

MÉCANIQUE DES SOLIDES ANÉLASTIQUES. — Force portante des semelles filantes sur sols cohérents anisotropes homogènes. Note (*) de Jean Salençon, Correspondant de l'Académie et Agustín Tristán-López.

On détermine la capacité portante d'une semelle filante sur un sol illimité, purement cohérent, anisotrope. Les résultats obtenus étant issus de l'utilisation des approches par l'extérieur et par l'intérieur en calcul à la rupture, on peut, avec certitude, mettre en évidence le caractère souvent très conservateur d'une évaluation de la capacité portante basée sur la prise en compte de la seule cohésion minimale, et situer l'approximation faite en supposant le sol isotrope avec la cohésion mesurée sur des échantillons verticaux.

The bearing capacity of a strip footing on an infinite layer of purely cohesive anisotropic soil is determined. The results obtained within the theory of yield design have been derived from the use of approaches from outside and from inside, they enable us to point out that the evaluation of the bearing capacity relying only on the minimum cohesion of the soil may often be very conservative; the assumption of isotropy with the cohesion determined on vertical specimens is also situated.

1. POSITION DU PROBLÈME. — On étudie la force portante d'une semelle filante parallèle à Oz, de largeur B, chargée axialement par une force de densité linéique uniforme Q selon Oz, reposant sur un sol illimité, homogène, purement cohérent. On suppose que le sol est transversalement isotrope et que sa cohésion $C(\alpha)$, définie par les expériences à l'appareil triaxial classique sur des échantillons inclinés à l'angle α sur la verticale Oy, peut être représentée en fonction de α par la formule proposée par Bishop [1] qui fait intervenir trois paramètres d'anisotropie C_v , $K_1 = C_h/C_v$ et $K_2 = C_{45}/C_v$, où C_v , C_h , C_{45} sont respectivement les cohésions mesurées pour $\alpha = 0, \pi/2$ et $\pi/4$ (fig. 1) :

$$(1) \quad C(\alpha) = C_v (\cos^2 \alpha + K_1 \sin^2 \alpha) \{ \cos^2 2\alpha + [2K_2/(1+K_1)] \sin^2 2\alpha \}.$$

On suppose de plus que le contact entre la fondation et le sol se fait avec adhérence parfaite (fondation rugueuse).

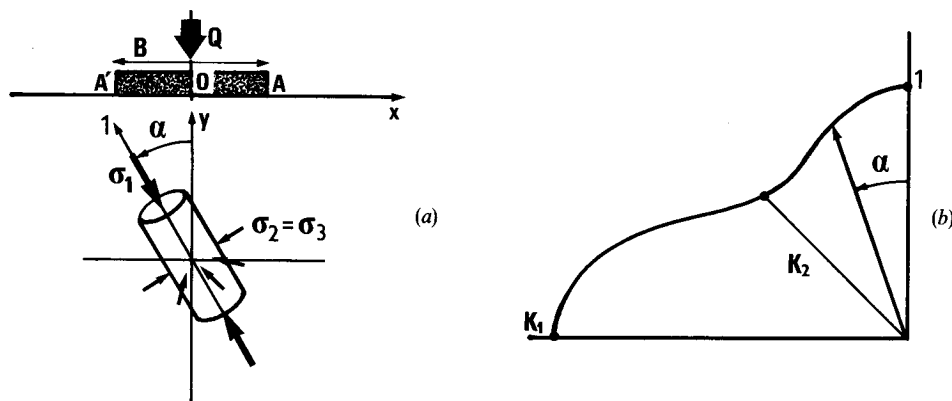


Fig. 1. — a, semelle filante sur sol cohérent anisotrope; b, diagramme polaire de $C(\alpha)/C_v$ pour $K_1 = 1,4$, $K_2 = 0,8$.

2. FONDEMENTS THÉORIQUES DE L'ÉTUDE. — La notion de force portante d'une fondation ressortit à la théorie du calcul à la rupture puisque ce type d'analyse ne fait intervenir le sol de fondation que par ses caractéristiques de résistance [2]. Plus précisément :

— la géométrie du problème est fixée, ainsi que le processus de chargement de la fondation (ici : chargement axial);

— on donne le critère de résistance du sol défini par $f[\underline{\sigma}(\underline{x})] \leq 0$, où $\underline{\sigma}(\underline{x})$ désigne le tenseur contrainte au point \underline{x} du sol, les contraintes étant comptées positivement en compression;

— et on examine la compatibilité entre les équations d'équilibre quasi-statique pour le système (exigence de stabilité) et les capacités de résistance du sol de fondation.

La théorie du calcul à la rupture [3] permet de montrer que si le domaine de résistance du sol de fondation est étoilé par rapport à $\underline{\sigma}(\underline{x})=0$, il existe une valeur Q^+ telle que :

$$(2) \quad 0 \leq Q \leq Q^+ \Leftrightarrow \text{compatibilité « équilibre-résistance » assurée.}$$

Cette valeur est par définition la force portante de la fondation étudiée, souvent caractérisée par la capacité portante Q^+ / B .

De (2) résulte immédiatement la méthode d'approche par l'intérieur, évaluant par défaut la force portante : la construction d'un champ de contrainte $\underline{\sigma}$ statiquement admissible et tel que $f[\underline{\sigma}(\underline{x})] \leq 0$ dans tout le massif, fournit une borne inférieure pour Q^+ .

La méthode d'approche par l'extérieur, évaluant par excès la force portante, au moyen de champs de vitesse, s'obtient par dualisation par le principe des puissances virtuelles. En se restreignant ici aux champs de vitesse en déformation plane compte tenu de la forme du problème :

— soit \underline{v} un champ de vitesse cinématiquement admissible pour le problème, continûment différentiable par morceaux, et dans lequel la vitesse verticale descendante en 0 est U;

— on désigne par $\underline{d}(\underline{x})$ la vitesse de déformation en \underline{x} définie à partir de \underline{v} , et par $[\underline{v}(\underline{x})]$ la discontinuité de la vitesse en \underline{x} au franchissement de la ligne de discontinuité Σ selon sa normale $\underline{n}(\underline{x})$;

— on définit les fonctions :

$$(3) \quad \Pi[\underline{d}(\underline{x})] = \text{Sup} \{ -\underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{d}(\underline{x}) \mid f[\underline{\sigma}(\underline{x})] \leq 0 \}$$

(le symbole : indique le produit doublement contracté) :

$$(4) \quad \Pi[\underline{n}(\underline{x}); [\underline{v}(\underline{x})]] = \text{Sup} \{ -[\underline{v}(\underline{x})] \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \mid f[\underline{\sigma}(\underline{x})] \leq 0 \},$$

— et on montre, en application de la théorie générale [3], que l'on a :

$$(5) \quad Q^+ U \leq \int_{(Oxy)} \Pi[\underline{d}(\underline{x})] dS + \int_{\Sigma} \Pi[\underline{n}(\underline{x}); [\underline{v}(\underline{x})]] dl = P(\underline{v}).$$

Ainsi, fixant U, on est amené à minimiser $P(\underline{v})$ sur l'ensemble des champs cinématiquement admissibles correspondants.

3. CRITÈRE DE RÉSISTANCE ET FONCTIONS Π POUR LE SOL ANISOTROPE CONSIDÉRÉ. — A partir de la formule de Bishop adoptée pour représenter les résultats d'un type particulier d'expériences nous construisons le critère de résistance en faisant l'hypothèse que seules y interviennent les valeurs des contraintes principales extrêmes $\sigma_1(\underline{x})$ et $\sigma_3(\underline{x})$, et l'inclinaison sur Oy de la direction $\underline{l}(\underline{x})$ de la contrainte principale compressive majeure $\sigma_1(\underline{x})$ soit $\alpha(\underline{x})$; d'où :

$$(6) \quad f[\underline{\sigma}(\underline{x})] = \sigma_1(\underline{x}) - \sigma_3(\underline{x}) - 2C[\alpha(\underline{x})],$$

avec $\alpha(\underline{x}) = (\underline{Oy}, \underline{1}(\underline{x}))$ et $C(\alpha)$ donné par (1). Le domaine de résistance défini par ce critère, s'il n'est pas toujours convexe, est toujours étoilé par rapport à $\underline{\sigma}(\underline{x}) = 0$.

A partir de la définition (2) on peut alors, par un raisonnement classique, montrer que Q^+ est indépendant du poids volumique du sol (on raisonnera donc dans la suite en supposant le sol non pesant); l'analyse dimensionnelle conduit à :

$$(7) \quad Q^+(C_v, K_1, K_2, B)/B = C_v \varphi(K_1, K_2),$$

où φ est une fonction scalaire de K_1 et K_2 .

En appliquant (3) et (4) on obtient pour les fonctions Π :

$$\Pi[\underline{d}(\underline{x})] = +\infty \quad \text{si } \text{tr}[\underline{d}(\underline{x})] \neq 0,$$

et :

$$\Pi[\underline{d}(\underline{x})] = \text{Max}_{\alpha} \{ -2 C(\alpha) d_1(\underline{x}) \cos 2[\beta(\underline{x}) - \alpha] \} = C_v d_1(\underline{x}) \pi[\beta(\underline{x})],$$

si $\text{tr} \underline{d}(\underline{x}) = 0$, avec $d_1(\underline{x})$ vitesse de déformation principale positive et $\beta(\underline{x}) = (\underline{Oy}, \underline{d}_1(\underline{x}))$.

En introduisant le vecteur unitaire $\underline{t}(\underline{x})$ défini par $(\underline{n}(\underline{x}), \underline{t}(\underline{x})) = +\pi/2$ et en posant :

$$[\underline{v}(\underline{x})] \cdot \underline{n}(\underline{x}) = v_n(\underline{x}), \quad [\underline{v}(\underline{x})] \cdot \underline{t}(\underline{x}) = v_t(\underline{x}), \quad \varepsilon(\underline{x}) = (\underline{Oy}, \underline{n}(\underline{x})),$$

il vient :

$$\Pi(\underline{n}(\underline{x}); [\underline{v}(\underline{x})]) = +\infty \quad \text{si } v_n(\underline{x}) \neq 0,$$

et :

$$\Pi(\underline{n}(\underline{x}); [\underline{v}(\underline{x})]) = \text{Max}_{\alpha} \{ C(\alpha) v_t(\underline{x}) \sin 2[\varepsilon(\underline{x}) - \alpha] \},$$

si $v_n(\underline{x}) = 0$, que l'on met sous la forme :

$$C_v |v_t(\underline{x})| \pi_+(\varepsilon(\underline{x})) \quad \text{si } v_t(\underline{x}) > 0$$

et :

$$C_v |v_t(\underline{x})| \pi_-(\varepsilon(\underline{x})) \quad \text{si } v_t(\underline{x}) < 0.$$

Les fonctions π , π_+ et π_- se calculent numériquement selon les valeurs de K_1 et K_2 .

4. UTILISATION DE L'APPROCHE PAR L'INTÉRIEUR. — (a) Une borne inférieure pour Q^+ s'obtient facilement en considérant le matériau isotrope dont la cohésion est $C_i = \text{Min}_{\alpha} C(\alpha)$.

La capacité portante de la fondation sur un tel sol homogène et isotrope, est connue exactement (cf. par exemple [4]), égale à $(\pi + 2) C_i$; on en déduit pour le problème actuel :

$$(8) \quad \varphi(K_1, K_2) \geq (\pi + 2) C_i / C_v.$$

(b) Afin d'améliorer dans certains cas cette minoration, on considère la classe des champs de contrainte discontinus représentés sur la figure 2 a : 11 zones parallèles à Oz dans lesquelles $\underline{\sigma}$ est homogène et où σ_{zz} est contrainte principale dont la valeur est prise égale à la contrainte principale mineure dans Oxy . Tenant compte de la continuité de la contrainte au franchissement des lignes séparant les diverses zones, on impose de plus à $\underline{\sigma}$ de satisfaire $f=0$ dans tout le massif à l'exception des zones 5 et 7 : ceci détermine les directions principales des contraintes dans chaque zone, $\underline{\sigma}$ est alors proportionnel à C_v et ne dépend que de deux paramètres géométriques β_1 et β_2 , et de K_1 et K_2 .

Pour chaque valeur de K_1 et K_2 on maximise $Q(\underline{\sigma})/BC_v$, par rapport à β_1 et β_2 , où $Q(\underline{\sigma})$ est la charge axiale équilibrée par $\underline{\sigma}$, et on vérifie que le champ $\underline{\sigma}$ correspondant satisfait bien $f[\underline{\sigma}(x)] \leq 0$ dans les zones 5 et 7 : la valeur maximale trouvée est une borne inférieure pour $\varphi(K_1, K_2)$ soit $\varphi_i(K_1, K_2)$, à comparer à (8).

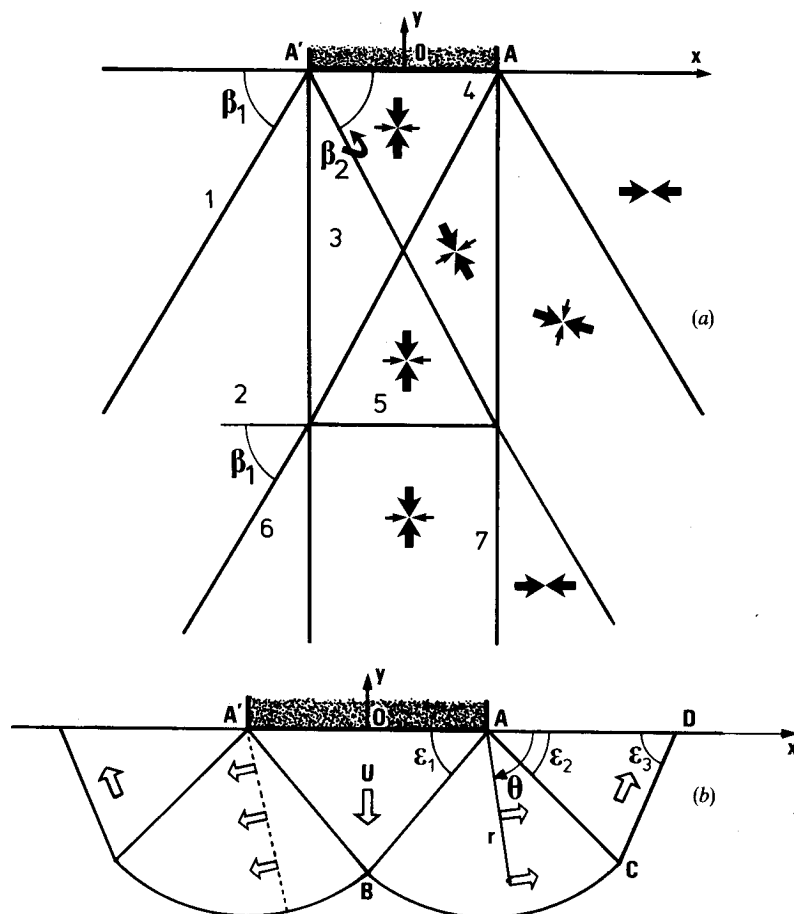


Fig. 2. — Semelle filante sur sol homogène :
a, approche par l'intérieur; b, approche par l'extérieur.

5. UTILISATION DE L'APPROCHE PAR L'EXTÉRIEUR. — On considère le champ de vitesse en déformation plane, sans variation de volume, symétrique par rapport à Oy , constitué comme suit (fig. 2 b) :

- dans ABA' : translation verticale descendante de vitesse U ;
- franchissement de BA : $v_n(\underline{x})=0$, $v_t(\underline{x})=U \sin \varepsilon_1$;
- dans ABC (secteur circulaire), en coordonnées polaires de centre A et d'axe Ax :

$$v_r(r, \theta)=0, \quad v_\theta(r, \theta)=U \cos \varepsilon_1,$$

d'où pour $\underline{d}(\underline{x})$: $\beta(r, \theta)=\theta+\pi/4$ et $d_1(r, \theta)=U \cos \varepsilon_1/2r$:

- franchissement de BC : $v_n(\underline{x})=0$, $v_t(\underline{x})=-U \cos \varepsilon_1$;
- franchissement de AC : $v_n(\underline{x})=0$, $v_t(\underline{x})=-U \cos \varepsilon_1/\text{tg}(\varepsilon_2+\varepsilon_3)$;

- dans ACD : translation parallèle à \underline{CD} de vitesse $U \cos \varepsilon_1 / \sin(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$;
- franchissement de CD : $v_n(\underline{x}) \equiv 0$, $v_t(\underline{x}) \equiv -U \cos \varepsilon_1 / \sin(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$.

Le calcul de $P(v)$ s'appuie sur les formules données plus haut, en tenant compte des symétries de $C(\alpha)$ et donc des fonctions $\pi(\beta)$, $\pi_+(\varepsilon)$ et $\pi_-(\varepsilon)$ déterminées numériquement. Pour chaque valeur de K_1, K_2 , le rapport $P(v)/BUC_v$ est une majoration pour $\varphi(K_1, K_2)$ qui dépend des trois paramètres du champ v : $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 ; en la minimisant par rapport à $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 on obtient une borne supérieure de $\varphi(K_1, K_2)$, soit $\varphi_s(K_1, K_2)$.

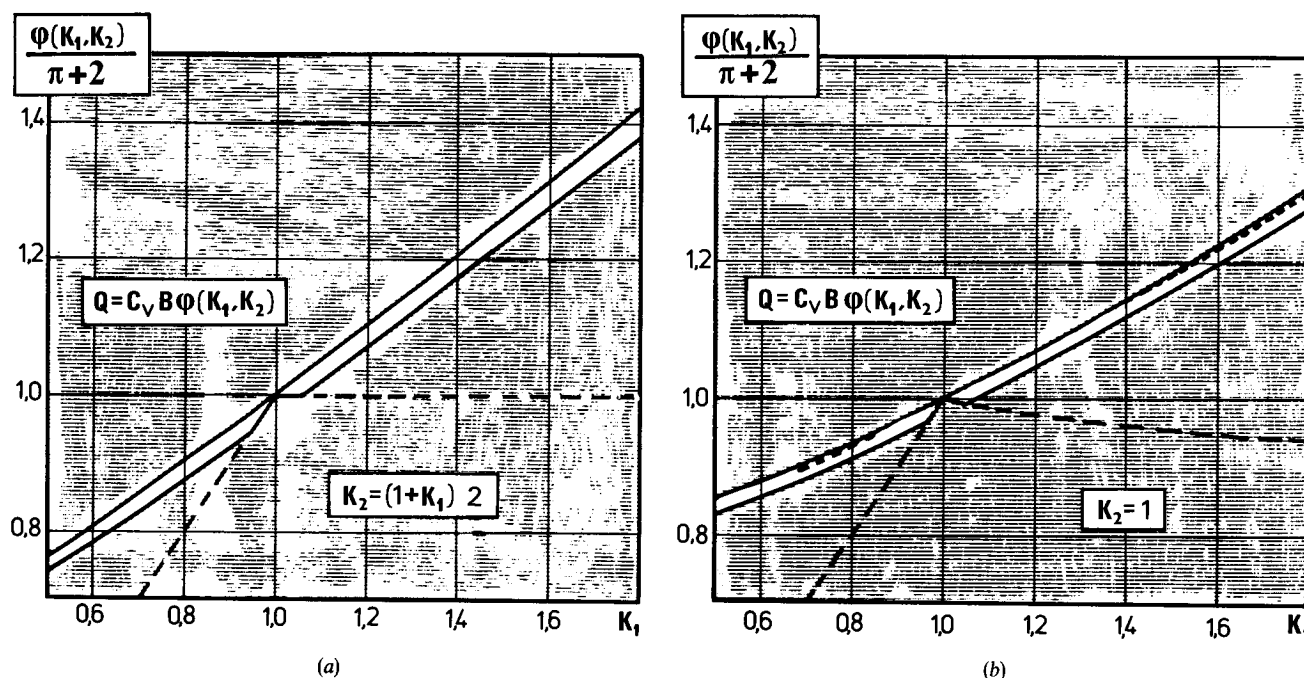


Fig. 3. — Résultats obtenus par les deux approches :
a, sol de Casagrande-Carrillo; b, cas où $K_2 = 1$.

6. RÉSULTATS ET COMMENTAIRES. — La figure 3 a présente les résultats obtenus dans le cas où les paramètres K_1 et K_2 sont liés par la relation $K_2 = (1 + K_1)/2$, ce qui correspond pour $C(\alpha)$ à la formule proposée par Casagrande et Carrillo [5]. On remarque que l'encadrement de $\varphi(K_1, K_2)$ est particulièrement bon (moins de 3 % d'écart); la comparaison de $\varphi(K_1, K_2)$ avec la valeur $(\pi + 2)$ est significative car elle permet de juger de l'erreur commise en supposant le sol isotrope et en n'effectuant que des essais sur des échantillons prélevés verticalement; les prolongements de courbes en tiretés rappellent la borne inférieure (8) et mettent en évidence l'utilité des résultats obtenus, par rapport à cette évaluation conservatrice banale. La figure 3 b présente les résultats pour un autre cas typique, sur lequel on peut faire les mêmes constatations que ci-dessus.

La comparaison avec les évaluations proposées par d'autres auteurs n'est pas aisée en raison des différences dans les formules adoptées pour décrire la résistance du sol ([6], [7]). A titre d'exemple, pour faire la comparaison avec l'analyse de Davis et Christian [7], nous y avons identifié les valeurs des cohésions C_v, C_h, C_{45} avec celles intervenant dans (1). Dans le cas de la figure 3 a les domaines de résistance correspondant aux deux critères sont

identiques, et on constate que l'analyse de ces auteurs, dont l'interprétation est cinématique, coïncide avec l'approche par l'extérieur ci-dessus; l'approche par l'intérieur vient évidemment en renforcer l'intérêt. Dans le cas de la figure 3 b, les domaines de résistance sont différents mais les résultats de [7] se placent néanmoins dans le fuseau trouvé (courbe en pointillé).

(*) Remise le 27 avril 1981.

[1] A. W. BISHOP, *Géotechnique*, 16, n° 2, 1966, p. 89-130.

[2] M. MATAR et J. SALENÇON, *Revue française de Géotechnique*, n° 9, 1979, p. 51-76.

[3] J. SALENÇON, *Calcul à la rupture et analyse limite*, cours E.N.P.C., 1980, p. 6-37.

[4] J. F. W. BISHOP, *J. Méc. Phys. Solids*, 2, n° 1, 1953, p. 43-53.

[5] A. CASAGRANDE et N. CARRILLO, *Contributions to Soil Mechanics*, B.S.C.E., 1941-1953, 1944, p. 122-135.

[6] J. P. BOEHLER et A. SAWCZUK, *J. Mécan.*, 9, n° 1, p. 5-33.

[7] E. H. DAVIS et J. J. CHRISTIAN, *J. Soil Mech. and Found. Div. (Proc. A.S.C.E.)*, 97, n° SM5, 1971, p. 753-769).

Laboratoire de Mécanique des Solides, École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.