"} \\ \updownarrow \\ \exists \underline{\sigma} \text{ statiquement admissible dans le mode de} \\ \text{chargement, équilibrant } \underline{Q}, \text{ tel que :} \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}), \forall \underline{x} \in V. \end{array} \right.$$

L'ensemble de ces chargements potentiellement supportables sera désigné par  $K$ . On démontre sans difficulté à partir de (2.3) et en conséquence des propriétés de  $G(\underline{x})$  que :

- ♦  $K$  contient le chargement nul et est étoilé par rapport à  $0$  (comme  $G(\underline{x})$ ) ;
- ♦ Si  $G(\underline{x})$  est convexe en tout point de  $V$ ,  $K$  est convexe.

Quelques remarques s'imposent alors :

1° Il apparaît que la seule hypothèse de l'existence d'un domaine invariable définissant en chaque point les capacités de résistance du matériau constituant le système implique, dans l'espace des chargements, l'existence d'un domaine  $K$  délimitant la "stabilité potentielle" du système dans la géométrie fixée : on peut affirmer que le système sera instable, dans cette géométrie, sous tout chargement extérieur à  $K$ . Les chargements de la frontière de  $K$  seront désignés par le terme de "chargements extrêmes".

2° En l'absence d'hypothèses complémentaires,  $K$  constitue l'information la plus élaborée que l'on puisse obtenir, au niveau des chargements, à partir de l'information connue au niveau du matériau constitutif.

3° La notion de matériau constitutif est ici à prendre au sens large : il s'agit non seulement du matériau constitutif au sens classique mais en outre, lorsque l'on a affaire à plusieurs solides, des interfaces de contact entre ces solides. En chaque point de celles-ci la condition de frottement, c'est-à-dire la partie de la condition aux limites qui restreint le vecteur contrainte agissant en ce point sur l'interface, définit les capacités de résistance (portant sur  $\underline{q}(x)$ ).

4° Le concept de mode de chargement dépendant de  $n$  paramètres, tel que nous l'avons introduit et utilisé ci-dessus, semble exclure la possibilité de forces imposées constantes ce qui serait particulièrement malcommode pour le mécanicien des sols qui compte parmi ses sollicitations principales les forces de pesanteur. En fait, il n'en est rien, puisqu'il suffit de considérer ces forces comme variables, (proportionnellement à un même  $(n+1)$ ème paramètre), puis de les fixer à la valeur prescrite. On a alors affaire à la théorie précédente vis-à-vis des  $(n+1)$  paramètres, d'où le domaine  $K_{n+1}$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  ; sa section par le sous-espace  $\mathbb{R}^n$ , d'équation  $q_{n+1} = q_{n+1}^0$  valeur correspondant aux forces constantes imposées, est l'ensemble des chargements potentiellement supportables pour les paramètres de chargement effectivement libres : c'est le domaine  $K$  dans l'espace  $\mathbb{R}^n$ . Il est clair que ce domaine  $K$  ne sera plus nécessairement étoilé par rapport à  $0$  dans  $\mathbb{R}^n$  (par exemple : le domaine  $K$  pour les problèmes de poussée et butée des terres ne contient pas le chargement nul).

### 2.2.2 - Approche par l'intérieur par les contraintes

La condition suffisante contenue dans (2.3) permet la construction de  $K$ , point par point, par l'intérieur. Lorsque  $K$  est étoilé par rapport à  $0$  il est commode pour cette construction, de procéder par trajets de charge radiaux : on explore  $K$  le long des rayons vecteurs issus de  $0$ . Sur chacun d'eux la détermination du chargement extrême s'écrit comme un problème de maximisation que schématise la figure 3 ; cette maximisation peut se faire exactement ou de façon approchée selon les cas.

Lorsque  $G(x)$  est convexe  $\forall x \in V$  on pourra utiliser la convexité de  $K$  : l'enveloppe convexe d'un ensemble de chargements potentiellement supportables est une approche par l'intérieur de la frontière de  $K$  (figure 4).

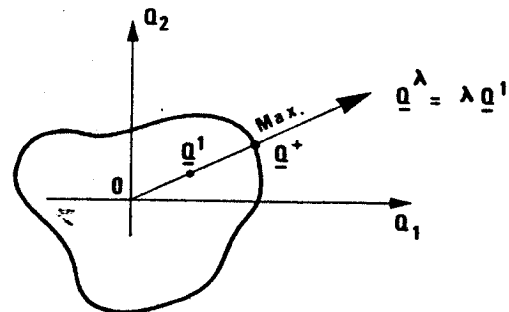


Figure 3 : Construction de  $K$  par trajets de charge radiaux :  $\text{Max} \{ \lambda \mid Q^\lambda \in K \}$

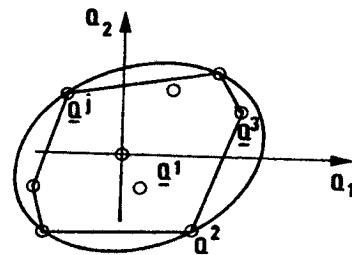


Figure 4 : Approximation par l'intérieur de la frontière de  $K$ .

On a fréquemment à traiter des problèmes dans lesquels le mode de chargement dépend d'un paramètre unique  $Q$ . Le domaine  $K$  est alors un segment contenant l'origine dont les extrémités  $Q^-$  et  $Q^+$  sont les chargements extrêmes ; la détermination de ceux-ci par l'approche "statique" correspond à un problème de minimisation pour  $Q^-$  et de maximisation pour  $Q^+$ . Il faut remarquer que le problème est différent lorsqu'il s'agit d'un système soumis à des forces constantes et à des forces variables dépendant d'un seul paramètre : que  $G(x)$  soit étoilé par rapport à  $0$ ,  $\forall x \in G$  ne permet plus alors d'affirmer a priori que le domaine  $K$  relatif au paramètre de chargement réel soit un segment de  $\mathbb{R}$  (cf remarque 4° du § 2.2.2.), ce qui est vrai si les  $G(x)$  sont convexes.

### 2.2.3 - Approche par l'extérieur par les contraintes

La proposition contraposée de (2.2) ou (2.3) s'écrit :

$$(2.4) \left\{ \begin{array}{l} \text{Système certainement instable sous } \underline{q} \\ \text{incompatibilité} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{équilibre quasi-statique} \\ \text{sous } \underline{q} \\ \text{capacités de résistance du} \\ \text{matériau} \end{array}$$

qui fournit donc un moyen d'approcher  $K$  par l'extérieur par les contraintes.

Il est possible dans certains cas, d'utiliser cette approche de façon pratique. Une méthode qui se révèle parfois efficace pour cela consiste à remarquer que l'incompatibilité dans (2.4) sera prouvée si l'on démontre qu'il y a incompatibilité entre une conséquence logique de l'équilibre quasi-statique sous  $Q$  et les capacités de résistance. En particulier, il pourra être commode de montrer que l'équilibre global,

c'est-à-dire l'équilibre au sens de la mécanique des solides indéformables, d'une partie du système est impossible à assurer compte tenu des conditions imposées par les capacités de résistance. On reviendra dans la suite sur des exemples classiques de cette façon de procéder, fournis par des méthodes d'équilibre de "blocs" utilisées en Mécanique des sols.

### 2.2.4 - Approche par l'extérieur par les vitesses

La façon de loin la plus efficace d'utiliser (2.4) s'obtient en écrivant l'équilibre quasi-statique sous  $\underline{Q}$  par le principe des puissances virtuelles :

$$(2.5) \left\{ \begin{array}{l} \text{Equilibre quasi-statique sous } \underline{Q} \\ \Downarrow \\ (2.1) \text{ est vraie } \forall \underline{g} \text{ statiquement admissible} \\ \text{avec } \underline{Q}, \text{ et } \forall \underline{v} \text{ cinématiquement admissible.} \end{array} \right.$$

On introduit les fonctions :

$$(2.6) \pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})] = \text{Sup} \left\{ -\underline{g}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) \mid \underline{g}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \right\}$$

$$(2.7) \pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}); [\underline{v}(\underline{x})]] = \text{Sup} \left\{ -[\underline{v}(\underline{x})] \cdot \underline{g}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \mid \underline{g}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \right\}$$

définies en chaque point  $\underline{x}$  à partir de  $G(\underline{x})$ , et l'on pose, pour  $\underline{v}$  cinématiquement admissible quelconque :

$$(2.8) P(\underline{v}) = \int_V \pi[\underline{x}; \underline{d}(\underline{x})] dV + \int_{\Sigma} \pi[\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}); [\underline{v}(\underline{x})]] d\Sigma$$

On a alors l'implication évidente :

$$(2.9) \left\{ \begin{array}{l} \exists \underline{v} \text{ cinématiquement admissible tel que} \\ P(\underline{v}) < \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \\ \Downarrow \\ \text{incompatibilité} \left\{ \begin{array}{l} \text{équilibre quasi-statique} \\ \text{sous } \underline{Q} \\ \text{capacités de résistance} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Autrement dit, (2.9) est une condition suffisante d'instabilité certaine sous  $\underline{Q}$ .

On en déduit une méthode d'approche par l'extérieur de  $K$ , qui est effective lorsque l'on choisit pour  $\underline{v}$  un champ pour lequel  $P(\underline{v})$  est finie, et  $\dot{\underline{q}}(\underline{v}) \neq 0$  : pour un tel champ l'inéquation (2.9) définit dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  un demi-espace extérieur à  $K$  (fig. 5). Considérant alors  $p$  champs de vitesses  $\underline{v}^k$  de ce type, l'enveloppe convexe des  $p$  hyper-plans d'équations :

$$P(\underline{v}^k) - \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}}(\underline{v}^k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, p$$

est une approximation par l'extérieur de la frontière de  $K$ .

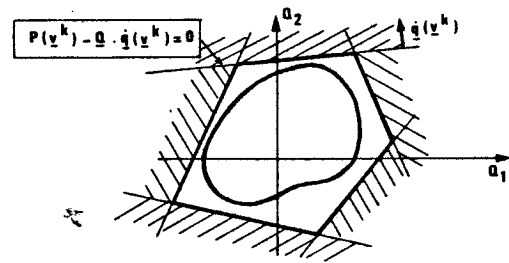


Figure 5 : Approximation par l'extérieur de la frontière de  $K$ .

Dans le cas du mode de chargement à un paramètre où  $K$  est le segment  $(Q^-, Q^+)$  de  $\mathbb{R}$ , on obtient :

$$(2.10) \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \dot{\underline{q}}(\underline{v}) > 0 : Q^+ < P(\underline{v}) / \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \\ \text{si } \dot{\underline{q}}(\underline{v}) < 0 : Q^- > P(\underline{v}) / \dot{\underline{q}}(\underline{v}) \end{array} \right.$$

dont l'optimisation conduit à minimiser  $P(\underline{v})$  à  $\dot{\underline{q}}(\underline{v})$  fixé positif ou négatif.

### 2.2.5 - Commentaires ; utilisation pratique

1° La méthode d'approche par l'extérieur par les vitesses délimite, par construction même, un domaine convexe incluant  $K$ . On peut montrer, sous certaines hypothèses dont notamment la convexité des  $G(\underline{x})$ , qu'en explorant tous les champs  $\underline{v}$  cinématiquement admissibles on aboutit à la détermination de  $K$  lui-même, (Frémond et Friaa 1978), (Friaa 1979). Dans la pratique, on ne procédera qu'à la construction de quelques champs  $\underline{v}$  bien choisis, un des intérêts essentiels de la méthode étant sa rapidité de réponse.

2° Il est évidemment essentiel pour pouvoir procéder à cette approche, de connaître les fonctions  $\pi$ . Un formulaire en a été donné concernant les principaux critères utilisés dans la pratique dont sont extraits les résultats ci-dessous pour les sols purement cohérents (2.11 : critère de Tresca) et frottants (2.12 : critère de Coulomb).

$$(2.11) \left\{ \begin{array}{l} f(\underline{g}) = \text{Sup} \left\{ \sigma_i - \sigma_j - 2C \mid i, j = 1, 2, 3 \right\} \\ \pi(\underline{d}) = +\infty \text{ si } \text{tr} \underline{d} \neq 0 \\ \pi(\underline{d}) = C(|d_1| + |d_2| + |d_3|) \text{ si } \text{tr} \underline{d} = 0 \\ \pi(\underline{n}; [\underline{v}]) = +\infty \text{ si } [\underline{v}] \cdot \underline{n} \neq 0 \\ \pi(\underline{n}; [\underline{v}]) = C |[\underline{v}]| \text{ si } [\underline{v}] \cdot \underline{n} = 0 \end{array} \right.$$

$$(2.12) \left\{ \begin{array}{l} f(\underline{g}) = \text{Sup} \left\{ \sigma_i (1 - \sin \phi) - \sigma_j (1 + \sin \phi) - 2C \cos \phi \mid i, j = 1, 2, 3 \right\} \\ H = C \cotg \phi \end{array} \right.$$

$$(2.12) \left\{ \begin{array}{l} \pi(\underline{d}) = +\infty \text{ si } \text{trd} < (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \phi \\ \pi(\underline{d}) = H \cdot \text{trd} \text{ si } \text{trd} > (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \phi \\ \pi(\underline{n} ; [\underline{v}]) = +\infty \text{ si } [\underline{v}] \cdot \underline{n} < |[\underline{v}]| \sin \phi \\ \pi(\underline{n} ; [\underline{v}]) = H [\underline{v}] \cdot \underline{n} \text{ si } [\underline{v}] \cdot \underline{n} > |[\underline{v}]| \sin \phi \end{array} \right.$$

3° Les champs de vitesse doivent être choisis de manière à ce que  $P(\underline{v}) < \infty$ , ce qui correspond en pratique à  $\pi < \infty$  en tout point de  $V$ . Ainsi, pour un sol purement cohérent, d'après (2.11) les champs  $\underline{v}$  devront être sans variation de volume, alors que, pour un sol frottant, ils ne pourront l'être : cela signifie par exemple, qu'une surface de discontinuité de vitesse sera, au sens propre, une surface de glissement dans le cas du sol purement cohérent ( $[\underline{v}]$  tangente) et ne pourra l'être pour un sol frottant. On ne doit pas perdre de vue, pour éviter tout malentendu, que les champs de vitesse considérés n'ont de signification qu'à travers le principe des puissances virtuelles pour exprimer l'équilibre quasi-statique.

### 2.3 - Interprétation de quelques méthodes d'analyse de stabilité en mécanique des sols

#### 2.3.1. - Présentation

On se propose de situer, du point de vue de la théorie du calcul à la rupture, diverses méthodes d'analyse de stabilité dans le but d'en préciser la signification mécanique. Ce type d'examen a été fait dans (Coussy et Salençon, 1979), (Salençon, 1981) pour quelques méthodes classiques et l'on se restreindra ici à l'essentiel nécessaire pour aborder le traitement de problèmes nouveaux.

#### 2.3.2. - La méthode du prisme de Coulomb

La figure 6 rappelle la méthode du prisme de Coulomb pour un sol purement cohérent et frottant, utilisé par exemple, pour l'analyse de stabilité d'une pente de grande longueur (problème traité dans le plan).

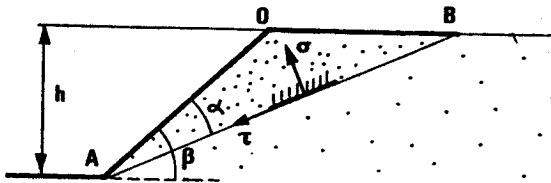


Figure 6 : Stabilité d'une pente : méthode du prisme de Coulomb.

Le principe de la méthode consiste à considérer un volume partiel du système, limité par une surface plane AB et à examiner l'équilibre global de ce volume sous l'action de son poids et compte tenu du critère de résistance, (2.11) ou (2.12), écrit uniquement sur AB, c'est-à-dire avec les notations indiquées sur la figure 6 ( $\sigma$  et  $\tau$  pour les composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte) : en tout point de AB,

$$(2.13) \quad |\tau| \leq C + \sigma \tan \phi.$$

On montre l'existence d'une valeur maximale du facteur sans dimension  $\gamma h/C$ , fonction de  $\phi, \beta$  et du paramètre  $\alpha$ , soit  $N(\phi, \beta, \alpha)$ , au-delà de laquelle cet équilibre est impossible sous la condition indiquée. En minimisant  $N(\phi, \beta, \alpha)$  par rapport à  $\alpha$  on obtient  $N^*(\phi, \beta)$  qui est donc la valeur maximale de  $\gamma h/C$  pour que l'équilibre d'un bloc quelconque tel que OAB soit possible sous la condition de résistance indiquée.

Pour interpréter ce raisonnement du point de vue du calcul à la rupture, le problème doit être posé dans une géométrie fixe, c'est-à-dire à  $h$  et  $\beta$  donnés,  $\gamma$  étant le paramètre de chargement ( $\gamma > 0$ ). Par l'analyse dimensionnelle, on montre que  $\gamma^*$  se met nécessairement sous la forme :

$$(2.14) \quad \gamma^* = N^*(\phi, \beta) C/h \quad (N^* \text{ fonction scalaire})$$

soit encore :

$$(2.15) \quad \gamma^* h/C = N^*(\phi, \beta)$$

On voit donc que la méthode présentée plus haut est, pour ce problème, rigoureusement une approche par l'extérieur par les contraintes, qui conduit à :

$$N^+(\phi, \beta) < N^*(\phi, \beta)$$

#### 2.3.3 - La méthode du prisme de Coulomb, approche par l'extérieur par les vitesses

Reprenant le même problème de calcul à la rupture, on considère le champ de vitesse défini à la figure 7, dans lequel le bloc triangulaire OAB, dépendant du paramètre  $\alpha$ , est animé d'un mouvement de translation à la vitesse  $U$  inclinée à  $\delta$  sur AB, le reste du massif étant immobile.

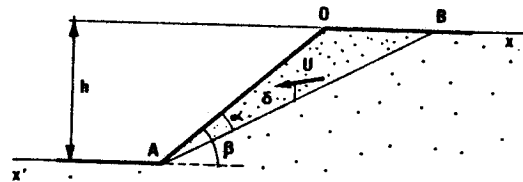


Figure 7 : Stabilité d'une pente : champ de vitesse par bloc en translation.

On utilise ce champ de vitesse dans l'approche par l'extérieur par les vitesses :

♦ Si le sol est purement cohérent, d'après (2.11)  $U$  doit être tangente à AB pour que  $P(\underline{v}) < \infty$  :  $\delta = 0$  ; par (2.10) on obtient la majoration correspondante de  $N^+(0, \beta)$  dont la minimisation par rapport à  $\alpha$  conduit à la même valeur qu'au § 2.3.2. :  $N^*(0, \beta)$ .

♦ Si le sol est frottant, on doit avoir, d'après (2.12),  $\phi < \delta < \pi - \phi$  pour que  $P(\underline{v}) < \infty$ . La majoration correspondante de  $N^+(\phi, \beta)$  est alors fonction, outre de  $\phi$ , de  $\alpha$  et  $\beta$  et de  $\delta$  ; sa minimisation par rapport à  $\alpha$  et  $\delta$  conduit encore à la même valeur qu'au § 2.4.2 :  $N^*(\phi, \beta)$ .

On constate ainsi que les résultats de cette approche par l'extérieur par les vitesses sont identiques à ceux de l'approche par l'extérieur par les contraintes du § 2.3.2. En fait les deux approches sont strictement équivalentes (\*).

#### 2.3.4.- Les méthodes d'équilibre d'un volume partiel de forme quelconque

D'une manière générale, une démarche analogue à celle du § 2.3.2. peut être tentée en considérant un volume partiel limité par une courbe quelconque BC (fig. 8).

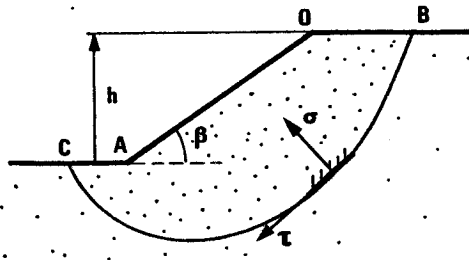


Figure 8 : Stabilité d'une pente : méthode d'équilibre d'un volume partiel.

Il apparaît alors que la recherche, pour une courbe BC donnée, d'une valeur de  $\gamma h/C$  au-dessus de laquelle l'équilibre global du volume OACBO est impossible sous la condition (2.13) écrite le long de BC, est malaisée, voire sans solution ; sauf si l'on fait choix a priori de certaines formes pour BC (cf Coussy et Salençon, 1979) :

- ♦ droite ou cercle pour le sol purement cohérent,
- ♦ droite ou spirale logarithmique (de raison  $\exp 2\pi \tan \phi$ ) pour le sol frottant.

C'est la méthode du cercle de Fellenius (1936) ou de la spirale de Rendulic (1935).

Ce résultat est d'ailleurs confirmé par les études basées sur le calcul des variations (Baker et Garber, 1978) dans lesquelles la forme de la courbe BC est optimisée de façon à construire le volume partiel le plus "défavorable".

Il explique aussi pourquoi, les méthodes fondées sur l'équilibre d'un bloc limité par un arc de cercle nécessitent, dans le cas d'un sol frottant, l'introduction a priori d'hypothèses supplémentaires pour pouvoir aboutir : ainsi, des auteurs supposent (a priori) qu'il y aura égalité dans (2.13) en tout point de BC, et font des hypothèses dans le but d'y déterminer  $\sigma$  et  $\tau$ . Les résultats obtenus dépendent évidemment de

(\*) Certains auteurs ont cru relever une impossibilité cinématique au mécanisme de la fig. 7 (et à ceux qui lui sont apparentés), affirmant que le point A dans le triangle OAB ne saurait avoir d'autre vitesse que dirigée vers l'angle  $\pi/2$  en A ; le lecteur pourra se reporter à (Salençon, 1981, chap.V) pour la discussion de cette question qui renvoie à la notion de champ cinématiquement admissible pour un milieu continu.

toutes ces hypothèses et, de plus, l'introduction de celles-ci rend le plus souvent impossible l'interprétation rigoureuse des méthodes correspondantes du point de vue du calcul à la rupture : un exemple classique est fourni par les méthodes de tranches.

#### 2.3.5. - Approche par l'extérieur dans un mécanisme par bloc rigide

On a vu dans le cas du prisme de Coulomb comment l'approche par l'extérieur par les vitesses, duale du raisonnement statique permet d'aboutir à un même résultat que celui-ci par une démarche d'une logique plus simple.

On considère maintenant le champ de vitesse défini sur la figure 9 : Le volume OACBO, limité par une courbe BC de forme quelconque, est animé d'un mouvement rigidifiant de centre instantané  $\Omega(\xi, \eta)$ , l'extérieur du volume étant immobile.

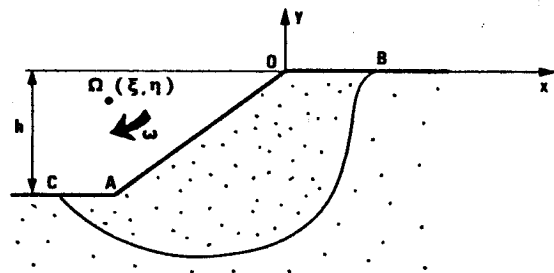


Figure 9 : Stabilité d'une pente : mécanisme par bloc rigide.

On utilise ce champ de vitesse dans une approche par l'extérieur :

♦ Si le sol est purement cohérent, il faut, d'après (2.11) pour que  $P(v) < \infty$ , que BC soit un arc de cercle centré en  $\Omega$  ("bloc circulaire avec glissement"). L'optimisation par rapport à  $\Omega$  et au rayon du cercle est classique (Taylor, 1937 et 1948).

♦ Si le sol est frottant, d'après (2.12), une inclinaison minimale de la vitesse doit être respectée en tout point de BC ; il s'ensuit en particulier que BC ne peut être circulaire de centre  $\Omega$ . L'optimisation sur la forme de BC conduit aux spirales logarithmiques de centre  $\Omega$  et de raison  $(\exp 2\pi \tan \phi)$  ; il convient ensuite d'optimiser par rapport à  $\Omega$  lui-même et à la position du point C.

On constate que l'on rejoint à nouveau, comme au § 2.3.3., les conclusions de la démarche statique par un raisonnement systématique, qui permet d'en mieux saisir la signification. Ainsi, il est important de remarquer, en rappelant que les champs de vitesse utilisés n'ont a priori d'autre signification qu'à travers le principe des puissances virtuelles, que la forme de la ligne de discontinuité de vitesse BC, qui délimite donc le bloc, est finalement issue du seul critère de résistance, puisqu'elle est imposée par la condition  $P(v) < \infty$



Ceci met encore en évidence l'origine des difficultés rencontrées dans l'utilisation des lignes circulaires pour les sols frottants et il convient sur ce point d'être bien clair : il n'est pas incorrect du point de vue mécanique d'imaginer, à partir de l'observation ou de la "reconstitution" de ruines réelles d'ouvrages, que celles-ci se produisent par des glissements de blocs le long de lignes qui sont alors nécessairement rectilignes ou circulaires ; mais la théorie du calcul à la rupture montre qu'une analyse de stabilité fondée sur l'étude de l'équilibre d'un tel bloc, sans autre information que la donnée du critère de résistance, ne peut aboutir que dans le cas des sols purement cohérents.

### 2.3.6 - Théorie des équilibres limites plans ou axisymétriques

Sans entrer dans les détails de cette théorie fine, on peut évoquer la théorie des équilibres limites, utilisée notamment pour les calculs de capacité portante.

Il s'agit d'une méthode d'analyse employée dans l'étude des problèmes plans ou axisymétriques, qui utilise la méthode mathématique des caractéristiques pour construire des champs de contrainte qui satisfont les équations d'équilibre et atteignent la condition de résistance dans tout un domaine du système. Elle relève bien de la théorie du calcul à la rupture, mais l'interprétation stricte des solutions construites est parfois délicate (Bishop, 1953 ; Salençon, 1974) : des approches statiques par l'intérieur ou le plus souvent cinématiques par l'extérieur, peuvent ainsi être obtenues ; de même que des solutions complètes conduisant à des valeurs exactes de chargements extrêmes. Dans certains cas aussi, des solutions ont été proposées pour lesquelles aucune signification rigoureuse ne peut être retenue.

D'une manière générale l'utilisation de la théorie des équilibres limites plans ou axisymétriques requiert une bonne pratique, mais les résultats qui en sont issus sont souvent les meilleurs (du point de vue de la précision mathématique) : facteurs de capacité portante... On mentionnera, parmi les grands noms dans ce domaine : Berezancew, Hencky, Hill, Mandel, Massau, Prandtl, Sokolovski.

### 2.4 - L'analyse de problèmes nouveaux

Les analyses les plus rigoureuses menées dans l'esprit du calcul à la rupture sont relatives à des ouvrages constitués de sols homogènes et isotropes. Il s'est toutefois révélé nécessaire d'examiner des cas de non-homogénéité et d'anisotropie.

Les méthodes de tranches, dont la signification approchée a été évoquée au § 2.3.4. permettent de prendre en compte certains types de non-homogénéité pour les analyses de stabilité de pentes. Pour les fondations et d'autres types de non-homogénéité, des règles de cohésion "moyenne" ont parfois été suggérées, et des calculs rigoureux ont été récemment effectués qui ont mis en évidence les risques éventuels liés à l'emploi des formules empiriques (Matar et Salençon, 1979).

Nous porterons plus spécialement notre attention sur le cas des sols naturellement anisotropes. Il s'agit essentiellement de sols purement cohérents et l'on souhaite effectuer à leur propos, des calculs de capacité portante et des analyses de stabilité des pentes et de remblais.

Pour ce faire, divers auteurs ont tenté d'adapter les méthodes classiques, utilisées pour les sols isotropes, dans le but de prendre en compte l'anisotropie du matériau, celui-ci étant considéré comme orthotrope de révolution autour de l'axe vertical, ce qui apporte quelques simplifications (Chen, 1975 ; Davis et Christian, 1971 ; Duncan et Seed, 1966 ; Lo, 1965).

Deux remarques doivent être faites concernant les démarches suivies :

- ♦ dans certaines, l'absence d'une définition précise du problème étudié conduit à l'introduction et à l'utilisation de concepts et raisonnements flous ;

- ♦ dans d'autres, on procède à la transposition au cas anisotrope, de raisonnements rigoureux dans le cas isotrope, en s'inspirant de constatations expérimentales et en s'appuyant sur des formules incompatibles les unes avec les autres du point de vue mécanique.

Le recours à la théorie apparaît ainsi indispensable :

- ♦ pour clarifier le problème posé, notamment en obligeant à préciser la signification des mesures de résistance effectuées sur le matériau et la description de l'anisotropie observée ;

- ♦ pour fournir, une fois choisie l'une ou l'autre des approches du calcul à la rupture, le raisonnement mécanique rigoureux pour la résolution du problème.

A ce propos, il nous paraît ici, comme d'ailleurs au § 2.3.4, qu'il y a lieu d'écartier l'argument selon lequel l'imprécision dans la connaissance physique du sol fournie par les mesures excuserait, voire justifierait, le caractère approximatif des raisonnements. En effet, une analyse menée sur des bases mécaniques rigoureuses, outre qu'elle conduit à cerner les causes de certaines difficultés rencontrées et à améliorer les méthodes expérimentales, apporte deux informations essentielles :

- ♦ elle permet d'évaluer l'importance des effets susceptibles d'être observés,

- ♦ et surtout, elle aide à dégager dans chaque cas, le type de paramètre d'anisotropie dont l'influence paraît devoir être la plus significative, et qu'il convient donc de s'attacher à déterminer.

## 3 - ANALYSE DE STABILITE D'OUVRAGES EN SOLS COHERENTS ANISOTROPES

### 3.1 - Généralités

Afin d'illustrer le propos précédent en mettant en évidence l'apport de la théorie du calcul à la rupture dans la résolution de problèmes nouveaux on va dans ce chapitre présenter rapidement quelques résultats obtenus récemment dans l'analyse de la stabilité de remblais sur sols cohérents anisotropes par A. Tristán-López et l'auteur. Le lecteur désireux d'une présentation plus détaillée pourra se reporter à Tristán-López (1981) et aux publications de Salençon et Tristan-Lopez (1980, 1981a,b,c,d) où on trouvera en outre d'autres problèmes de tenue d'ouvrages en sols cohérents anisotropes étudiés par les mêmes approches, ainsi que les comparaisons des

résultats ainsi obtenus avec ceux donnés antérieurement par d'autres auteurs.

Les analyses à la rupture effectuées par ceux-ci dans le cas de sols naturellement anisotropes, ont trait à la capacité portante des semelles filantes et à la stabilité des pentes pour des sols cohérents orthotropes de révolution autour de l'axe vertical. D'une façon générale, les problèmes y ont été considérés comme plans et on a procédé à des analyses bidimensionnelles par des méthodes issues de celles utilisées pour les sols isotropes et en s'appuyant directement sur les caractéristiques de résistance déterminées dans des essais tridimensionnels *in situ* ou en laboratoire, tels que "triaxial", "cylindres creux" (Chen, 1975 ; Lo, 1965). Boehler (1975 et 1978) s'est attaché à écrire le critère tridimensionnel dans sa forme la plus générale, respectant les symétries de la matière, puis à en tirer l'expression bidimensionnelle correspondante dans l'hypothèse d'un matériau plastique en déformation plane.

La démarche adoptée dans les analyses rapportées ici consiste à proposer un critère de résistance pour le matériau cohérent anisotrope tridimensionnel, qui rende compte des principaux résultats expérimentaux et soit en accord avec les hypothèses classiques pour ce type d'anisotropie naturelle (orthotropie de révolution autour de l'axe vertical). Les problèmes sont ensuite traités du point de vue tridimensionnel, en tenant compte des particularités de la géométrie et du chargement : les systèmes traités sont de grande dimension longitudinale soumis à un chargement, invariant par translation selon cette direction, et parallèle au plan de section droite de l'ouvrage. On peut montrer, par application de la théorie du calcul à la rupture en déformation plane et compte tenu de la forme de l'anisotropie, qu'il y a équivalence d'une telle étude avec une étude bidimensionnelle s'appuyant sur un critère bidimensionnel dit "de résistance en déformation plane" (Salençon, 1981).

### 3.2 - Caractéristiques de résistance des sols

#### cohérents anisotropes

##### 3.2.1 - Résultats expérimentaux

L'anisotropie de résistance des sols purement cohérents dans des conditions non drainées, a été mise en évidence par plusieurs auteurs à l'aide de divers types d'essais, en laboratoire ou *in situ*.

Deux essais retiennent particulièrement notre attention :

♦ Essai triaxial cylindrique, réalisé sur des éprouvettes dont l'axe de prélèvement est incliné à l'angle  $\alpha$  sur la verticale  $Oy$ . La pression de confinement correspond à la contrainte principale mineure  $\sigma_3$ , et  $\sigma_1$  est la contrainte de compression axiale, définissant l'angle  $\alpha = (Oy, \sigma_1)$  (Boehler, 1975 ; Duncan et Seed, 1966 ; Lo, 1965).

♦ Essai sur des cylindres creux prélevés verticalement. Différentes orientations  $\alpha = (Oy, \sigma_1)$  de la contrainte principale majeure  $\sigma_1$  par rapport à l'axe vertical  $Oy$  sont obtenues par diverses combinaisons des pressions interne et externe, de la compression longitudinale et de la torsion (Broms et Casbarian, 1965 ; Saada et Zamami, 1969 ; Saada et Bianchini, 1975).

Les contraintes principales étant ordonnées suivant  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , il apparaît dans ces essais, que la cohésion du sol définie par  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ , n'est fonction que de l'inclinaison  $\alpha$  de la contrainte principale majeure compressive  $\sigma_1$  sur l'axe vertical  $Oy$ . On posera ainsi :

$$(3.1) \quad C(\alpha) = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 \quad \text{pour } \alpha = (Oy, \sigma_1)$$

Il est courant de noter  $C_h = C(0)$  et  $C_v = C(\pi/2)$  et de représenter les valeurs de  $C(\alpha)$  sur un diagramme polaire (figure 10).

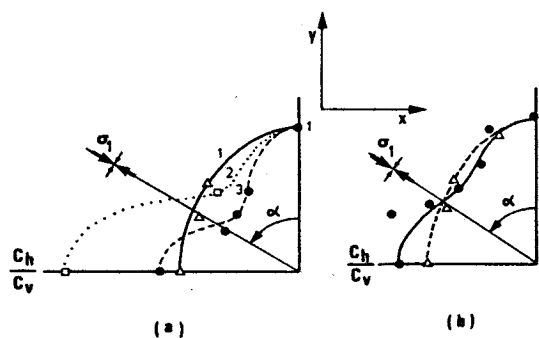


Figure 10 : Diagrammes polaires  $C(\alpha)/C_v$  - résultats expérimentaux et courbes polaires.

a) Essais triaxiaux (1 : Dunca, et Seed, 1966 ; 2 : Bishop, 1966 ; 3 : Lo et Milligan, 1967).

b) Essais sur des cylindres creux (Broms et Casbarian, 1965)

Pour caractériser la valeur  $C(\alpha)$  obtenue à partir des essais triaxiaux, Bishop (1966) a proposé une formule que nous écrivons à l'aide des paramètres d'anisotropie  $K_1 = C_h/C_v$  et  $K_2 = C(\pi/4)/C_v$  :

$$(3.2)$$

$$C(\alpha) = C_v (\cos^2 \alpha + K_1 \sin^2 \alpha) (\cos^2 2\alpha + [2K_2 / (1 + K_1)] \sin^2 2\alpha)$$

Dans le cas particulier où  $K_2 = (1 + K_1)/2$ , cette formule se ramène à celle proposée par Casagrande et Carrillo (1944). La formule de Bishop étant plus générale, permet de rendre compte des principaux types d'anisotropie rencontrés dans la pratique. Les courbes de la figure 10, tracées à partir des résultats expérimentaux, montrent un bon accord, non seulement pour les essais triaxiaux, mais aussi pour les essais sur des cylindres creux. Nous retiendrons la formule de Bishop pour représenter les valeurs de la cohésion pour toute inclinaison  $\alpha$  de la contrainte principale  $\sigma_1$ , obtenue avec ces deux types d'essais.

##### 3.2.2. - Choix d'un critère de résistance

Les résultats cités au § précédent ne permettent évidemment pas, à eux seuls, d'écrire le critère de résistance du sol pour tout état de contrainte  $\underline{\sigma}(x)$  <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Pour alléger les notations, nous supprimerons, dans les formules à venir, la dépendance en  $x$  lorsque cela ne risquera pas d'introduire quelque ambiguïté.

Nous introduisons l'hypothèse que seules interviennent dans ce critère, les valeurs des contraintes principales extrêmes et l'angle  $\alpha = (0y, \sigma_1)$ . Alors, en se référant aux essais précédents qui montrent que  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  n'interviennent que par leur différence, on aboutit pour le critère de résistance, à la formule :

$$(3.3) \quad f(\underline{\sigma}) = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 - C(\alpha)$$

qui correspond évidemment à un matériau orthotrope de révolution autour de  $0y$ .

Dans (3.3) nous retiendrons pour la fonction  $C(\alpha)$  l'expression (3.2) proposée par Bishop.

Le domaine de résistance défini à partir de (3.3) est toujours étoilé par rapport à 0.

On peut aussi remarquer que suivant la forme de la fonction  $C(\alpha)$ , c'est-à-dire en fonction des valeurs des paramètres  $K_1$  et  $K_2$  dans (3.2), il n'est pas toujours convexe : c'est un cylindre parallèle à la direction  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$  et  $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ , dans l'espace  $\mathbb{R}^6$  défini par les six composantes du tenseur contrainte  $\underline{\sigma}$  (cf. Salençon et Tristán-López (1981c) et (Tristán-López, 1981)).

### 3.2.3 - Commentaires

Le choix de la forme (3.3) pour le critère de résistance tridimensionnel, a été guidé par le souci d'aboutir à un critère simple rendant compte des résultats expérimentaux, d'être en accord avec les hypothèses implicitement admises par les expérimentateurs dans leur interprétation des essais sur cylindres creux par exemple, et d'obtenir pour l'analyse des problèmes par le calcul à la rupture en déformation plane, un critère semblable à celui utilisé par les auteurs des quelques études antérieures : avec la forme (3.3), on trouve que le critère de "résistance en déformation plane" (§ 3.1) correspondant s'écrit, en fonction du tenseur des contraintes bidimensionnel  $\underline{\sigma}_2$

$$(3.14) \quad f(\underline{\sigma}_2) = \sigma_I - \sigma_{II}/2 - C(\alpha)$$

$$(\sigma_I > \sigma_{II}, \text{valeurs propres de } \underline{\sigma}_2, \text{ et } \alpha = (0y, \sigma_I))$$

On a évoqué plus haut la convexité du domaine de résistance, bien que cette propriété ne soit pas nécessaire à la validité des résultats de la théorie du calcul à la rupture énoncés au § 2.2. Cette analyse avait un double but : montrer que l'on peut être amené à rencontrer des domaines de résistance non convexes et par là, mettre en évidence l'intérêt de la présentation adoptée pour la théorie du calcul à la rupture.

On peut, certes, remarquer que la non convexité du domaine de résistance dans  $\mathbb{R}^6$  ne découle par directement des résultats expérimentaux, par exemple, lorsque ceux-ci proviennent d'essais au "triaxial" (en effet, le type de sollicitation imposé par le "triaxial" ne définit pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^6$ ), mais peut provenir de la forme adoptée pour le critère de résistance à partir de ces résultats expérimentaux. Mais la démonstration de cette non-convexité, qui a été donnée dans les références citées ci-dessus, montre aussi que toute analyse bidimensionnelle fondée directement sur un critère de la forme (3.4) avec  $C(\alpha)$  défini par (3.2), se référera dans certains cas de valeurs de  $K_1$  et  $K_2$  à un critère non convexe.

## 3.3 - Stabilité d'un remblai sur sol cohérent

### anisotrope

#### 3.3.1. - Position du problème et méthode d'approche

On analyse la stabilité d'un remblai en sol frottant isotrope reposant sur une couche de sol purement cohérent orthotrope de révolution autour de  $0y$  dont le critère de résistance est défini par (3.2 et 3.3). La figure 11 précise la géométrie (simple) de l'ouvrage étudié supposé de grande dimension longitudinale, ainsi que les notations dans la section droite.

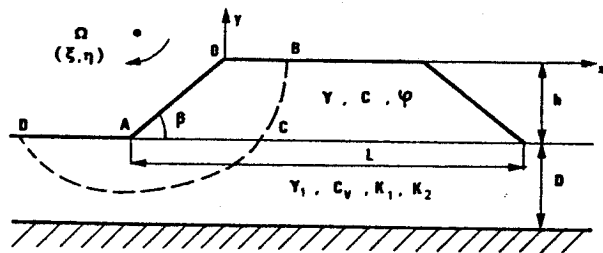


Figure 11 : Stabilité d'un remblai sur sol cohérent anisotrope : approche par l'extérieur.

La "stabilité" de ce remblai est caractérisée par son coefficient de rupture  $F$ , coefficient scalaire défini en se référant au remblai "extrême", de même géométrie, mêmes conditions de résistance, soumis à un trajet de charge "radial" (cf. § 2.2.2, figure 3), c'est-à-dire tel que  $\gamma_1^+/ \gamma^+ = \gamma_1 / \gamma$  ; c'est :

$$(3.5) \quad F = \gamma^+ / \gamma = \gamma_1^+ / \gamma_1$$

qui possède vis-à-vis de cet ouvrage les propriétés

$$(3.6) \quad \begin{aligned} F > 1 &\iff \text{remblai potentiellement stable} \\ F < 1 &\iff \text{remblai certainement instable.} \end{aligned}$$

$F$  peut, d'après l'analyse dimensionnelle du problème, se mettre sous la forme :

$$(3.7) \quad F = \frac{c_v}{\gamma h} n \left( \frac{D}{h}, \frac{L}{h}, \beta, \frac{\gamma_1}{\gamma}, \frac{c}{c_v}, \phi, K_1, K_2 \right),$$

où  $n$  est une fonction scalaire des arguments indiqués.

L'approche choisie consiste à évaluer par excès ce coefficient de rupture au moyen de champs de vitesse définis par des mécanismes par bloc rigide tel que celui représenté sur la figure 11 : le volume OADCB0  $y$  est animé d'un mouvement rigidifiant de rotation autour du centre  $\Omega$  (il s'agit en fait, pour l'ouvrage, d'une rotation autour de l'axe  $\Omega z$  du bloc cylindrique de section OADCB0), le reste de l'ouvrage demeurant immobile. S'agissant d'un champ de vitesse en déformation plane dans lequel interviennent uniquement des discontinuités de vitesse, l'utilisation de l'approche par l'extérieur, nécessite la connaissance des fonctions  $\pi(\underline{n}; \{v(x)\})$  :

- ♦ pour le matériau de Coulomb isotrope constituant le remblai, celle-ci a été donnée (formule 2.12)
- ♦ pour le matériau cohérent anisotrope on obtient :

$[\underline{v}(\underline{x})]$  étant une discontinuité de vitesse en déformation plane parallèlement à  $Oxy$ , c'est-à-dire étant une discontinuité de vitesse, parallèle à  $Oxy$ , à la traversée d'une surface de normale  $\underline{n}(\underline{x})$  elle-même parallèle à  $Oxy$ , il vient pour le matériau cohérent anisotrope de critère (3.3) :

(3.8)

$$\pi(\underline{n}(\underline{x}); [\underline{v}(\underline{x})]) = +\infty \text{ si } v_n(\underline{x}) \neq 0$$

(3.9)

$$\pi(\underline{n}(\underline{x}); [\underline{v}(\underline{x})]) = \max_{\alpha} \left\{ C(\alpha) v_t(\underline{x}) \sin 2[\varepsilon(\underline{x}) - \alpha] \right\}$$

si  $v_n(\underline{x}) = 0$ .

où  $v_n(\underline{x})$  et  $v_t(\underline{x})$  sont les composantes de  $[\underline{v}(\underline{x})]$  sur  $\underline{n}(\underline{x})$  et  $\underline{t}(\underline{x})$  défini par  $[\underline{n}(\underline{x}), \underline{t}(\underline{x})] = +\frac{\pi}{2}$  et  $\varepsilon(\underline{x}) = (Oy, \underline{n}(\underline{x}))$ , (figure 14).

(3.9) se met sous la forme :

$$(3.10) \begin{cases} \pi(\underline{n}(\underline{x}); [\underline{v}(\underline{x})]) = C_v |v_t(\underline{x})| \pi_+(\varepsilon(\underline{x})) & \text{si } v_t(\underline{x}) > 0 \text{ et } v_n(\underline{x}) = 0 \\ \pi(\underline{n}(\underline{x}); [\underline{v}(\underline{x})]) = C_v |v_t(\underline{x})| \pi_-(\varepsilon(\underline{x})) & \text{si } v_t(\underline{x}) < 0 \text{ et } v_n(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

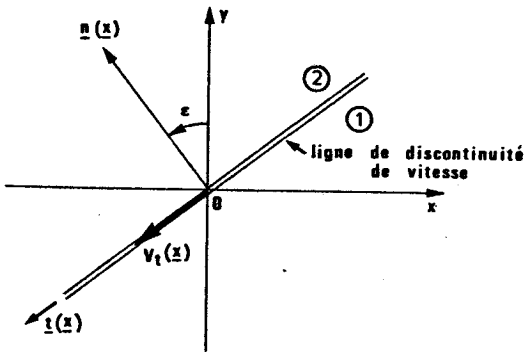


Figure 12 : Calcul des fonctions  $\pi(\underline{n}; [\underline{v}])$

Les fonctions  $\pi_+(\varepsilon)$  et  $\pi_-(\varepsilon)$  se calculent numériquement en fonction des valeurs des rapports d'anisotropie  $K_1 = C_h/C_v$  et  $K_2 = C(\pi/4)/C_v$ . On trouvera dans (Tristan-López, 1981) des représentations graphiques de ces fonctions pour diverses valeurs des paramètres d'anisotropie.

### 3.3.2 - Application de la méthode

$\underline{v}$  étant un champ de vitesse cinématiquement admissible, on y désigne par  $P(\gamma, \gamma_1, \underline{v})$  la puissance des forces extérieures (forces de pesanteur). En application des résultats du § 2.2.4. (approche par l'extérieur) on a :

$$P(\gamma, \gamma_1, \underline{v}) > P(\underline{v}) \implies F < 1.$$

Plus précisément, tout champ de vitesse  $\underline{v}$  dans lequel la puissance des forces extérieures  $P(\gamma, \gamma_1, \underline{v})$  est positive, et  $P(\underline{v})$  finie, fournit un majorant  $n_{\underline{v}}$  de  $n$ , et un majorant  $F_{\underline{v}}$  de  $F$  :

$$(3.11) \begin{cases} n_{\underline{v}} = \frac{\gamma h}{C_v} \frac{P(\underline{v})}{P(\gamma, \gamma_1, \underline{v})} > n \\ F_{\underline{v}} = \frac{P(\underline{v})}{P(\gamma, \gamma_1, \underline{v})} > F. \end{cases}$$

En effet, on remarque que pour le remblai "extrême" on a nécessairement :

$$P(\gamma^+, \gamma_1^+, \underline{v}) < P(\underline{v})$$

et que, compte tenu de la définition (3.5) du coefficient de rupture et de la linéarité de  $P(\gamma, \gamma_1, \underline{v})$  par rapport à  $(\gamma, \gamma_1)$  il vient alors :

$$F \cdot P(\gamma, \gamma_1, \underline{v}) < P(\underline{v})$$

dont on tire (3.11).

La méthode d'étude retenue consiste à rechercher les meilleurs majorants  $n_{\underline{v}}$  et  $F_{\underline{v}}$ , sur l'ensemble des champs de vitesse  $\underline{v}$  définis par des mécanismes par bloc rigide présentés à la figure 11.

La formule (3.10) exprimant  $\pi(\underline{n}(\underline{x}); [\underline{v}(\underline{x})])$  montre que pour que  $P(\underline{v})$  soit finie, il faut que le long de DC, la discontinuité de vitesse soit tangente à cette ligne : DC doit donc être une ligne de glissement au sens propre du terme (comme dans le cas du matériau cohérent isotrope), ce qui implique que dans ce mécanisme, DC sera un arc de cercle de centre O.

Le long de CB, pour que  $P(\underline{v})$  soit finie, il faut d'après (2.12) que la vitesse respecte la condition d'inclinaison  $\phi \leq \delta \leq \pi - \phi$  donnée au § 2.3.3.

Calculant alors  $P(\gamma, \gamma_1, \underline{v})$  on voit que  $\gamma_1$  y a une contribution nulle compte tenu de la forme de DC.

Il reste à minimiser  $n_{\underline{v}}$  et  $F_{\underline{v}}$  :

Procédant d'abord à  $\Omega$  et CD fixés, on est ramené au cas de la pente (§ 2.3.5) et on trouve que la forme optimale pour CB est un arc de spirale logarithmique de foyer  $\Omega$  et de raison  $(\exp 2\pi \operatorname{tg} \phi)$  ;

On minimise ensuite par rapport à la position de  $\Omega$  et au rayon du cercle CD.

On aboutit ainsi au majorant :

$$(3.12) \quad F^* = \frac{C_v}{\gamma h} n^* \left( \frac{D}{h}, B, \frac{C}{C_v}, \phi, K_1, K_2 \right)$$

du coefficient de rupture du remblai (1).

(1) La majoration obtenue par un mécanisme tel que celui de la fig. 11 ne fait pas intervenir  $L/h$ , supposant implicitement  $L/h$  suffisamment grand pour que B se trouve sur la surface horizontale du remblai ; on trouvera dans Tristan-López, 1981, une analyse menée sur une classe plus vaste de mécanismes par bloc rigide qui conduit à un majorant de  $F$  qui dépend de  $L/h$ .

### 3.3.3 - Exemple d'application

Un exemple de problème réel conduisant à une analyse de stabilité avec matériau anisotrope est fourni par le remblai expérimental de Cubzac-les-Ponts. (Rappelons que ce remblai a été construit jusqu'à atteindre la rupture).

La figure 13 présente la géométrie de l'ouvrage et la courbe de rupture "réelle" telle qu'elle a pu être reconstituée par les sondages (Josseaume et col, 1977).

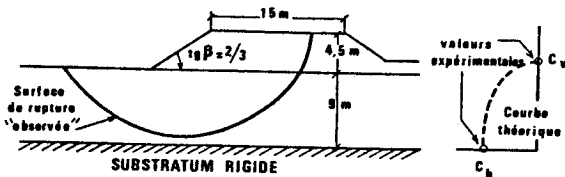


Figure 13 : Rupture du remblai de Cubzac-les-Ponts.

L'étude réalisée par Josseaume et Col. (1977) a mis en évidence la nature anisotrope du sol d'assise : ainsi, des essais de compression et d'extension à l'appareil triaxial cylindrique ont été effectués par ces auteurs, qui ont montré que le rapport de la résistance en extension à la résistance en compression était de 0,58. Plus précisément, les caractéristiques des matériaux constitutifs de cet ouvrage étaient les suivants :

matériau	Poids volumique KN/m <sup>3</sup>	Propriétés mécaniques
Remblai (isotrope)	21,0	$C_1 = 1 \text{ KPa} ; \phi = 35^\circ$
Sol d'assise (anisotrope)	15,0	$C_v = 19 \text{ KPa} ;$ $K_1 = 0,58 ; K_2 = ?$

On remarquera que le paramètre d'anisotropie  $K_2 = C(\pi/4)/C_v$  n'a pas été déterminé. Aussi, dans la suite, nous supposons pour l'analyse de la stabilité de cet ouvrage que le matériau satisfait la relation de Casagrande et Carrillo :  $K_2 = (1+K_1)/2$ . Cette hypothèse, classique, n'est d'ailleurs pas la plus défavorable.

Le calcul du mécanisme minimisant du type précédent (bloc rigide en rotation), a été fait d'abord en supposant que le sol d'assise est isotrope avec une cohésion égale à  $C_v$  ; un deuxième calcul a été réalisé avec les paramètres d'anisotropie du tableau ci-dessus. La figure 14 montre les deux mécanismes optimaux correspondants, ainsi que la valeur du coefficient  $F^*$ . On observe que l'anisotropie du sol conduit à une réduction de 24% sur la valeur de  $F^*$ . De plus, une différence apparaît dans la forme de la courbe limitant le volume en mouvement rigidifiant : on remarquera notamment que celle-ci n'est pas tangente au substratum rigide lorsque l'anisotropie du sol est prise en compte, et la similitude avec la courbe de rupture "réelle" est étonnante. La connaissance de la valeur du rapport d'anisotropie  $K_2$  permettrait un meilleur calcul ; la valeur adoptée ici

n'est pas la plus défavorable et l'évaluation obtenue est déjà très significative.

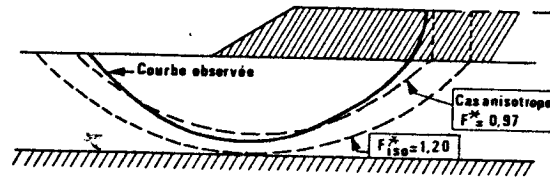


Figure 14 : Remblai de Cubzac-les-Ponts : mécanismes par bloc rigide optimaux.

## 4 - CONCLUSION

Après les considérations historiques, développées au chapitre 1, le lecteur était peut-être en droit de s'interroger sur l'utilité, pour le mécanicien des sols, de bâtir une théorie du calcul à la rupture.

Certes, nous l'avons dit, le raisonnement du calcul à la rupture avait donné naissance à des méthodes de calcul, pour la stabilité des ouvrages en sols frottants en particulier, s'étaient quelque peu éloignés de la rigueur mécanique ; mais l'expérience accumulée par les constructeurs n'était-elle pas venue pallier ces insuffisances en conduisant à dégager un seuil de confiance pour le coefficient "de sécurité" déduit de chaque méthode ?

Il nous paraît pourtant que la mise en forme de la théorie du calcul à la rupture présente plusieurs avantages :

- ♦ bien dégager les aspects statiques ou cinématiques des raisonnements utilisés ;
- ♦ permettre une présentation des diverses méthodes classiques plus cohérente avec la mécanique, en y montrant l'origine des difficultés rencontrées, les hypothèses faites, leurs fondements intuitifs issus de l'imagination du constructeur ; donner aux résultats obtenus leur véritable signification ;
- ♦ permettre le développement, sur des bases mécaniques rigoureuses, de méthodes d'étude pour des problèmes nouveaux, tels que les analyses de stabilité sur sols cohérents anisotropes dont un exemple a été présenté au chapitre 3.

## REFERENCES

BEREZANCEW B.G. (1952) - *Problème de l'équilibre limite d'un milieu pulvérulent en symétrie axiale*, Ed. Litt. Techn. Theor., Moscou.

BAKER R., GARBER M. (1978) - *Theoretical analysis of the stability of slopes*, Géotechnique, vol.28, n°4, pp.395-411.

BISHOP A.W. (1966) - *The strength of soils as engineering materials*, Géotechnique, 16, 2, pp.89-130.

BISHOP J.F.W. (1953) - *On the complete solution to problem of deformations of a plastic rigid material*, J. Mech. Phys. Solids, vol.2, n°1, pp.43-53.

- BOEHLER J.P. (1975) - *Contributions théoriques et expérimentales à l'étude des milieux plastiques anisotropes*, Thèse de doctorat es-sciences, Univ. Sc. et Méd. de Grenoble.
- BOEHLER J.P. (1978) - *Lois de comportement anisotrope des milieux continus*, Journal de Mécanique, 17, 2, pp. 153-190.
- BROMS B.B. et CASBARIAN A.O. (1965) - *Effects of rotation of the principal stress axes and of the intermediate principal stress on the shear strength*, Proceedings 6th. Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Montréal, 1, pp. 179-183.
- CASAGRANDE A. et CARRILLO N. (1944) - *Shear failure of anisotropic materials*, J. Boston Soc. Civil Eng., 31, 4, pp. 74-87.
- CHEN W.F. (1975) - *Limit analysis and soil plasticity*, Elsevier Sc. Publ. Co., Amsterdam.
- COULOMB C.A. (1773) - *Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*, Mémoire présenté à l'Académie Royale des Sciences.
- COUSSY O. (1978) - *Le calcul à la rupture dans la tenue des ouvrages en terre*, Th. Doct. Ing., Univ. P. et M. Curie, Paris.
- COUSSY O. et SALENÇON J. (1979) - *Analyse de la stabilité des ouvrages en terre par le calcul à la rupture*, Ann. des Ponts et Ch., n°12, pp. 7-35.
- DAVIS E.H. et CHRISTIAN J.T. (1971) - *Bearing capacity of anisotropic cohesive soils*, J. of the Soil Mech. and Found. div. ASCE, vol.97, n°SM5, pp.753-769.
- DELBECQ J.M. (1981) - *Analyse de la stabilité des voûtes en maçonnerie de C.A. Coulomb à nos jours*, Ann. Ponts et Ch., n° spécial du 150ème Anniversaire, pp. 36-43.
- DELBECQ J.M. (1982) - *Analyse de la stabilité des voûtes en maçonnerie par le calcul à la rupture*, A paraître au Journal de Mécanique Théorique et Appliquée.
- DUNCAN J.M. et SEED H.B. (1966) - *Anisotropy and stress reorientation in clay*, J. of Soil Mech. and Found. div., ASCE, 92, SM6, pp. 21-50.
- FELLENIOUS W. (1936) - *Calculation of stability of earth dams*, 2e Congr. Int. grands barrages, Washington D.C., vol.4, p. 445.
- FREMOND M. et FRIAA A. (1978) - *Comparaison des méthodes statique et cinématique*, C.R. Ac. Sc. Paris t.286, série A, p. 107.
- FRIAA A. (1979) - *La loi de Norton-Hoff généralisée en plasticité et viscoplasticité*, Thèse Doct. Es. Sc. Univ. P. et M. Curie, Paris.
- GALILEE G. (1638) - *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nueve scienze*, Dialogo Secundo, Leyden.
- HENCKY H. (1923) - *Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern*, Z. Angew. Math. Mech., Vol 3, pp. 241-251.
- HEYMAN J. (1966) - *The stone skeleton*, Int. J. Solids and Structures, vol.2, n°2, pp. 249-279.
- HEYMAN J. (1969) - *The safety of masonry arches*, Int. J. Mech. Sc., vol. 11, pp. 363-385.
- HEYMAN J. (1972) - *Coulomb's memoir on statics : an essay in the history of civil engineering*, Cambridge G.B.
- HEYMAN J. (1980) - *The estimation of the strength of masonry arches*, Proc. ASCE, Part.2, n°69, pp.921-937.
- HILL R. (1950) - *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford, G.B.
- JOSSEAUME H. BLONDEAU, et PILOT G. (1977) - *Etude du comportement non drainé de trois argiles molles*, Application au calcul des remblais, Bull. Liais. Labo. Ponts et Ch., spécial VI F, pp. 120-128.
- KOTTER F. (1903) - *Die Bestimmung des Druches an Gebrümmeten Blattflächen, eine Aufgabe aus der Lehre von Erddruck*. Berl. Akod. Bericht., p. 229.
- KOTTER F. (1909) - *Über den Druck vom Sand*, Berlin Adad. Bericht.
- LO K.Y. (1965) - *Stability of slopes in anisotropic soils*, J. of the Soil Mech. and Found. div. ASCE, 91, pp. 85-106.
- LO K.Y. et MILLIGAN V. (1967) - *Shear strength properties of two stratified clays*, J. of the Soil Mech. and Found. Div., ASCE, 93, SM1, pp. 1-15.
- MANDEL J. (1942) - *Equilibre par tranches planes des solides à la limite d'écoulement*, thèse Dr. Sc. (éd. Louis Jean, Gap), voir aussi "Travaux", juin-Juillet-décembre 1943.
- MASSAU J. (1899) - *Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles*, Chap. IV, *Equilibre limite des terres sans cohésion*, Ann. Ass. Ing. Ec. Gand (1899) - Rééd. Edition du Centenaire, Comité Nal de Mécanique, Bruxelles.(1952).
- MATAR M. et SALENÇON J. (1979) - *Capacité portante des semelles filantes*, Revue Française de Géotechnique n°9, pp. 51-76.
- MOREAU J.J. (1966) - *Fonctionnelles convexes*, Séminaire.
- PRAGER W. (1972) - *Limit analysis : the development of a concept in Problems of plasticity*, C.R. Symp. Varsovie, ed. A.Sawczuk, Nordhoff Int. Pub.
- PRANDTL L. (1920) - *Über die Härte plastischer Körper*, Göttinger Nachrichten, Mat. Phys.
- PRANDTL L. (1923) - *Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht*, Z. Angew., Math. Mech., 3, p. 401.

- RENDULIC L. (1935) - *Ein Beitrag zur Bestimmung der Gleitsicherheit*, Der Bauingenieur, n°19/20.
- REVILLA J. et CASTILLO E. (1977) - *The calculus of variations applied to stability of slopes*, Géotechnique vol.27, n°1, pp. 1-11.
- SAADA A.S. et ZAMANI K.K. (1969) - *The mechanical behaviour of cross anisotropic clays*, Proc. 7th Int. Conf. Soil Mech. and Found Eng., Mexico, 1, pp. 351-359.
- SAADA A.S. et BIANCHINI G. (1975) - *Strength of one dimensionally consolidated clays*, J. of the Geo. Eng. Div., ASCE, 101, GT 11, pp. 1151-1164.
- SALENÇON J. (1974) - *Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols*, Eyrolles, Paris.
- SALENÇON J. (1976) - *Calcul à la rupture*, Cours DEA, E.N.P.C., Paris.
- SALENÇON J. (1981) - *Calcul à la rupture et analyse limite*, Cours de calcul des structures anélastiques, E.N.P.C., Paris.
- SALENÇON J. et COUSSY O. (1979) - *Analyse de la stabilité des remblais sur sols mous*, C.R. Symp. Int. des Sols, Oaxaca, Mexique, vol.1, pp. 145-153.
- SALENÇON J. et TRISTAN-LOPEZ A. (1980) - *Analyse de la stabilité des talus en sols cohérents anisotropes*, C.R. Ac. Sc. Paris, t.290, série B, pp. 493-496.
- SALENÇON J. et TRISTAN-LOPEZ A. (1981 a) - *Analyse de stabilité des ouvrages constitués de sols cohérents anisotropes*, C.R. X Cong. Int. Mec. Sols, Stockholm, Suède, vol.3, pp. 515-518.
- SALENÇON J. et TRISTAN-LOPEZ A. (1981 b) - *Force portante des semelles filantes sur sols cohérents anisotropes homogènes*, C.R. Ac. Sc. Paris, série II, t.292, pp. 1097-1102.
- SALENÇON J. et TRISTAN-LOPEZ A. (1981 c) - *Analyse de stabilité de remblais sur sols cohérents anisotropes*, Coll. Int. CNRS "Comportement Plastique des solides anisotropes", Grenoble 15-19 Juin.
- SALENÇON J. et TRISTAN-LOPEZ A. (1981 d) - *Capacité portante des fondations sur sols anisotropes*, J. de Géotechnique, ENTPE.
- SOKOLOVSKI V.V. (1960) - *Statics of soil media*, Butterworths, Londres.
- SOKOLOVSKI V.V. (1962) - *Statics of granular media*, Pergamon Press, Oxford.
- TAYLOR D.W. (1937) - *Stability of earth slopes*, J. Boston Soc. Civ. Eng., vol.24, n°3, pp. 337-386.
- TAYLOR D.W. (1948) - *Fundamentals of Soil Mechanics*, John Wiley (1960).
- TRISTAN-LOPEZ A. (1981) - *Stabilité d'ouvrages en sols anisotropes*, Th. D. Ing., E.N.P.C., Paris.