

STABILITE D'OUVRAGES EN SOLS COHERENTS ANISOTROPES
 STABILITY ANALYSIS FOR ANISOTROPIC COHESIVE SOILS

RESUME. En s'appuyant sur la théorie du Calcul à la rupture, on propose une méthode rigoureuse pour l'étude de la stabilité des ouvrages constitués de sols cohérents anisotropes. Celle-ci ne nécessite que la connaissance du critère anisotrope de rupture du sol. On construit une méthode cinématique pour l'analyse de la stabilité, utilisant des mécanismes par blocs. Cette méthode, d'une cohérence mécanique totale, peut s'appliquer quelle que soit la formule utilisée pour décrire l'anisotropie de cohésion. L'application en est donnée pour l'analyse de la stabilité des talus en décrivant l'anisotropie de cohésion par la formule proposée par Bishop. Les résultats sont présentés sous forme d'abaques qui en permettent l'utilisation pratique.

1 - INTRODUCTION

L'analyse de la stabilité des pentes et des remblais a fait l'objet de nombreux travaux dans le cas où le sol constitutif de l'ouvrage est *isotrope*. Pour les sols cohérents les méthodes classiques, basées sur l'utilisation de cercles de glissement, ne soulèvent aucune difficulté théorique et ne présentent aucune ambiguïté. Pour les sols frottants diverses méthodes analytiques ou numériques ont été proposées, dont la variété même atteste qu'aucune d'elles n'est pleinement satisfaisante. Dans des travaux récents Salençon et Coussy (1979) ont montré comment l'analyse mécanique rigoureuse du problème permet aisément d'éliminer les difficultés théoriques rencontrées habituellement pour ces sols. Cette analyse, fondée sur la théorie du Calcul à la rupture formulée par Salençon (1978), conduit à une méthode d'application pratique simple utilisant des "mécanismes par blocs rigides". Parallèlement Baker et Garber (1978), par un raisonnement raffiné de calcul de variations, ont abouti sur le plan théorique à des résultats concordants.

L'anisotropie de la résistance pour les sols purement cohérents a été mise en évidence à maintes reprises, toutefois, les analyses de stabilité prenant en compte cette propriété sont rares : l'adaptation des méthodes utilisées pour les sols isotropes au cas des sols anisotropes présente en effet des difficultés.

Nous étudierons ici la stabilité des talus constitués de sols purement cohérents anisotropes : l'application de la théorie du Calcul à la rupture permet, ici encore, de procéder à une analyse claire et rigoureuse qui s'appuie sur la connaissance du critère de résistance du sol, hors de toute autre hypothèse complémentaire. La stabilité de l'ouvrage sera caractérisée par la valeur de son *coefficient de rupture*. Nous donnerons une série d'abaques pour l'analyse pratique de la stabilité des talus, obtenue par une méthode basée sur l'utilisation de mécanismes par blocs rigides.

Les raisonnements mis en oeuvre auront une portée générale ; la théorie du Calcul à la rupture ne sera exposée que dans son application au problème étudié ; les lecteurs souhaitant une présentation plus générale pourront se reporter aux références indiquées.

2 - ANISOTROPIE DES SOLS COHERENTS

2.1 - Résultats expérimentaux, formule de Bishop

L'anisotropie de cohésion présentée par divers sols a été mise en évidence à plusieurs reprises. Par des essais triaxiaux non drainés notamment : on définit l'angle α , inclinaison de l'axe de l'échantillon lors du prélèvement par rapport à la verticale Oy , on désigne par σ_1 et σ_3 respectivement les contraintes principales axiale et radiale, positives en compression, et on caractérise la résistance de cet échantillon par la valeur de sa cohésion $C(\alpha) = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ déterminée au triaxial. Il est d'usage de poser : $C(0) = C_v$, $C(\pi/2) = C_h$ et de représenter l'anisotropie par un diagramme polaire : la figure 1 rappelle les résultats obtenus par divers auteurs : (1) Jacobsen (1955), (2) Duncan et Seed (1966), (3) Bishop (1966), (4) Lo et Milligan (1967).

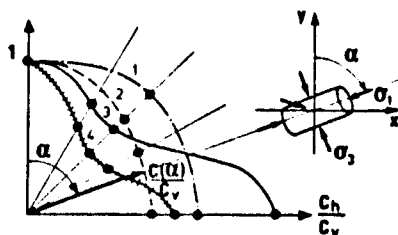


Figure 1 : Résultats d'essais triaxiaux sur des sols anisotropes.

Pour représenter cette anisotropie, Bishop (1966) a proposé une formule définissant $C(\alpha)$ en fonction des valeurs de α , C_v , C_h et $C(45)$ notée $C(45)$; posant : $K_1 = C_h/C_v$ et $K_2 = C(45)/C_v$, il écrit :

$$(2.1) \quad C(\alpha) = C_v (1 - a \sin^2 \alpha) (1 - b \sin^2 2\alpha)$$

avec $a = (1 - K_1)$ et $b = 1 - K_2/(1 - a/2)$.

Cette formule, plus générale que celle de Casagrande et Carrillo (1944), permet de rendre compte des principaux types d'anisotropie rencontrés dans la pratique.

2.2 - Critère de résistance anisotrope

A partir de ces résultats nous écrivons le critère de résistance du sol en nous appuyant sur les deux hypothèses suivantes :

- 1 - Critère de résistance ne dépendant que de la différence des contraintes principales extrêmes,
- 2 - et de l'inclinaison α de la contrainte principale compressive majeure sur Oy (direction verticale en général) (*).

Les valeurs principales du tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ étant notées $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ (positives en compression), on pose $\alpha = (Oy, \sigma_1)$ et la condition de résistance du sol s'écrit :

$$(2.2) \quad f(\underline{\sigma}) = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 - C(\alpha) < 0$$

où $C(\alpha)$ est donnée par (2.1). Cette condition définit le domaine des états de contrainte admissibles pour le sol. Celui-ci est évidemment étoilé de centre O, c'est-à-dire que :

$$(2.3) \quad f(\underline{\sigma}) < 0 \implies f(\lambda \underline{\sigma}) < 0 \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

par contre, il n'est pas toujours convexe.

3 - COEFFICIENT DE RUPTURE D'UN TALUS

3.1 - Le problème étudié

Les paramètres définissant le problème posé apparaissent sur la figure 2 : le talus est défini par sa géométrie (talus de longueur illimitée, pente β , hauteur H), le critère de résistance du sol constitutif supposé homogène (formule 2.2), et son chargement (le poids volumique γ du sol) ; est-il possible que cet ouvrage soit stable ?

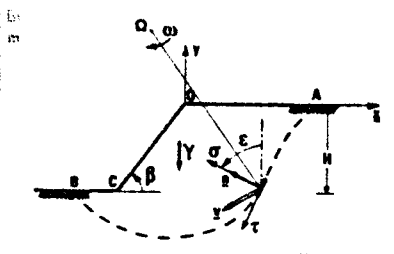


Figure 2 : Stabilité d'un talus en sol cohérent anisotrope.

La réponse à cette question procède d'un raisonnement très simple et l'on peut affirmer que :

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour que le talus soit stable il doit exister au} \\ \text{moins un champ de contraintes } \underline{\sigma} \text{ en équilibre sta-} \\ \text{tique avec le chargement et respectant en tout} \\ \text{point la condition de résistance (2.2).} \end{array} \right.$$

S'agissant là d'une condition nécessaire de stabilité, un talus pour lequel (3.1) est vérifié sera dit "potentiellement stable", il est clair que si (3.1) n'est pas vérifié le talus est certainement instable.

3.2 - Définition du coefficient de rupture

Les paramètres du problème peuvent être séparés en trois groupes : H, β pour la géométrie ; C_V, K_1, K_2 pour la résistance ; γ pour le chargement (tous positifs).

En fixant les paramètres de géométrie et de résistance et en considérant γ comme variable on examine la stabilité d'un même talus en fonction de son chargement γ . Il résulte alors de la propriété (2.3) que l'ensemble des valeurs de γ pour lesquelles le talus est potentiellement stable est le segment $O\gamma^+$: $0 < \gamma < \gamma^+$, dans lequel γ^+ , valeur "extrême", est d'après la définition donnée au § 3.1, une fonction $\gamma^+ = f(C_V, K_1, K_2, H, \beta)$,

(*) Ceci implique que le sol est transversalement isotrope autour de Oy.

qui par l'analyse dimensionnelle se met nécessairement sous la forme :

$$(3.2) \quad \gamma^+ = N(K_1, K_2, \beta) \times C_V/H$$

où N est une fonction scalaire des arguments indiqués.

Nous définissons le coefficient de rupture pour un talus donné, par la formule $F = \gamma^+/\gamma$, soit d'après (3.2) :

$$(3.3) \quad F(H, \beta, C_V, K_1, K_2, \gamma) = \frac{C_V}{\gamma H} N(K_1, K_2, \beta).$$

F possède évidemment les propriétés suivantes :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} F < 1 \implies \text{talus instable} \\ F > 1 \iff \text{talus potentiellement stable,} \end{array} \right.$$

il apparaît comme un coefficient portant sur la cohésion, ou sur le poids volumique, ou sur la géométrie : c'est-à-dire que tous les autres paramètres étant fixés, la hauteur extrême du talus est :

$$(3.5) \quad H^+ = N(K_1, K_2, \beta) \times C_V/\gamma.$$

4 - DETERMINATION DE F

4.1 - Approche par excès par voie "statique"

La définition de F et tous les raisonnements qui précèdent sont fondés sur des considérations d'équilibre statique sous condition de résistance. Les méthodes pour la détermination de F ne doivent donc faire appel à aucune hypothèse ou "constatation expérimentale" supplémentaire ; elles découlent directement de (3.1). Ainsi, considérons (figure 2) une courbe telle que AB tracée à travers le talus : il résulte de (3.1) que pour que le talus soit potentiellement stable il faut que l'équilibre global du volume OCBAO soit possible en respectant le long de AB la condition (2.2) ; en conséquence toute valeur de $\gamma H/C_V$ pour laquelle l'équilibre global du volume OCBAO est incompatible avec (2.2) le long de AB, est une borne supérieure de $N(K_1, K_2, \beta)$.

L'utilisation de cette méthode d'approche par excès présente des difficultés : elle nécessite de déterminer la distribution optimale de $\underline{\sigma}$ le long de la courbe AB équilibrant γ et respectant (2.2), c'est-à-dire assurant la compatibilité "équilibre-résistance" pour la plus grande valeur de $\gamma H/C_V$ possible qui constitue alors la borne supérieure de N pour cette courbe ; il convient ensuite de minimiser sur les courbes AB elles-mêmes pour améliorer le résultat.

4.2 - Approche par excès par voie "cinématique"

La dualisation de cette approche par le principe des puissances virtuelles, base de l'approche par l'extérieur en théorie du Calcul à la rupture, aboutit à une approche beaucoup plus commode. On introduit les notations suivantes (figure 2) : σ, τ composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte $\underline{\sigma}$. \underline{n} agissant sur la facette tangente à AB de normale \underline{n} , \underline{v}_n et \underline{v}_t composantes homologues de la vitesse \underline{v} .

Par la dualisation indiquée il vient :

$\gamma H/C_V$ est une borne supérieure de N s'il existe un champ de vitesse \underline{v} , rigidifiant OCBAO, tel que pour tout champ de contrainte $\underline{\sigma}$ en équilibre avec γ dans OCBAO et respectant (2.2) sur AB on ait, en γ désignant par $P(\gamma, \underline{v})$ la puissance des forces de pesanteur :

$$(4.1) \quad P(\gamma, \underline{v}) = \int_{AB} (\sigma v_n + \tau v_t) ds.$$

Introduisons alors la fonction π définie par :

$$(4.2) \quad \pi(\underline{v}, \underline{n}) = \text{Sup} \left\{ -\sigma v_n - \tau v_t \mid \underline{\sigma} : f(\underline{\sigma}) < 0 \right\},$$

et posons :

$$(4.3) \quad P(\underline{v}) = \int_{\widehat{AB}} \pi(\underline{v}, \underline{n}) ds;$$

il est clair que si dans un champ \underline{v} rigidifiant OCBAO on a :

$$(4.4) \quad P(\underline{v}, \underline{v}) > P(\underline{v})$$

alors, $F(H, B, C_V, K_1, K_2, \gamma) < 1$,

c'est-à-dire que $\gamma H / C_V > N(K_1, K_2, \beta)$.

Plus précisément, puisque pour $\underline{v}^+ = F\underline{v}$ on a nécessairement : $P(\underline{v}^+, \underline{v}) = FP(\underline{v}, \underline{v}) < P(\underline{v})$, on voit que tout champ \underline{v} rigidifiant OCBAO fournit une majoration F_V de F par la formule :

$$(4.5) \quad F_V(H, B, C_V, K_1, K_2, \gamma, \widehat{AB}) = P(\underline{v}) / P(\underline{v}, \underline{v}).$$

L'application de cette méthode nécessite de déterminer au préalable $\pi(\underline{v}, \underline{n})$. On devra ensuite minimiser F_V par rapport à \underline{v} et à \widehat{AB} de façon à obtenir la meilleure borne supérieure pour F .

4.3 - La fonction $\pi(\underline{v}, \underline{n})$ est d'après la formule (4.2) définie à partir de la seule connaissance du critère de résistance du sol. Compte-tenu de la forme de ce critère donnée par (2.2) il est clair que :

(4.6) $\pi(\underline{v}, \underline{n}) = +\infty$ si $v_n \neq 0$,

et que pour $v_n = 0$, la valeur du Sup dans (4.2) est obtenue quand le tenseur $\underline{\sigma}$ a ses deux contraintes principales majeure et mineure (σ_1 et σ_2) dans le plan de section droite du talus. En posant $\epsilon = (\sigma_1, \underline{n})$ on voit que $\pi(\underline{v}, \underline{n}) = \text{Sup} \{-\tau \cdot v_t \mid \underline{\sigma} : f(\underline{\sigma}) < 0\}$ prend la forme :

$$(4.7) \quad \pi(\underline{v}, \underline{n}) = \text{Max}_{\alpha} \left\{ v_t c(\alpha) \sin 2(\epsilon - \alpha) \right\};$$

Le calcul en a été fait par Tristán-López (1979), pour $c(\alpha)$ donné par (2.1); $\pi(\underline{v}, \underline{n})$ est une fonction qui dépend des paramètres C_V, K_1, K_2 définissant la résistance, d'où la dépendance annoncée dans (4.5) pour F_V .

4.4 - Forme optimale de \widehat{AB}

La courbe \widehat{AB} doit évidemment être choisie de manière à fournir une majoration F_V de F non triviale ; pour cela $P(\underline{v})$ doit être finie : d'après (4.3 et 4.6) \underline{v} doit donc être tangente à \widehat{AB} en tout point ; \widehat{AB} doit ainsi être une ligne de glissement. Soit Ω le centre instantané et ω la vitesse de rotation définissant le mouvement rigidifiant de OCBAO : pour que F_V soit finie, il faut que \widehat{AB} soit un arc de cercle centré en Ω (segment de droite si Ω est à l'infini). Cela signifie, en se reportant au raisonnement initial du § 4.1, que le volume dont l'équilibre global sous la condition (2.2) est le plus critique, est nécessairement limité par un arc de cercle.

La recherche de la majoration de F_V optimale se ramènera donc à la minimisation par rapport à la position du centre de rotation Ω et au rayon du cercle \widehat{AB} (la minimisation par rapport à ω est banale car F_V ne dépend que du signe de ω et il convient d'assurer la positivité de $P(\underline{v}, \underline{v})$). Nous désignerons par F^* la borne supérieure obtenue ainsi, qui se met sous la forme :

$$(4.8) \quad F^*(H, B, C_V, K_1, K_2, \gamma) = \frac{C_V}{\gamma H} N^*(K_1, K_2, \beta).$$

5 - ABAQUES DE CALCUL

Les résultats obtenus sont présentés à la figure 3 sous forme d'abaques de N^* en fonction de K_1 et K_2 pour diverses valeurs de l'inclinaison β : 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90° et des rapports d'anisotropie : K_1 de 0,6 à 2,0 et K_2 de 0,5 à 1,4.

La rupture de pente sur certaines des courbes tracées marque le passage pour le cercle optimal, d'un cercle passant par le pied du talus à un cercle passant sous le pied, quand K_1 décroît. Pour chaque inclinaison β on a repéré également le cas particulier de la courbe correspondant à N^* lorsque $K_2 = (1 + K_1)/2$: soit dont l'anisotropie est définie à partir de K_1 seul par la formule de Casagrande et Carrillo.

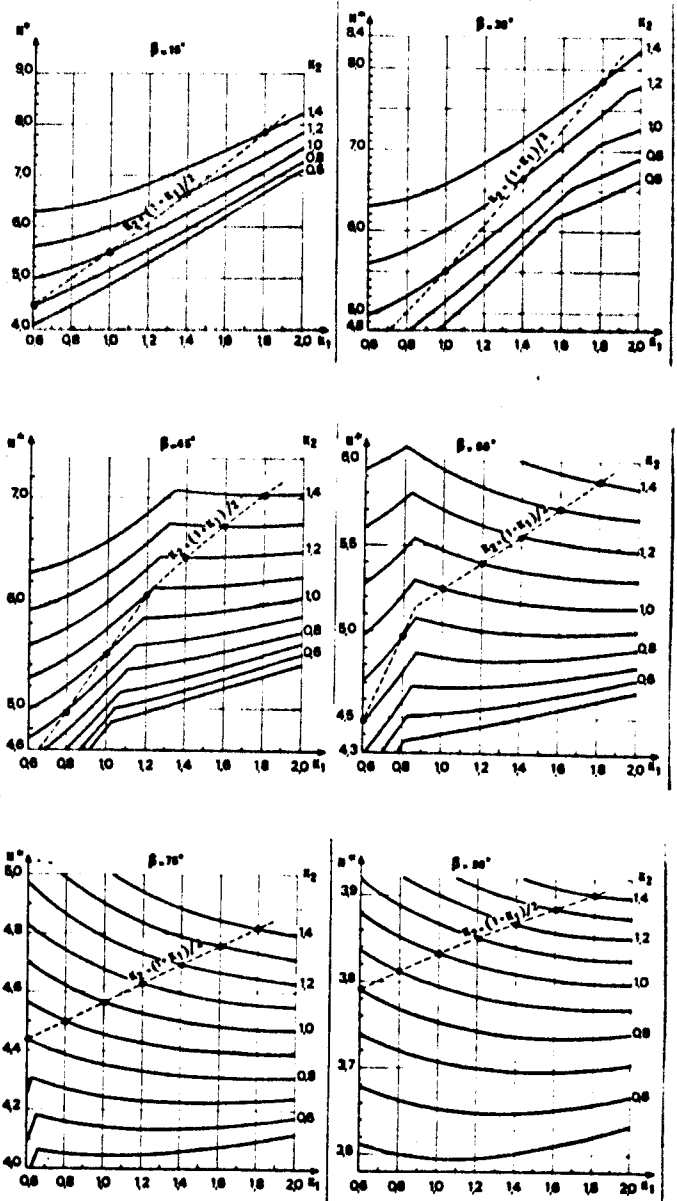


Figure 3 : Abaques pour l'analyse de la stabilité des talus en sols cohérents anisotropes.

6 - ANALYSE DE CES RESULTATS

6.1 - Etude d'un exemple

Nous avons examiné le cas du remblai expérimental de Cubzac-Les-Ponts (France). D'après les essais in situ rapportés par Josseume et Coll. (1977), le sol présentait un rapport d'anisotropie $K_1 = 0,53$; la valeur de K_2 n'a pas été précisée; $C_v/YH = 0,25$; $tg \beta = 2/3$. La figure 4 met en évidence sur cet exemple la forte dépendance de F^* vis-à-vis de K_2 , et donc l'importance qu'il y a à déterminer ce rapport; en particulier on voit que si l'on se réfère à la formule de Casagrande et Carrillo pour définir l'anisotropie à partir de K_1 uniquement, la valeur obtenue pour le coefficient de rupture est inférieure de 23 % à celle obtenue pour le sol isotrope de cohésion C_v , notée F^*_{iso} .

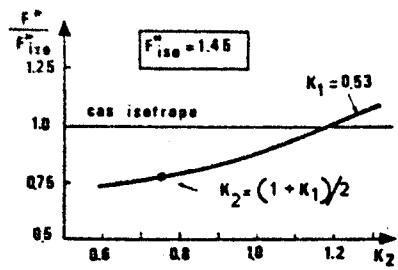


Figure 4 : Remblai de Cubzac-Les-Ponts: coefficient de rupture en fonction de l'anisotropie.

6.2 - Importance du rôle de l'anisotropie

D'une façon générale, il apparaît clairement sur les abaques de la figure 3 que l'influence de l'anisotropie du sol sur la valeur obtenue pour le coefficient de rupture, est d'autant plus marquée que l'inclinaison β du talus est plus faible.

6.3 - Comparaison avec d'autres méthodes

Des approches du problème de la stabilité des talus en sols cohérents anisotropes ont été données par Lo (1965) et par Chen (1975). Ces auteurs, transposant les méthodes classiques pour les sols isotropes, considèrent des mécanismes par blocs avec ligne de rupture circulaire: cherchant à évaluer le "moment résistant" ils s'appuient sur des considérations expérimentales pour déterminer la valeur de la contrainte tangentielle le long de la ligne de rupture. En fait, bien que ces auteurs fassent appel à la formule de Casagrande et Carrillo, les analyses qu'ils présentent ne sont pas cohérentes du point de vue mécanique avec le critère de résistance déduit de cette formule: il en résulte que les valeurs obtenues se situent, suivant les cas, en deça ou au-delà de la valeur de F^* que nous avons obtenue pour ce critère. La comparaison est présentée sur la figure 5 où l'on a tracé les courbes représentatives des coefficients de stabilité obtenus par les diverses méthodes pour $\beta = 30^\circ$ et 50° (à noter que Chen, 1975, propose deux résultats différents). On remarquera qu'aucun résultat n'a été donné par Lo et Chen pour $K_1 > 1$, ni d'une façon générale pour l'anisotropie définie par la formule de Bishop.

Meyerhof (1965) a proposé d'analyser la stabilité d'un talus en sol cohérent anisotrope en utilisant les formules valables pour le sol isotrope avec une cohésion moyenne $C' = (C_h + C_v)/2$. Cette méthode heuristique n'a évidemment aucune justification théorique; ses résultats sont également représentés sur la fig. 5 pour $\beta = 30^\circ$ et 50° .

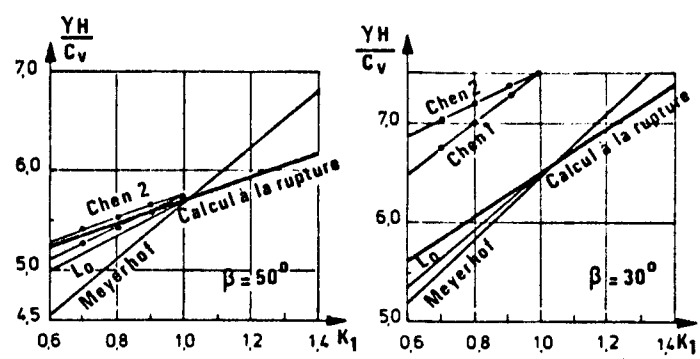


Figure 5 : Comparaison des résultats obtenus par diverses méthodes pour $\beta = 30^\circ$ et 50° et anisotropie de Casagrande et Carrillo: $K_2 = (1 + K_1)/2$.

7 - CONCLUSION

Cette étude fournit aux ingénieurs le moyen d'analyser pratiquement la stabilité d'un talus constitué d'un sol cohérent homogène anisotrope, à partir de la seule définition de l'anisotropie par la formule de Bishop (ou de Casagrande et Carrillo): des abaques permettent maintenant d'évaluer le coefficient de rupture du talus. L'évaluation obtenue, F^* , est la meilleure que puisse fournir une analyse fondée sur l'équilibre global d'un bloc. Nous avons montré l'importance de l'influence de l'anisotropie sur la valeur du coefficient de rupture, mettant en particulier en évidence l'importance de prendre en compte cette propriété pour les talus de pentes faibles.

REFERENCES

BAKER, WH & GARBER, M (1978) *Theoretical analysis of the stability of slopes*. Géotechnique, (28), 4, 395-411.
 BISHOP, AW (1966) *The strength of soils as engineering materials*. Géotechnique, 16, 2, 89-130.
 CASAGRANDE, A & CARRILLO, N (1944) *Shear failure of anisotropic materials*. Jnl of the Boston Soc. Civ. Eng. (31), 4, 74-87.
 CHEN, WF (1975) *Limit analysis and soil plasticity*. Elsevier Sc. Publ. Co., Amsterdam.
 DUNCAN, JM & SEED, HB (1966) *Strength variation along failure surfaces in clay*. Jnl Soil Mech & Found. Div. ASCE (92) SM6, 81-104.
 JACOBSEN, B (1955) *Isotropy of clays*. Géotechnique, (5), 1, 23-28.
 JOSSEAUME, H, BLONDEAU, F & PILOT, G (1977) *Etude du comportement non drainé de trois argiles molles. Application au calcul des remblais*. Bull. Liaison P. et Ch. spéc. VI F., déc. 1977, 120-128.
 LO, KY (1965) *Stability of slopes in anisotropic soils*. Jnl Soil Mech. & Found. Div. ASCE (91), SM4, 85-106.
 LO, KY & MILLIGAN, V (1967) *Shear strength properties of two stratified clays*. Jnl Soil Mech. & Found. Div. ASCE, (93), SM1, 1-15.
 MEYERHOF, G (1965) *Discussion on: Stability of Slopes in anisotropic soils*. Jnl Soil Mech. & Found. Div. ASCE, (91), SM6, 32.
 SALENÇON, J (1978) *Calcul à la rupture et analyse limite*. Cours E.N.P.C., Paris, 20-38.
 SALENÇON, J & COUSSY, O (1979) *Analyse de la stabilité des remblais sur sols mous*. C.R. Symp. Int. Méc. Sols, Mars 1979, Oaxaca (Mexique), (1), 145-153.
 TRISTÁN-LÓPEZ, A (1979) *Application du calcul à la rupture à un problème de mécanique des sols anisotropes*. Mémoire de D.E.A., Laboratoire de Mécanique des Solides (Palaiseau), Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, (Paris).