C. R. Acad. Sc. Paris, t. 290 (23 juin 1980) Série B — 493

MÉCANIQUE DES SOLIDES ANÉLASTIQUES. — *Analyse de la stabilité des talus en sols cohérents anisotropes.* Note (*) de **Jean Salençon,** Correspondant de l'Académie et **Agustín Tristán-López**.

On propose une méthode rigoureuse pour l'étude de la stabilité des ouvrages en sols cohérents anisotropes, à partir de la seule connaissance du critère de résistance du sol. On construit une approche cinématique utilisant des mécanismes par blocs, qui peut s'appliquer quelle que soit la formule utilisée pour décrire l'anisotropie de cohésion. La présentation est faite dans le cas d'un talus en définissant l'anisotropie par la formule de Bishop.

Based upon the knowledge of the strength criterion of the constitutive soil, a method is proposed for a rigorous analysis of the stability of structures made of purely cohesive anisotropic soils. Through the use of rigid block mechanisms a kinematical approach is constructed which can be applied whatever the formula chosen to define the anisotropic shear strength of the soil. The paper is written in the case of a slope with a cohesion described by Bishop's formula.

1. Coefficient de rupture d'un talus. — On étudie la stabilité d'un talus de longueur illimitée, de pente β, de hauteur H, constitué d'un sol homogène de poids volumique γ. Le sol, purement cohérent, présente une anisotropie de cohésion mise en évidence par des essais à l'appareil « triaxial » : on y détermine la cohésion $C(\alpha)=(\sigma_1-\sigma_3)/2$ pour un échantillon cylindrique dont l'axe de prélèvement fait l'angle α avec la verticale Oy, et qui est soumis à des contraintes principales σ_1 (axiale) et σ_3 (radiale), comptées positivement en compression.

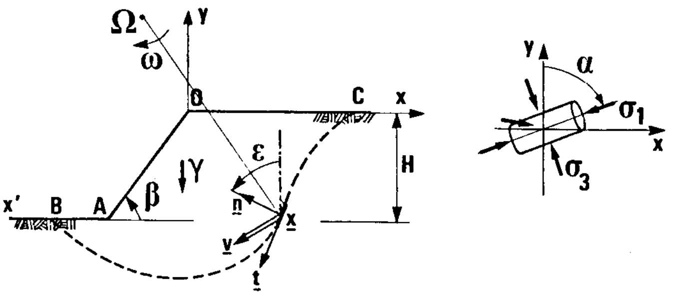

Fig. 1. — Stabilité d'un talus en sol cohérent anisotrope.

On adopte pour représenter cette anisotropie la formule proposée par Bishop [1] qui s'écrit :

$$C(\alpha)=C_v(1-a\sin^2\alpha)(1-b\sin^2 2\alpha), \tag{1}$$

avec les notations : $C(0)=C_v$, $C(\pi/2)=C_h$, $K_1=C_h/C_v$, $K_2=C(\pi/4)/C_v$, $a=1-K_1$, $b=1-K_2/(1-a/2)$. Cette formule, plus générale que celle de Casagrande et Carrillo [2], permet de rendre compte des principaux types d'anisotropie rencontrés dans la pratique.

On fait l'hypothèse que le critère de résistance du sol ne dépend que de la différence des contraintes principales extrêmes et de l'inclinaison α de la contrainte principale compressive majeure sur Oy; les valeurs principales du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ étant notées $\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \sigma_3$ (positives en compression) on peut alors définir le domaine des états de contraintes admissibles pour le sol par

$$f(\boldsymbol{\sigma})=(\sigma_1-\sigma_3)/2-C(\alpha)\leqq 0, \tag{2}$$

où $C(\alpha)$ est donné par (1) : ce domaine est étoilé de centre 0 :

$$f(\sigma) \leqq 0 \Rightarrow f(\lambda\sigma) \leqq 0, \ \forall \lambda \in (0, 1);$$

il n'est, par contre, pas toujours convexe.

Par le raisonnement classique du Calcul à la rupture [3] il est clair que : pour que le talus ainsi défini soit « stable » il faut qu'il existe au moins un champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ équilibrant le chargement imposé (poids volumique γ et contraintes données nulles sur la surface x' AOx) et qui respecte en tout point la condition de résistance (2). Un talus pour lequel cette condition *nécessaire* est satisfaite sera dit *potentiellement stable*.

On montre alors, en s'appuyant sur les propriétés du domaine de résistance du sol et par l'analyse dimensionnelle, que les talus potentiellement stables sont caractérisés, à β, γ, C_v, K_1 et K_2 fixés, par la condition sur H : $0 \leqq H \leqq H^+$ où H^+, hauteur extrême, est une fonction de la forme

(3) $$H^+ = N(K_1, K_2, \beta) C_v/\gamma,$$

N désignant une fonction scalaire des arguments indiqués. On définit alors le coefficient de rupture F d'un talus donné, par

(4) $$F = H^+/H = N(K_1, K_2, \beta) C_v/\gamma H;$$

il est clair que $F \geqq 1$ caractérise les talus potentiellement stables, et que $F < 1$ implique l'instabilité.

2. Détermination du coefficient de rupture. — On utilise pour déterminer F, l'approche par excès de la théorie du calcul à la rupture au moyen de champs de vitesses. Le talus étant supposé de longueur illimité on se restreint à la construction de champs de vitesses en déformation plane parallèlement à Oxy. La classe de champs de vitesses considérée correspond à un mouvement rigidifiant d'un volume OABCO séparé du reste du milieu supposé immobile par une ligne de discontinuité de vitesse BC (*fig*. 1) : ils dépendent donc de la ligne BC, du centre instantané de rotation Ω et de la vitesse de rotation ω de OABCO.

On désigne par $\underline{n}(\underline{x})$ la normale rentrante au volume OABCO en un point $\underline{x}$ de BC; $\underline{v}(\underline{x})$ est la discontinuité de vitesse, et on introduit les notations suivantes :

$\mathscr{P}(\gamma, \underline{v})$ = puissance des forces de pesanteur dans le champ de vitesses $\underline{v}$,

(5) $$\Pi\{\underline{v}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x})\} = \operatorname*{Sup}_{\sigma(\underline{x})}\{-\underline{v}(\underline{x}).\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}).\underline{n}(\underline{x}) \mid f[\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})] \leqq 0\},$$

$$P(\underline{v}) = \int_{BC} \Pi\{\underline{v}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x})\}\, ds.$$

La théorie du calcul à la rupture en déformation plane [3] permet d'écrire que

(6) $$F \leqq P(\underline{v})/\mathscr{P}(\gamma, \underline{v}) = F(\underline{v}) \qquad \text{si} \quad \mathscr{P}(\gamma, \underline{v}) > 0.$$

Compte tenu de la forme de f donnée par (2) on voit que :

(*a*) $\Pi\{\underline{v}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x})\} = +\infty$ si $\underline{v}(\underline{x}).\underline{n}(\underline{x}) \neq 0$;

(*b*) si $\underline{v}(\underline{x}).\underline{n}(\underline{x}) = 0$, le Sup dans (5) est atteint quand $\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})$ a ses deux directions principales majeure et mineure dans le plan de section droite du talus; en posant $\varepsilon = (Oy, \underline{n}(\underline{x}))$, on a alors :

(7) $$\Pi\{\underline{v}(\underline{x}), \underline{n}(\underline{x})\} = \operatorname*{Max}_{\alpha}\{C(\alpha).\underline{v}(\underline{x}).\underline{t}(\underline{x}) \sin 2(\varepsilon - \alpha)\}$$

avec $[\underline{n}(\underline{x}), \underline{t}(\underline{x})]=\pi/2$. Le calcul de cette expression a été fait par Tristán-López [4] pour $C(\alpha)$ donné par (1) : elle est proportionnelle à C_v et doit être déterminée numériquement pour les diverses valeurs de K_1 et K_2.

Pour obtenir une majoration non triviale de F, $P(\underline{v})$ doit être fini : BC doit être un arc de cercle de centre Ω. A noter que ce résultat signifie que le volume du type OABCO, dont l'équilibre global en respectant la condition (2) le long de BC est le plus critique, est nécessairement limité par un arc de cercle (*cf.* [5]). Pour optimiser $F(\underline{v})$ on minimise par

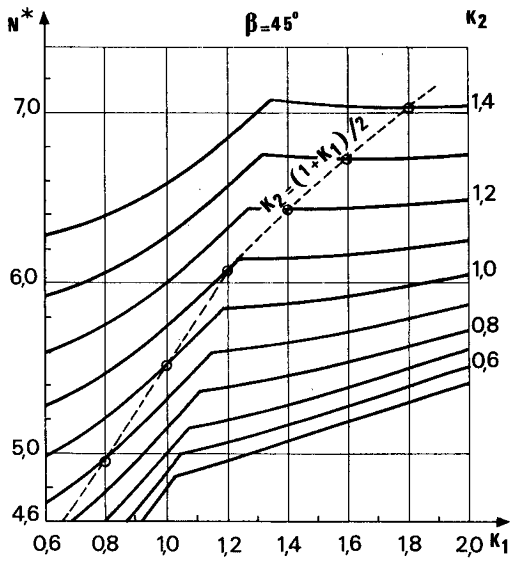

Fig. 2. — Détermination du coefficient de rupture : $F^*=N^*C_v/\gamma H$.

rapport à la position de Ω et au rayon du cercle BC [en raison de la forme de $F(\underline{v})$ et de la condition sur $\mathscr{P}(\gamma, \underline{v})$ il n'y a pas lieu de minimiser en ω]. On désigne par F^* le résultat ainsi obtenu, qui se met sous la forme :

$$F^*(H, \beta, C_v, K_1, K_2, \gamma)=N^*(K_1, K_2, \beta)\, C_v/\gamma H. \tag{8}$$

La figure 2 donne un exemple ($\beta=45°$) des abaques tracés pour N^* en fonction de K_1 et K_2; on a représenté également la courbe donnant N^* lorsque $K_2=(1+K_1)/2$: sol dont l'anisotropie est définie par la formule de Casagrande et Carrillo.

3. Commentaires. — Des méthodes pour l'analyse de la stabilité des talus en sols cohérents anisotropes ont été proposées par Lo [6] et Chen [7], transposant les approches classiques pour les sols isotropes et utilisant des mécanismes par blocs avec lignes de rupture circulaires. Ces auteurs, cherchant à y évaluer le « moment résistant », introduisent des considérations expérimentales tout en se référant à la formule de Casagrande et Carrillo pour définir l'anisotropie de cohésion : en fait les analyses ainsi obtenues ne sont pas mécaniquement cohérentes.

La méthode présentée ici permet l'analyse de stabilité pour toute condition de résistance du type défini par (2), et fournit la meilleure évaluation de F qui puisse être obtenue par une analyse fondée sur l'équilibre global d'un bloc. Elle est applicable pour les sols non-homogènes et pour d'autres types d'ouvrages (remblais, fondations...).

(*) Remise le 16 juin 1980.

[1] A. W. Bishop, *Géotechnique*, 16, n° 2, 1966, p. 89-130.

[2] A. Casagrande et N. Carrillo, *J. Boston Soc. Civ. Eng.*, 31, n° 4, 1944, p. 74-87.

[3] J. Salençon, *Calcul à la rupture et analyse limite*, cours E.N.P.C., Paris, 1978 et 1980.

[4] A. Tristán-López, *Application du calcul à la rupture à un problème de mécanique des sols anisotropes*, mémoire de D.E.A., E.N.P.C. Paris, 1979.

[5] O. Coussy et J. Salençon, *Ann. Ponts et Chaussées*, Nouvelle série, 12, 1979, p. 7-35.

[6] K. Y. Lo, *J. Soil Mech. and Found. Div. A.S.C.E.*, 91, SM 4, 1965, p. 85-106.

[7] W. F. Chen, *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Elsevier, Amsterdam, 1975.

Laboratoire de Mécanique des Solides,
91128 *Palaiseau Cedex.*