

## Analyse de Stabilité de Remblais sur Sols Cohérents Anisotropes

J. Salençon

*Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Laboratoire de Mécanique des Solides, Palaiseau, France.*

A. Tristán-López

*Centre de Recherches en Electricité et en Electronique, Cuernavaca, Mexique.*

**Résumé.** – On propose une méthode d'analyse de la stabilité d'un remblai en sol isotrope reposant sur une couche de sol purement cohérent anisotrope. Issue de la théorie de l'approche par l'extérieur en calcul à la rupture, cette méthode utilise des champs de vitesse par blocs rigides et peut être mise en œuvre à partir de la seule définition des critères de résistance des matériaux constitutifs. L'application en est faite dans le cas où le sol d'assise est transversalement isotrope, caractérisé par un critère de résistance tridimensionnel indépendant de la contrainte principale intermédiaire et qui fait intervenir deux rapports d'anisotropie (formule de Bishop pour décrire le diagramme polaire de cohésion). Les résultats présentés concernent, d'une façon générale, l'influence de l'anisotropie sur la stabilité, ainsi que l'analyse du cas particulier d'un remblai réel sur lequel on a mis en évidence une réduction de quelque 20 % sur la valeur du coefficient de rupture due à l'anisotropie, et la très bonne coïncidence entre la ligne de rupture "observée" et la ligne "faible" déterminée par la méthode.

**Abstract.** – *Stability Analysis of Embankments on Anisotropic Cohesive Soils.* – Stability analysis of an embankment resting on a layer made of an anisotropic purely cohesive soil is studied. A method is proposed, derived from the theory of yield design, which makes use of rigid block mechanisms; it can be used once the strength criteria of the soils are defined. The method is applied to the case of a transversally isotropic soil layer the 3-dimensional strength criterion of which is independent of the intermediate principal stress and refers to two ratios to characterize the anisotropy. Results are presented dealing with the influence of anisotropy on stability from a general point of view, and with the particular case of a full-scale experimental embankment: a reduction of more than 20 % of the yield factor, due to the soil anisotropy, has been found, together with a good agreement between the "observed" failure line and the "weak" line derived from the method.

### 1. Introduction

La stabilité des ouvrages en terre (tels que pentes, talus et remblais) a fait l'objet d'un grand nombre d'études par les mécaniciens des sols, en supposant

l'isotropie des matériaux constitutifs. La plupart des méthodes employées se rattachent à l'approche par l'extérieur de la théorie du calcul à la rupture, soit dans son aspect statique, soit dans son aspect cinématique [6, 9, 18, 25].

Afin de procéder à l'analyse de la stabilité d'ouvrages constitués de sols anisotropes, certains auteurs ont tenté d'adapter les méthodes classiques de façon à prendre en compte l'anisotropie du matériau en s'appuyant sur des constatations expérimentales et des considérations mécaniques parfois incompatibles entre elles [8, 15].

Un exemple de problème réel conduisant à une analyse de stabilité avec matériau anisotrope est fourni par le remblai expérimental de Cubzac-les-Ponts (France) représenté à la Figure 1 (rappelons que ce remblai a été construit jusqu'à atteindre la rupture).

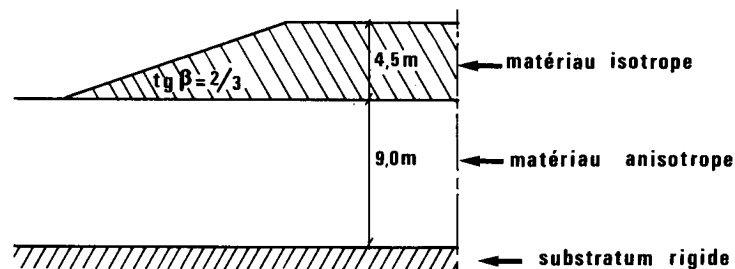


Figure 1. — Remblai de Cubzac-les-Ponts.

L'étude réalisée par Josseaume et coll. [14] a mis en évidence la nature anisotrope du sol d'assise : ainsi, des essais de compression et d'extension à l'appareil triaxial cylindrique ont été effectués par ces auteurs qui ont montré que le rapport de la résistance en extension à la résistance en compression était de 0,58. Ceci a conduit à penser à une influence possible de l'anisotropie sur la stabilité de l'ouvrage.

Le problème posé est donc de construire, sur des bases mécaniques cohérentes, une méthode d'analyse de stabilité de l'ouvrage tenant compte de l'anisotropie, et de déterminer l'influence de cette anisotropie sur la stabilité. Pour cela nous nous appuyerons sur la théorie du calcul à la rupture une fois convenablement caractérisées les capacités de résistance du sol anisotrope.

Les idées générales de la théorie du calcul à la rupture sont exposées au § 2, où nous nous intéressons particulièrement à la méthode d'approche par l'extérieur pour l'étude de la stabilité des remblais. Pour caractériser les propriétés de résistance des sols purement cohérents anisotropes, nous proposons au § 3 un critère qui rend compte des résultats obtenus expérimentalement.

A partir de la connaissance des capacités de résistance des sols étudiés, nous calculons les fonctions  $\pi$  qui doivent intervenir dans la méthode cinématique d'approche par l'extérieur (§ 4). Dans ce même chapitre nous définissons le *coefficient de rupture* pour l'analyse de stabilité d'un ouvrage,  $F$ , ainsi que la façon d'obtenir un majorant de  $F$ , appelé  $F^*$ , à l'aide de mécanisme par bloc rigide.

L'application de la méthode au cas du remblai de Cubzac-les-Ponts est faite au § 5, où nous étudions également l'influence de l'anisotropie sur la valeur du coefficient  $F^*$  et sur la forme du mécanisme optimal pour le problème de stabilité des remblais sur sols anisotropes.

## 2. La théorie du calcul à la rupture appliquée à la stabilité des remblais

### 2.1. Le problème étudié

Considérons un sol de poids volumique  $\gamma_1$ , d'épaisseur  $D$  limité par un substratum rigide. Sur ce matériau nous supposons posé un remblai de géométrie connue (largeur  $L$ , hauteur  $H$ , pente  $\beta$ , longueur indéfinie), de poids volumique  $\gamma$ . Les capacités de résistance de ces deux matériaux sont définies à l'aide des critères de résistance  $f_1[\sigma(x)] \leq 0$  et  $f_2[\sigma(x)] \leq 0$  respectivement (Fig. 2).

*Est-il possible que cet ouvrage soit stable ?*

Une condition nécessaire pour que l'ensemble remblai-sol d'assise soit stable est qu'il existe en tout point  $x$  un champ de contrainte  $\sigma(x)$  en équilibre avec le chargement imposé  $Q = (\gamma, \gamma_1)$  et qui soit compatible avec les critères définissant les capacités de résistance des matériaux. Cette condition n'étant que nécessaire on dira que l'ouvrage est "potentiellement stable" (ou

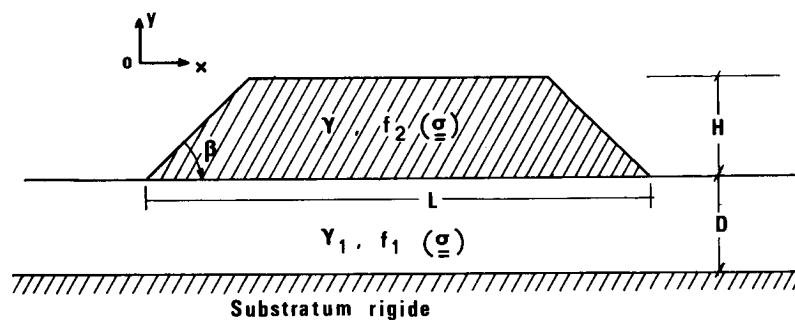


Figure 2. – Stabilité d'un remblai.

que  $Q$  est un chargement "potentiellement supportable") lorsque la compatibilité entre l'équilibre quasi-statique sous  $Q$  et les capacités de résistance des matériaux est satisfaite.

Nous écrirons :

$$(2.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{ouvrage "potentiellement stable"} \\ \text{(Q "potentiellement supportable")} \\ \updownarrow \\ \exists \sigma \text{ statiquement admissible dans le mode de chargement,} \\ \text{équilibrant Q et tel que pour tout point x de l'ouvrage :} \\ \sigma(x) \in G(x) = \left\{ \sigma(x) \left| \begin{array}{l} f_1[\sigma(x)] \leq 0 \text{ pour le sol d'assise} \\ f_2[\sigma(x)] \leq 0 \text{ pour le matériau du remblai} \end{array} \right. \right\} \end{array} \right\}$$

L'ensemble des chargements potentiellement supportables représenté dans l'espace à deux dimensions  $(\gamma, \gamma_1)$  sera désigné par  $K$ . On démontre à partir de (2.1) et par les propriétés des domaines  $G(x)$  associés à  $f_1[\sigma(x)]$  et  $f_2[\sigma(x)]$  que  $K$  contient le chargement nul et qu'il est étoilé par rapport à 0. Les chargements  $Q^+$  de la frontière de  $K$  sont appelés *chargements extrêmes*.

### 2.2. Approche par l'intérieur

Rappelons pour mémoire, car cette méthode ne sera pas utilisée dans la suite, que le domaine  $K$  peut être construit par l'intérieur, point par point, à l'aide de la condition suffisante incluse dans (2.1). La détermination du chargement extrême pour un trajet de charge radial revient à résoudre un problème de maximisation.

### 2.3. Approche par l'extérieur par les contraintes

Si la condition (2.1) ne permet pas de donner une certitude de stabilité, il est possible par contre de conclure que l'ouvrage est *instable* lorsque la compatibilité n'est pas satisfaite entre l'équilibre quasi-statique sous le chargement  $Q$  et les capacités de résistance du matériau :

$$(2.2) \left\{ \begin{array}{l} \text{ouvrage certainement instable} \\ \text{(Q non supportable)} \\ \updownarrow \\ \text{incompatibilité} \left\{ \begin{array}{l} \text{équilibre quasi-statique sous Q} \\ \text{capacités de résistance du matériau} \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Cette condition permet d'approcher le domaine  $K$  par l'extérieur par les contraintes. Dans le type d'ouvrage qui nous intéresse il est courant de procéder à l'analyse de stabilité en définissant un bloc  $\Gamma$  séparé du massif par une courbe telle que  $\widehat{AB}$  tracée à travers le remblai et le sol d'assise dont on examine la stabilité globale (Fig. 3). Il résulte de (2.2) que pour que l'ouvrage soit potentiellement stable il faut que l'équilibre global du volume  $\Gamma$  soit possible en respectant le long de  $\widehat{AB}$  les capacités de résistance des matériaux ; tout chargement  $Q$  pour lequel cette condition n'est pas vérifiée ne sera pas supportable.

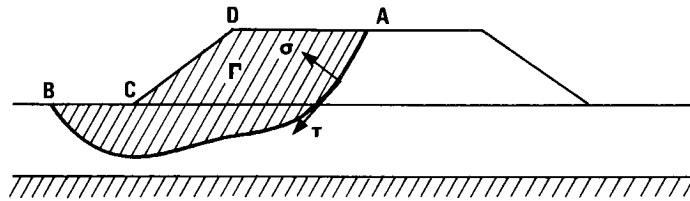


Figure 3. – Equilibre d'un bloc.

#### 2.4. Approche par l'extérieur par les vitesses

Une évaluation par excès du chargement  $Q^+$  est obtenue plus commodément en dualisant la démarche précédente à l'aide du principe des puissances virtuelles. Considérons un champ de vitesse  $v$ , cinématiquement admissible dans le mode de chargement, continu et différentiable, par morceaux ; on définit à partir de  $v$  le champ  $d$  des vitesses de déformation dans un volume  $\Gamma$  et la discontinuité de vitesse  $[[v(x)]]$  au franchissement de la surface de discontinuité de vitesse  $\Sigma$ , de normale  $n(x)$  (Fig. 4).

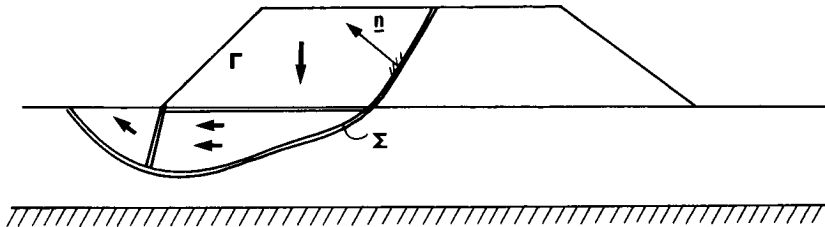


Figure 4. – Approche par l'extérieur par les vitesses.

La méthode d'approche par l'extérieur du calcul à la rupture montre qu'une condition suffisante pour que l'ouvrage soit instable est :

$$(2.3) \left\{ \begin{array}{l} \text{à } \mathbf{Q} \text{ donné} \\ \exists \mathbf{v} \text{ cinématiquement admissible} \\ P(\mathbf{v}) < P_e(\mathbf{Q}, \mathbf{v}) \\ \Downarrow \\ \text{ouvrage instable} \end{array} \right.$$

où  $P_e(\mathbf{Q}, \mathbf{v})$  désigne la puissance des forces extérieures, c'est-à-dire la puissance de  $\mathbf{Q}$ , dans  $\mathbf{v}$  et

$$(2.4) \quad P(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma} \pi(\mathbf{d}(\mathbf{x})) \, d\Gamma + \int_{\Sigma} \pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket) \, d\Sigma$$

avec

$$(2.5) \left\{ \begin{array}{l} \pi(\mathbf{d}(\mathbf{x})) = \text{Sup}_{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})} \{-\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x})) \mid \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in G(\mathbf{x})\} \\ \pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket) = \text{Sup}_{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})} \{-\llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \mid \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in G(\mathbf{x})\} \end{array} \right.$$

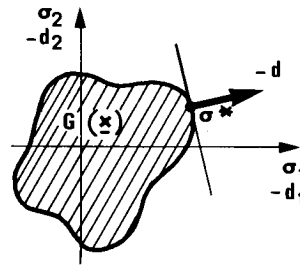
(Nous utilisons dans ce travail la convention de signes de la mécanique des sols pour les contraintes, à savoir : normale rentrante positive et donc contraintes comptées positivement en compression. Les vitesses de déformation sont toujours considérées positives en extension).

Les fonctions  $\pi(\mathbf{d}(\mathbf{x}))$  et  $\pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket)$ , pour un critère de résistance donné, peuvent prendre des valeurs finies ou infinies selon le choix du champ  $\mathbf{v}$ .

Une illustration géométrique du calcul des fonctions "π" est donnée sur la Figure 5, dans un espace à deux dimensions pour  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ <sup>1</sup>, où nous schématisons la recherche de la valeur maximale de la fonction  $M = -\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x}))$ , à  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$  donnée, quand  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  parcourt le domaine  $G(\mathbf{x})$ . Le maximum est obtenu pour des points  $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x})$  sur la frontière de  $G(\mathbf{x})$  pour lesquels la normale extérieure est dirigée selon  $-\mathbf{d}(\mathbf{x})$  et qui maximisent  $M$ <sup>2</sup>. Il est clair que dans le cas où le domaine n'est pas borné, la maximisation est triviale et les fonction "π" prennent des valeurs infinies.

<sup>1</sup> Il s'agit ici d'une simple illustration :  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $d_1$ ,  $d_2$  n'ont pas la signification de valeurs principales.

<sup>2</sup> Il n'est utile de préciser que  $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x})$  doit maximiser  $M$ , que dans le cas où  $G(\mathbf{x})$  n'est pas convexe.

Figure 5. – Calcul de la fonction  $\pi(d(x))$ .

La méthode d'approche par l'extérieur présente alors un intérêt lorsque le champ  $\mathbf{v}$ , cinématiquement admissible, rend  $P(\mathbf{v})$  finie et  $P_e(\mathbf{Q}, \mathbf{v}) > 0$ . La condition (1.4) peut s'écrire sous la forme du problème de minimisation :

$$(2.6) \left\{ \begin{array}{l} \text{à } \mathbf{Q}_0 \neq 0 \text{ donné, minimiser } \lambda \geq 0 \text{ tel que} \\ \exists \mathbf{v} \text{ cinématiquement admissible pour} \\ \mathbf{Q}(\lambda) = \lambda \mathbf{Q}_0 \text{ dans lequel} \\ P(\mathbf{v}) < P_e(\mathbf{Q}(\lambda), \mathbf{v}) \end{array} \right.$$

La valeur  $\mathbf{Q}(\lambda_{\min})$  sera une approche par excès du chargement  $\mathbf{Q}^+$  situé sur le trajet de charge radial défini par  $\mathbf{Q}(\lambda) = \lambda \mathbf{Q}_0$ .

L'application de cette méthode nécessite de déterminer au préalable les fonctions  $\pi(d(x))$  et  $\pi(\mathbf{n}(x), \llbracket \mathbf{v}(x) \rrbracket)$ , il reste ensuite la minimisation de  $\mathbf{Q}(\lambda)$  par rapport à  $\mathbf{v}$  et à  $\widehat{AB}$  de façon à approcher au mieux  $\mathbf{Q}^+$ .

## 2.5. Commentaires

L'application de la méthode d'approche par l'extérieur par les vitesses se révèle très utile pour l'analyse de la stabilité des remblais [10].

On a vu au § précédent que cette méthode nécessite la connaissance des fonctions  $\pi(d(x))$  et  $\pi(\mathbf{n}(x), \llbracket \mathbf{v}(x) \rrbracket)$  calculées à partir de  $G(x)$  au moyen de (2.5). Pour pouvoir appliquer cette démarche il faut donc connaître les capacités de résistance des matériaux contenus dans l'ouvrage. Nous nous intéressons au cas des sols anisotropes, nous étudierons dans la suite les caractéristiques de résistance de ce type de matériau et nous proposerons en conséquence un critère de résistance d'emploi pratique.

### 3. Critère de résistance pour les sols anisotropes

#### 3.1. Résultats expérimentaux sur l'anisotropie des sols

L'anisotropie de résistance des sols purement cohérents dans des conditions non drainées a été mise en évidence par plusieurs auteurs à l'aide de divers types d'essais, en laboratoire ou *in-situ*.

Deux essais retiendront particulièrement notre attention :

- Essai triaxial cylindrique réalisé sur des éprouvettes dont l'axe de prélèvement est incliné à l'angle  $\alpha$  sur la verticale Oy. La pression de confinement correspond à la contrainte principale mineure  $\sigma_3$ , et  $\sigma_1$  est la contrainte de compression axiale, définissant l'angle  $\alpha = (Oy, \sigma_1)$  [2, 12, 15].
- Essai sur des cylindres creux prélevés avec l'axe de symétrie vertical. Différentes orientations  $\alpha = (Oy, \sigma_1)$  de la contrainte principale majeure  $\sigma_1$  par rapport à l'axe vertical Oy sont obtenues par diverses combinaisons des pressions interne et externe, de la compression longitudinale et de la torsion [5, 19, 20].

Les contraintes principales étant ordonnées suivant  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , il apparaît dans ces essais que la cohésion du sol définie par  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ , n'est fonction que de l'inclinaison  $\alpha$  de la contrainte principale majeure en compression  $\sigma_1$  sur l'axe vertical Oy. On posera ainsi :

$$C(\alpha) = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 \quad \text{pour } \alpha = (Oy, \sigma_1)$$

Il est courant de noter  $C_h = C(0)$  et  $C_v = C(\pi/2)$  et de représenter les valeurs de  $C(\alpha)$  sur un diagramme polaire (Fig. 6). Dans ces types d'essais le matériau apparaît donc comme orthotrope de révolution autour de Oy.

Pour caractériser la valeur de  $C(\alpha)$  obtenue à partir des essais triaxiaux, Bishop [1] a proposé une formule que nous écrivons à l'aide des paramètres d'anisotropie  $K_1 = C_h/C_v$  et  $K_2 = C(\pi/4)/C_v$  :

$$(3.1) \quad C(\alpha) = C_v (\cos^2 \alpha + K_1 \sin^2 \alpha) (\cos^2 2\alpha + 2K_2 \sin^2 2\alpha / (1 + K_1))$$

Dans le cas particulier où  $K_2 = (1 + K_1)/2$  cette formule se ramène à celle proposée par Casagrande et Carrillo [7]. La formule de Bishop étant plus générale permet de rendre compte des principaux types d'anisotropie rencontrés dans la pratique. Les courbes de la figure 6, tracées à partir des résultats expérimentaux, montrent un bon accord non seulement pour les essais triaxiaux mais aussi pour les essais sur des cylindres creux. Nous admettrons que la formule de Bishop est valable pour représenter les valeurs de la cohésion pour toute inclinaison  $\alpha$  de la contrainte principale  $\sigma_1$ , obtenue avec ces deux types d'essais.



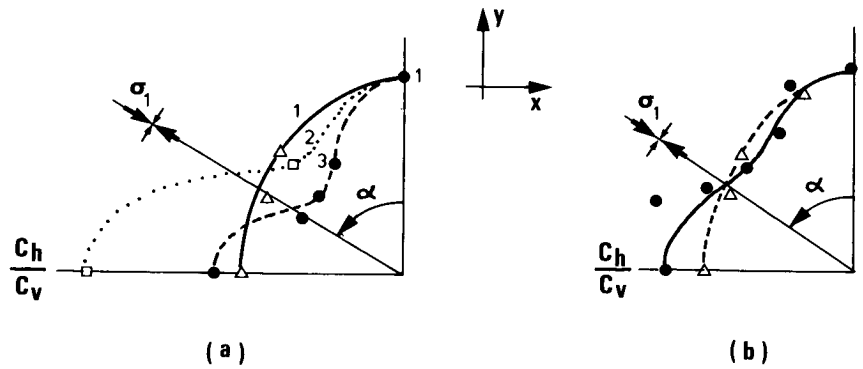


Figure 6. — Diagrammes polaires  $C(\alpha)/C_v$ , résultats expérimentaux et courbes de Bishop. a) Essais triaxiaux (1) réf. 12, (2) réf. 1, (3) réf. 16 ; b) Essais sur des cylindres creux [réf. 5].

### 3.2. Choix du critère de résistance. Propriétés

Nous partons des résultats cités au § précédent pour écrire le critère de résistance du sol en faisant l'hypothèse que seules interviennent les valeurs des contraintes principales extrêmes  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  et l'angle  $\alpha = (Oy, \sigma_1)$ ; on posera donc :

$$(3.2) \quad f(\sigma) = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 - C(\alpha)$$

Il est à remarquer que ces hypothèses correspondent en particulier à :

- l'orthotropie de révolution du matériau autour de Oy
- l'indépendance du critère vis-à-vis de la contrainte principale intermédiaire
- l'indépendance du critère vis-à-vis de la contrainte moyenne.

Ceci est en accord avec l'interprétation des essais sur cylindres creux faite par les différents auteurs.

Dans (3.2) la fonction  $C(\alpha)$  sera donnée par la formule de Bishop (3.1).

Le domaine de résistance associé à ce critère a les propriétés suivantes :

- Il est étoilé de centre 0, c'est-à-dire que :

$$(3.3) \quad f(\sigma) \leq 0 \Rightarrow f(\lambda\sigma) \leq 0 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

- On remarquera qu'il n'est pas toujours convexe.

Le domaine de résistance que nous proposons est un cylindre parallèle à la direction  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$  et  $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ , dans l'espace  $\mathcal{R}^6$

défini par les six composantes du tenseur contrainte  $\sigma(\mathbf{x})$ . Il est commode pour examiner ce critère d'étudier la section du domaine de résistance par le sous-espace vectoriel de dimension 2 défini par des états de contrainte plane de trace nulle :

$$(3.4) \quad \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad ; \quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 0.$$

On voit sans difficulté que cette section est définie par la relation

$$(3.5) \quad \sqrt{\sigma_{yy}^2 + \sigma_{xy}^2} - C(\alpha) \leq 0$$

où  $\alpha = (Oy, \sigma_1)$  s'exprime en fonction de  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{yy}$  par :

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} + \frac{\pi}{4} \left( 1 - \frac{\sigma_{yy}}{|\sigma_{yy}|} \right) \text{ si } \sigma_{yy} \neq 0 \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} \frac{\sigma_{xy}}{|\sigma_{xy}|} \text{ si } \sigma_{yy} = 0 \text{ et } \sigma_{xy} \neq 0, \end{array} \right.$$

$\alpha$  indéterminé si  $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$ ; on note que, par les formules de Mohr-Levy, on a :

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{yy} = \sqrt{\sigma_{yy}^2 + \sigma_{xy}^2} \cos 2\alpha \\ \text{et} \\ \sigma_{xy} = -\sqrt{\sigma_{yy}^2 + \sigma_{xy}^2} \sin 2\alpha; \end{array} \right.$$

il en résulte que (3.5) et (3.6) correspondent dans le plan  $\sigma_{yy}/C_v, \sigma_{xy}/C_v$  (Fig. 7) à l'expression en coordonnées polaires :

$$(3.8) \quad \rho - C(-\theta/2)/C_v \leq 0$$

où  $\rho = \sqrt{\sigma_{yy}^2 + \sigma_{xy}^2}/C_v$  et  $\theta = -2\alpha$ .

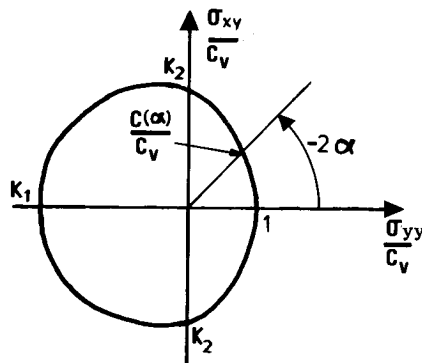


Figure 7. — Représentation de la section plane du domaine de résistance.

En fonction des valeurs des paramètres  $K_1$  et  $K_2$  déterminés expérimentalement, diverses formes sont obtenues pour le domaine (3.8). En particulier, dans certains cas on aboutit à un domaine non convexe, ce qui implique alors, évidemment, la non convexité du domaine (3.2) dans l'espace  $\mathcal{R}^6$ . Sur la figure 8 nous avons représenté deux exemples de non convexité du domaine (3.8) pour des valeurs des paramètres déterminés expérimentalement sur des sols réels.

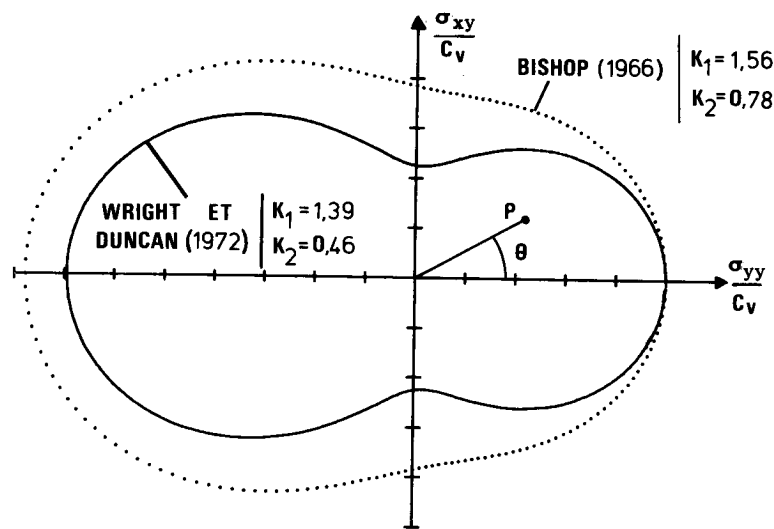


Figure 8. — Représentation dans  $\mathcal{R}^2$  de deux matériaux à domaine de résistance non convexe.

### 3.3. Commentaires

La plupart des critères énoncés pour les matériaux anisotropes correspondent à la généralisation d'un critère isotrope, particulièrement celui de von Mises. Des expressions du critère ont été données pour le milieu continu tridimensionnel et pour le milieu continu à deux dimensions dans les problèmes dits de "déformation plane" [3, 4, 11, 13, 17].

Le critère que nous avons proposé au § précédent, énoncé pour le milieu continu tridimensionnel, a la propriété de conduire à un critère bidimensionnel de même forme dans le cas de la "déformation plane"; cela peut être démontré par application de la théorie du calcul à la rupture en déformation plane.

Disposant d'un critère exprimant les capacités de résistance du sol il reste, pour pouvoir appliquer la méthode d'approche par l'extérieur, à calculer les fonctions  $\pi(\mathbf{d}(\mathbf{x}))$  et  $\pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket)$ .

#### 4. Calcul des fonctions "π". Coefficient de rupture de l'ouvrage

##### 4.1. Les fonctions $\pi(d(x))$ et $\pi(n(x), \llbracket v(x) \rrbracket)$ pour les matériaux étudiés

1) Par application de la définition (2.5) on peut calculer les fonctions  $\pi$  pour le problème en "déformation plane", associées au critère de résistance pour le matériau anisotrope. Il vient :

$$(4.1) \quad \begin{cases} \pi(d(x)) = +\infty & \text{si } \text{tr}(d(x)) \neq 0 \\ \pi(d(x)) = \text{Max} \{ -2 C(\alpha) d_1(x) \cos 2(\beta - \alpha) \} & \text{si } \text{tr}(d(x)) = 0 \\ \text{où } d_1(x) \text{ est la vitesse de déformation principale positive et} \\ \beta = (Oy, d_1(x)) \end{cases}$$

$$(4.2) \quad \begin{cases} \pi(n(x), \llbracket v(x) \rrbracket) = +\infty & \text{si } V_n(x) \neq 0 \\ \pi(n(x), \llbracket v(x) \rrbracket) = \text{Max}_{\alpha} \{ C(\alpha) V_t(x) \sin 2(\epsilon - \alpha) \} & \text{si } V_n(x) = 0 \end{cases}$$

où  $V_n(x)$  et  $V_t(x)$  sont les composantes normale et tangentielle du vecteur discontinuité de vitesse  $\llbracket v(x) \rrbracket$  à la traversée de la ligne de discontinuité de vitesse de normale  $n(x)$ , le vecteur tangent  $t(x)$  étant défini par  $(n(x), t(x)) = +\pi/2$ .

L'interprétation géométrique des éléments qui interviennent dans les fonctions "π" est donnée sur la figure 9. Rappelons que dans les définitions (4.1) et (4.2) nous avons compté les contraintes positivement en compression et les vitesses de déformation positives lorsqu'elles correspondent à une extension.

Finalement nous introduisons la notation suivante :

$$(4.3) \quad \pi(d(x)) = C_v d_1 \pi(\beta), \quad d_1(x) > 0$$

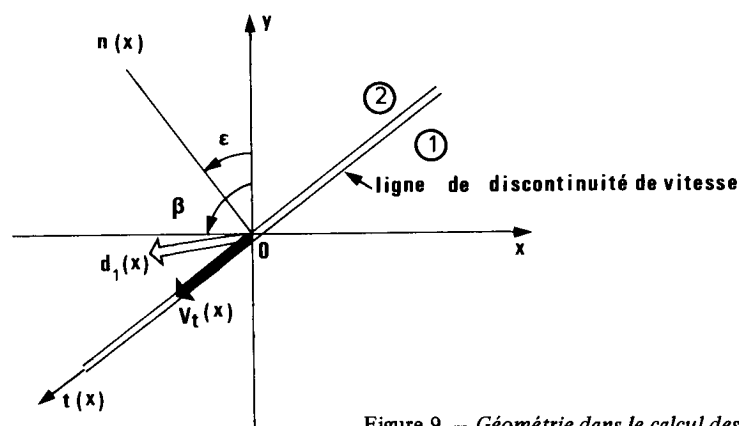


Figure 9. — Géométrie dans le calcul des fonctions "π".

et

$$(4.4) \quad \pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket) = C_v |V_t(\mathbf{x})| \pi_+(\epsilon) \quad \text{si } V_t(\mathbf{x}) > 0$$

$$(4.5) \quad \pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket) = C_v |V_t(\mathbf{x})| \pi_-(\epsilon) \quad \text{si } V_t(\mathbf{x}) < 0$$

Les fonctions  $\pi(\beta)$ ,  $\pi_+(\epsilon)$  et  $\pi_-(\epsilon)$  se calculent numériquement en fonction des valeurs des rapports d'anisotropie  $K_1 = C_h/C_v$  et  $K_2 = C(\pi/4)/C_v$ . On trouvera dans [26] des représentations graphiques de ces fonctions pour diverses valeurs des paramètres d'anisotropie.

2) Dans les applications ultérieures interviendra aussi un sol satisfaisant le critère de Mohr-Coulomb isotrope :

$$(4.6) \quad f(\boldsymbol{\sigma}) = \text{Sup}_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \{ \sigma_i(1 - \sin \phi) - \sigma_j(1 + \sin \phi) - 2C \cos \phi \}$$

pour lequel nous avons [21] :

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi(\mathbf{d}(\mathbf{x})) = +\infty \quad \text{si } \text{tr } \mathbf{d} < (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \phi \\ \pi(\mathbf{d}(\mathbf{x})) = C \cotg \phi \text{tr } (\mathbf{d}(\mathbf{x})) \quad \text{si } \text{tr } \mathbf{d} \geq (|d_1| + |d_2| + |d_3|) \sin \phi \end{array} \right.$$

et

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket) = +\infty \quad \text{si } V_n < |V_t| \tg \phi \\ \pi(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \llbracket \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rrbracket) = C \cotg \phi V_n \quad \text{si } V_n \geq |V_t| \tg \phi \end{array} \right.$$

#### 4.2. Choix des champs de vitesse à partir des fonctions "π"

Pour que l'approche par l'extérieur d'un problème de stabilité d'un ouvrage ait un sens, il faut choisir des champs de vitesse fournissant des valeurs non infinies des fonctions "π".

1) Les définitions (4.1) et (4.2) nous permettent d'affirmer que les champs de vitesse doivent être sans variation de volume pour le sol anisotrope décrit ici, c'est-à-dire :

- de vitesse de déformation de trace nulle ;
- de discontinuité de vitesse à composante normale nulle (glissement).

Pour un mécanisme avec des blocs indéformés en glissement les uns par rapport aux autres, nous pouvons envisager deux formes possibles pour les lignes de discontinuité de vitesse :

- arc de cercle de centre  $\Omega$  pour un mécanisme de rotation centré en  $\Omega$  ;
- segment de droite pour un mécanisme en translation.

2) Pour le sol frottant du type Mohr-Coulomb on aboutit à des conclusions différentes :

- champs de vitesse de déformation de trace non nulle (changement de volume ;
- champs de discontinuité de vitesse avec "décollement"

L'étude avec des mécanismes par blocs rigides ne conduit à des résultats non triviaux que pour des courbes dont la tangente et la direction de la discontinuité de vitesse définissent un angle  $\delta$  compris dans l'intervalle  $[\phi, \pi - \phi]$ . Parmi les formes possibles de courbe on a par exemple la droite et la spirale logarithmique de foyer  $\Omega$  et de raison  $\exp(2\pi \operatorname{tg} \phi)$  pour des mécanismes en translation et en rotation respectivement.

#### 4.3. Définition du coefficient de rupture

Le problème que nous allons traiter correspond au remblai du § 2, en sol isotrope obéissant au critère de Mohr-Coulomb posé sur un sol purement cohérent anisotrope dont le critère a été donné au § 3 (Fig. 10).

Nous envisagerons des mécanismes par bloc rigide en rotation autour du centre  $\Omega$  avec une vitesse angulaire  $\omega$  positive dans le sens rétrograde pour appliquer la méthode d'approche par l'extérieur du calcul à la rupture. D'après ce qui a été dit au § précédent, la ligne de discontinuité de vitesse doit être choisie de façon suivante : arc de cercle de centre  $\Omega$  pour le sol d'assise et  $\widehat{AB}$  doit respecter la condition d'inclinaison minimale de la vitesse.

Les paramètres du problème peuvent être séparés en trois ensembles :  $H, D, L, \beta$  pour la géométrie,  $\gamma$  et  $\gamma_1$  pour le chargement,  $C_1, \phi, C_v, K_1, K_2$  pour la résistance. Par application de l'analyse dimensionnelle, on voit que les

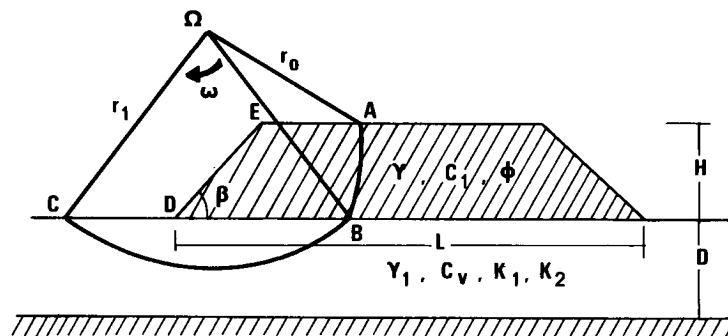


Figure 10.— Mécanisme pour l'étude de la stabilité d'un remblai.

chargements extrêmes  $Q^+ = (\gamma^+, \gamma_1^+)$  sont nécessairement caractérisés par une relation du type :

$$(4.9) \quad \frac{\gamma^+ H}{C_v} = n(D/H, L/H, \beta, \gamma_1^+/\gamma^+, C_1/C_v, \phi, K_1, K_2)$$

où  $n$  est une fonction scalaire des arguments indiqués.

On définira le *coefficient de rupture* d'un remblai donné, en se référant au remblai "extrême", de même géométrie, mêmes conditions de résistance, pour lequel les poids volumiques des sols constitutifs sont dans le même rapport  $\gamma_1/\gamma = \gamma_1^+/\gamma^+$  (ceci correspond à un trajet de charge "radial" [22]), par la relation  $F = \gamma^+/\gamma$  :

$$(4.10) \quad F = C_v/\gamma H n(D/H, L/H, \beta, \gamma_1/\gamma, C_1/C_v, \phi, K_1, K_2)$$

Il possède les propriétés suivantes :

$$(4.11) \quad \begin{aligned} F < 1 &\Rightarrow \text{ouvrage instable} \\ F \geq 1 &\Rightarrow \text{ouvrage potentiellement stable} \end{aligned}$$

En se référant à (2.3) on en déduit, comme dans [10], une évaluation par excès du coefficient de rupture à partir de chaque champ de vitesse  $v$  :

$$(4.12) \quad F \leq F_v = P(v)/P_e(\gamma, \gamma_1, v)$$

On remarquera que par la forme du mécanisme choisi, la contribution de  $\gamma_1$  dans l'expression de la puissance des efforts extérieurs est nulle. Un meilleur majorant du coefficient de rupture est obtenu en minimisant  $F_v$  par rapport à la forme de  $\widehat{AB}$  à  $\Omega$  et  $\widehat{BC}$  fixés, ce qui conduit à un arc de spirale logarithmique de foyer  $\Omega$  et de raison  $\exp(2\pi \text{tg } \phi)$ . La recherche se ramène ainsi à minimiser  $F_v$  par rapport à la position du centre de rotation et au rayon du cercle  $\widehat{BC}$ . Il s'ensuit que le meilleur majorant de  $F$  pour ce type de mécanisme est de la forme :

$$F^* = C_v/\gamma H n^*(D/H, \beta, C_1/C_v, \phi, K_1, K_2)$$

## 5. Application de la méthode

### 5.1. Etude du remblai de Cubzac-les-Ponts

Nous reprenons ici le problème de la stabilité du remblai expérimental de Cubzac cité dans l'introduction. La figure (11), où est rappelée la géométrie de l'ouvrage, présente la courbe de rupture "réelle" telle qu'elle a pu être reconstituée par les sondages [14].

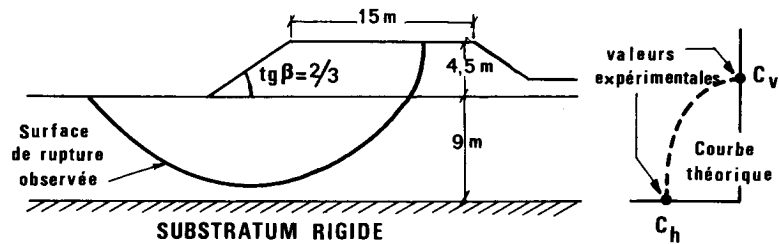


Figure 11. – Rupture du remblai de Cubzac-les-Ponts.

Les caractéristiques des matériaux employés sont indiquées dans le Tableau 1.

TABLEAU 1. – Caractéristiques des matériaux du remblai de Cubzac-les-Ponts

Matériau	Poids volumique KN/m <sup>3</sup>	Propriétés mécaniques
Remblai (isotrope)	21,0	$C_1 = 1 \text{ KPa}$ ; $\phi = 35^\circ$
Sol d'assise (anisotrope)	15,0	$C_v = 19 \text{ KPa}$ ; $K_1 \doteq 0.58$ ; $K_2 = ?$

Nous observons que le paramètre d'anisotropie  $K_2 = C(\pi/4)/C_v$  n'a pas été déterminé. Dans la suite, nous supposons pour l'analyse de stabilité de cet ouvrage que le matériau satisfait la relation de Casagrande et Carrillo :  $K_2 = (1 + K_1)/2$ . Cette hypothèse classique n'est d'ailleurs pas la plus défavorable.

Le calcul du mécanisme minimisant du type précédent (bloc rigide en rotation), a été fait d'abord en supposant que le sol d'assise est isotrope avec une cohésion égale à  $C_v$  ; un deuxième calcul a été réalisé avec les paramètres d'anisotropie du tableau 1.

La figure 12 montre les deux mécanismes optimaux correspondants, ainsi que la valeur du coefficient  $F^*$ . On observe que l'anisotropie du sol conduit à une réduction de 24 % sur la valeur de  $F^*$ . De plus une différence de forme apparaît pour la ligne de discontinuité de vitesse, on remarquera notamment qu'elle n'est pas nécessairement tangente au substratum rigide dans le cas du matériau anisotrope. Nous observons d'ailleurs un bon accord entre la courbe théorique obtenue pour le cas anisotrope et la courbe "observée" de la figure 11.

La connaissance de la valeur du rapport d'anisotropie  $K_2$  permettrait un meilleur calcul ; la valeur adoptée ici n'est pas la plus défavorable et notre évaluation est déjà très significative.



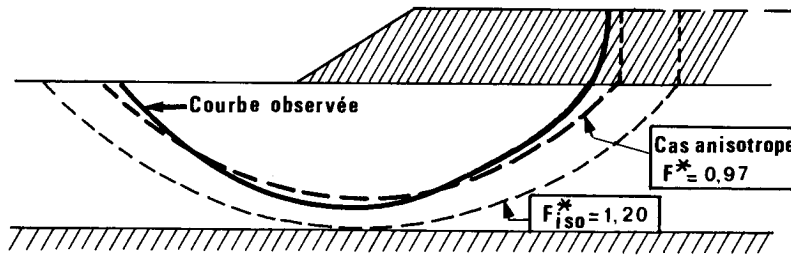


Figure 12. — Mécanismes pour le remblai de Cubzac.

5.2. Influence de l'anisotropie sur  $F^*$

Toutes les comparaisons que nous allons présenter sont faites entre différents cas des sols anisotropes et le sol isotrope de cohésion  $C_v$ , obtenue par des essais triaxiaux sur des éprouvettes prélevées verticalement. Le coefficient  $F^*$  pour le sol isotrope sera noté  $F_{iso}^*$ .

La Figure 13 montre le rapport  $F^*(K_1, K_2)/F_{iso}^*$  pour un cas typique de remblai sur sol anisotrope. On y observe que l'écart entre  $F^*(K_1, K_2)$  et  $F_{iso}^*$  peut dépasser 30 % selon les valeurs des rapports d'anisotropie  $K_1$  et  $K_2$ . L'allure des courbes montre clairement que le paramètre  $K_2$  a beaucoup plus d'influence sur la valeur de  $F^*$  que  $K_1$ .

Pour corroborer ce qui vient d'être dit concernant l'influence des rapports d'anisotropie, nous comparons maintenant les valeurs de  $F^*(K_1, K_2)$  lorsque

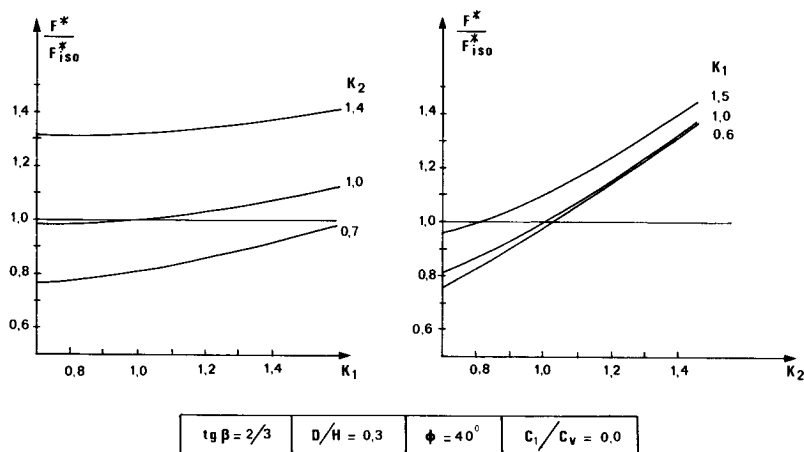


Figure 13. — Comparaison des coefficients de rupture "isotrope" et "anisotrope".

l'un des deux paramètres reste fixe pendant que l'autre varie. La Figure 14 représente le rapport  $\Delta F^*/F_0^*$  où  $\Delta F^* = F^* - F_0^*$ ,  $F_0^*$  étant la valeur de référence pour une valeur fixe des rapports d'anisotropie. On y remarque que si  $K_2$  reste constant les variations de  $K_1$  vont de  $-10\%$  à  $+20\%$ ; par contre, lorsque  $K_1$  est constant,  $K_2$  fait varier  $F^*$  de  $-20\%$  à  $+30\%$ . Ceci met en évidence l'importance du rapport d'anisotropie  $K_2$  sur la stabilité de ce type d'ouvrages en sols anisotropes.

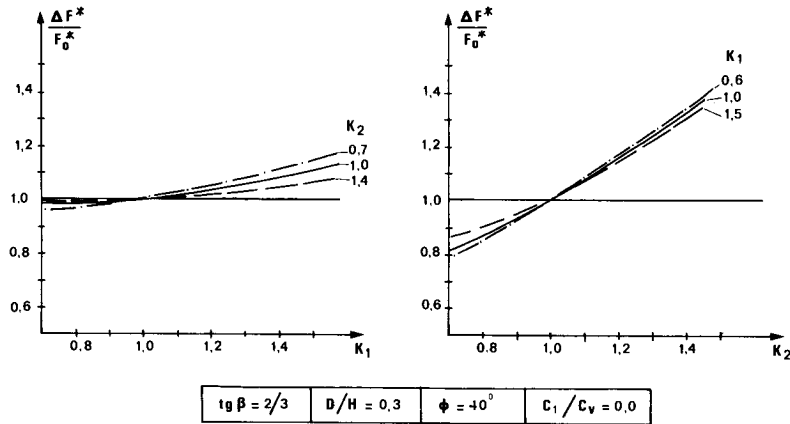


Figure 14. — Variation du coefficient de rupture avec l'anisotropie.

### 5.3. Influence de l'anisotropie sur la géométrie du mécanisme

Nous nous intéressons maintenant au rôle du substratum rigide dans la géométrie du mécanisme optimal. Pour un remblai donné, le coefficient  $F^*$  est une fonction décroissante du rapport  $D/H$  jusqu'à une valeur  $(D/H)_0$  à partir de laquelle  $F^*$  devient constant. Ceci correspond au fait que la ligne de discontinuité de vitesse pour le mécanisme optimal est tangente au substratum rigide pour tout rapport  $(D/H) \leq (D/H)_0$ , ce qui permet d'interpréter la présence du substratum rigide par un effet "stabilisateur" pour l'ouvrage, effet qui s'annule pour  $(D/H) > (D/H)_0$ ,  $F^*$  devenant alors constant.

Nous montrons sur la Figure 15 les valeurs du coefficient  $n^*$  en fonction du rapport  $D/H$  pour le sol d'assise isotrope et le sol anisotrope de rapports  $K_1 = 1,5$  et  $K_2 = 1,3$ . On peut y voir que pour une même inclinaison de talus du remblai, le sol d'assise perd son effet stabilisateur, lorsque le matériau est anisotrope, pour des valeurs de  $(D/H)_0$  plus faibles que celles correspondant au matériau isotrope.

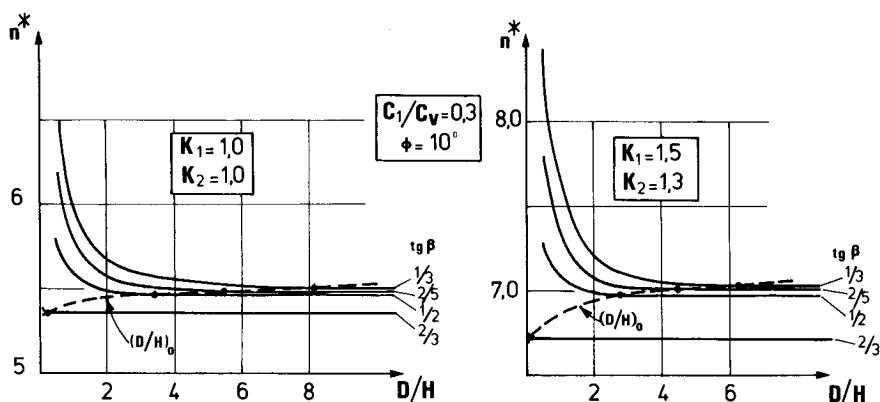


Figure 15. – Influence de la profondeur du substratum rigide sur  $n^*$ .

## 6. Conclusions

Cette étude fournit une méthode pratique pour analyser la stabilité d'ouvrages en sols purement cohérents anisotropes, la caractérisation de l'anisotropie étant effectuée à l'aide de la formule de Bishop qui fait intervenir trois paramètres à déterminer expérimentalement. La valeur  $F^*$  est la meilleure évaluation par excès qui puisse être obtenue pour le coefficient de rupture de l'ouvrage, par une analyse rigoureuse fondée sur l'équilibre global d'un bloc.

Nous avons montré l'importance du rôle de l'anisotropie sur la valeur du coefficient  $F^*$  et tout particulièrement l'intérêt qu'il y a à déterminer le paramètre d'anisotropie  $K_2 = C(\pi/4)/C_v$ .

Il est évident que le même type de méthodes est applicable à tout autre critère de résistance pour caractériser les propriétés de résistance anisotrope du sol.

D'autres applications de cette analyse sont possibles : stabilité de pentes, capacité portante des fondations, etc. Ces sujets ont été traités dans des publications récentes [23, 24].

L'étude que nous présentons fournit deux informations essentielles :

- 1) elle permet d'évaluer l'importance des phénomènes susceptibles d'être observés dans les divers ouvrages en sols anisotropes
- 2) et surtout, elle aide à dégager dans chaque cas le type de paramètre d'anisotropie dont l'influence paraît devoir être significative et qu'il convient, donc, de s'attacher à déterminer.

## Remerciements

Pour cette étude Monsieur Tristán-López a bénéficié du soutien financier du CONACYT (Mexique) et de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, auxquels il exprime ses remerciements.

## REFERENCES

- [1] BISHOP A.W. – “The strength of soils as engineering materials.”, *Géotechnique*, 16, 2 (1966): 89-130.
- [2] BOEHLER J.P. – “Contributions théoriques et expérimentales à l'étude des milieux plastiques anisotropes.”, Thèse de Doctorat es-Sciences, Université scientifique et médicale de Grenoble, 1975.
- [3] BOEHLER J.P. – “Lois de comportement anisotrope des milieux continus.”, *Journal de Mécanique*, 17, 2 (1978): 153-190.
- [4] BOEHLER J.P. et A. SAWCZUK. – “Equilibre limite des sols anisotropes.”, *Journal de Mécanique*, 9,1 (1970): 5-33.
- [5] BROMS B.B. and A.O. CASBARIAN. – “Effects of rotation of the principal stress axes and of the intermediate principal stress on the shear strength.”, *Proceedings 6th Int. Conf. ou Soil Mech. and Found. Eng. Montreal*, 1 (1965): 179-183.
- [6] CAQUOT A. et J. KERISEL. – *Traité de mécanique des sols.*, Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [7] CASAGRANDE A. and N. CARRILLO. – “Shear failure of anisotropic materials”., *Journal Boston Soc. Civil Eng.*, 31, 4, pp. 74-87. (1944): 74-87.
- [8] CHEN W.F. – *Limit analysis and soil plasticity.*, Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam, 1975.
- [9] COULOMB C.A. – “Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statistique relatifs à l'architecture.”, *Mémoire Académie Royale des Sciences*, 1773.
- [10] COUSSY O. et J. SALENÇON. – “Analyse de la stabilité des ouvrages en terre par le calcul à la rupture.”, *Annales des Ponts et Chaussées*, 4<sup>e</sup> trim. (1979): 7-35.
- [11] DAVIS E.H. and J.T. CHRISTIAN. – “Bearing capacity of anisotropic cohesive soils.”, *Journal of the Soil Mech. and Found. Div.*, ASCE, 97, SM5, pp. 753-769. (1971): 753-769.
- [12] DUNCAN J.M. and H.B. SEED. – “Anisotropy and stress reorientation in clay.”, *Journal of the Soil Mech. and Found. Div.*, ASCE, 92, SM6 (1966): 21-50.
- [13] HILL R. – *The mathematical theory of plasticity.*, Oxford at the Clarendon Press, 1950.
- [14] JOSSEAUME H., F. BLONDEAU et G. PILOT. – “Etude du comportement non drainé de trois argiles molles. Application au calcul des remblais.”, *Bull. Liaison Labo. Ponts et Chaussées*, spécial VI F (1977): 120-128.
- [15] LO K.Y. – “Stability of slopes in anisotropic soils.”, *Journal of the Soil Mech. and Found. Div. ASCE*, 91, SM4 (1965): 85-106.
- [16] LO K.Y. and V. MILLIGAN. – “Shear strength properties of two stratified clays.”, *Journal of the Soil Mech. and Found. Div. ASCE*, 93, SM1 (1967): 1-15.
- [17] PARISEAU W.G. – “Plasticity theory for anisotropic rocks and soils.”, *Proceedings 10th symposium of rock mechanics*, Austin (1968): 267-295.
- [18] RENDULIC L. – “Ein Beitrag zu Bestimmung der Gleitsicherheit.”, *Der Bauingenieur*, n° 19/20 (1935).
- [19] SAADA A.S. and K.K. ZAMANI. – “The mechanical behavior of cross anisotropic clays.”, *Proceedings 7th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng.*, Mexico, 1, pp. 351-359. (1969): 351-359.
- [20] SAADA A.S. and G. BIANCHINI. – “Strength of one dimensionally consolidated clays”, *Journal of the Goetech. Eng. Div.*, ASCE, 101, GT 11 (1975): 1151-1164.
- [21] SALENÇON J. – *Calcul à la rupture.*, Cours D.E.A., E.N.P.C. Paris, 1976.

- [22] SALENÇON J. – *Calcul à la rupture et analyse limite*. Cours de calcul des structures anélastiques, E.N.P.C., Paris, 1981.
- [23] SALENÇON J. et A. TRISTAN-LOPEZ. – “Analyse de la stabilité des talus en sols cohérents anisotropes.”, *Comptes Rendus Acad. Sciences Paris*, t. 290, n° 23, série B, (1980): 493-496.
- [24] SALENÇON J. et A. TRISTAN-LOPEZ. – “Force portante des semelles filantes sur sols cohérents anisotropes homogènes.”, *Comptes Rendus Acad. Sciences Paris*, t. 292, série II (1981): 1097-1102.
- [25] TAYLOR D.W. – “Stability of earth slopes.”, *Journal Boston Soc. Civil Eng.*, 24, 3 (1937): 337-386.
- [26] TRISTAN-LOPEZ A. – *Stabilité d'ouvrages en sols anisotropes*, Thèse Dr. Ingénieur, E.N.P.C., Palaiseau, 1981.
- [27] WRIGHT S.G. and J.M. DUNCAN. – “Analyses of Waco Dam Slide.”, *Journal of the Soil Mech. and Found. Div.*, ASCE, 98, (1972): 869-877.

## DISCUSSION

QUESTION BY E.T. ONAT : When one works with anisotropic solids and one worries about the convexity of the yield surface one must be careful. Plane sections of a 6-dimensional surface will also be convex. But I believe that the data of Wright and Duncan does not refer to the points in the stress space that constitute a plane. Hence my worry that your conclusion of nonconvexity of the yield surface may not be correct.

RÉPONSE PAR J. SALENÇON : Nous remercions le Professeur Onat pour son intéressant commentaire, qui attire l'attention sur le fait que l'analyse de la convexité du domaine de résistance d'un matériau peut se révéler délicate. En particulier, il n'est pas possible, à partir des seuls résultats expérimentaux obtenus par des essais au “triaxial” classique de tirer des conclusions générales sur la convexité du domaine de résistance du matériau correspondant, comme nous l'avons indiqué. Le but de notre propos à ce sujet est de montrer l'utilité de la théorie du calcul à la rupture construite sans faire appel à la convexité, puisque avec la forme choisie pour le critère celui-ci peut, dans certains cas, se révéler non convexe ; mais on peut aussi montrer que ce problème de non-convexité n'est pas lié à l'approche tridimensionnelle que nous avons adoptée et à la forme du critère choisi, puisque si nous avons utilisé l'approche bidimensionnelle dans l'esprit d'auteurs antérieurs, ce même problème eût été rencontré [p. ex. 1, 2].

- [1] BEYNET J.M. – “Contribution à l'étude de la déformation plastique, de la fissuration et de la force portante des milieux stratifiés.”, Thèse Dr. Ing., Univ. Sc. et Méd. Grenoble, 1977.
- [2] BOSCHAT J. et D. RADENKOVIC. – “Une généralisation de la loi limite de Tresca aux matériaux anisotropes.”, *Z. Ang. Math. Mech.*, 42 (1962): 90-91.