SIMPOSIO INTERNACIONAL DE MECANICA DE SUELOS

INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SOIL MECHANICS

SYMPOSIUM INTERNATIONAL DE MECANIQUE DES SOLS

VOLUMEN
VOLUME 1

OAXACA
1979

sociedad mexicana de mecánica de suelos, a. c.

Analyse de la Stabilité des Remblais sur Sols Mous

J. SALENCON, Professeur
O. COUSSY, Docteur-Ingénieur

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris
Laboratoire de Mecánique des Solides,
Ecole Polytechnique, Palaiseau, France

RESUME : On étudie la stabilité des remblais sur sols mous par le raisonnement fondamental du calcul à la rupture ; à partir de la connaissance des critères de résistance définissant les états de contraintes admissibles pour les sols constitutifs on définit le "coefficient de rupture" de l'ouvrage examiné dont la signification est claire : si le coefficient de rupture est inférieur à 1, le remblai est certainement instable. Le coefficient de rupture peut être approché par excès par des méthodes statiques et par des méthodes cinématiques qui apparaissent comme les plus commodes. En particulier l'usage, dans l'approche cinématique, de mécanismes par blocs conduit à la "méthode du coefficient de rupture". Celle-ci, très performante en ce qui concerne par exemple les temps de calcul, peut être étendue pour traiter de nombreux cas pratiques de stabilité de remblais ou de barrages en terre. La comparaison des résultats ainsi obtenus avec ceux donnés par une méthode de tranches met en évidence certaines différences importantes qui prouvent que la méthode du coefficient de rupture est pour le moins un moyen de contrôle intéressant pour les méthodes classiques d'analyse de stabilité en mécanique des sols. La méthode du coefficient de rupture permet aussi de déterminer une"ligne faible" pour le remblai étudié : celle-ci délimite le bloc dont l'équilibre global compte-tenu des critères de résistance est "le plus faible" ; ceci peut constituer un renseignement en ce qui concerne le mécanisme de ruine initial d'un remblai instable.

1 - INTRODUCTION

L'analyse de la stabilité des remblais sur sols mous est, comme l'étude de la stabilité des pentes, un problème encore incomplètement résolu du point de vue théorique en dépit de son importance pratique. De nombreuses méthodes analytiques ont été proposées pour ce genre d'études et leur diversité même est la preuve qu'aucune d'entre elles n'est pleinement satisfaisante. Au cours des dernières années de nouvelles méthodes ont été développées s'appuyant sur l'utilisation des éléments finis. On trouvera dans le travail de Raulin, Rouquès et Toubol (1974) une bonne bibliographie sur le sujet.

D'une manière générale, l'analyse de la stabilité d'un remblai (ou d'une pente) vise à résoudre le problème suivant : pour un remblai donné, défini par ses paramètres géométriques et par la connaissance des critères de résistance des sols constituant le corps du remblai et son assise, déterminer si un tel ouvrage est stable ou instable sous un chargement constitué du poids propre de l'ouvrage lui-même d'une part, et de surcharges données d'autre part. Ce problème est le problème fondamental du Calcul à la rupture.

En mécanique des sols, le premier à avoir posé l'analyse de la stabilité des ouvrages sous cette forme est certainement Coulomb (1773), mais le même type de problème se rencontre aussi dans de nombreux autres domaines de la pratique de l'ingénieur.

Récemment une *théorie* du calcul à la rupture a été mise en forme (Salençon, 1976-1978), élargissant certains travaux de Drucker (1954) et Radenkovic (1961, 1962) et dont les résultats sont, pour ainsi dire, parallèles à ceux présentés dans le livre de Chen (1975).

Le résultat essentiel de cette théorie est de montrer qu'à partir de la seule connaissance de la condition de résistance définissant les états de contrainte admissibles pour le matériau constitutif, il est possible (et seulement possible) d'affirmer qu'un ouvrage donné, sous un chargement donné, (tel que le remblai évoqué plus haut) est *certainement instable* ou, au contraire, *potentiellement stable*. Ceci amène à définir pour l'ouvrage un "coefficient de rupture", facteur scalaire dont la position par rapport à 1 caractérise cette propriété.

La théorie permet de mettre en évidence l'origine des difficultés rencontrées dans la mise en oeuvre de certaines méthodes classiques pour les analyses de stabilité en mécanique des sols (Salençon et Coussy, 1978). Du point de vue pratique, le coefficient de rupture peut être approché par excès par des méthodes s'appuyant sur des raisonnements d'équilibre statique, ou par des méthodes cinématiques qui se révèlent plus commodes. Celles-ci sont obtenues au moyen du principe des puissances virtuelles et ne font aucunement appel à une hypothèse concernant les déformation réelles du sol à l'état limite.

L'article présente l'analyse de la stabilité des remblais sur sols mous sous l'angle du Calcul à la Rupture. La théorie du Calcul à la Rupture n'y sera exposée qu'en ce qui concerne le problème étudié, et sur ce cas particulier ; les lecteurs souhaitant une

présentation plus générale pourront se reporter aux références indiquées. On s'intéressera essentiellement à l'utilisation de mécanismes par blocs rigides pour déterminer une borne supérieure du coefficient de rupture : c'est ainsi que l'on aboutira à la "méthode du coefficient de rupture" pour l'analyse de stabilité. Enfin on mentionnera quelques applications de la méthode à d'autres problèmes tels que l'étude de la stabilité des barrages en terre.

2 - COEFFICIENT de RUPTURE d'un REMBLAI sur SOL MOU

2.1. *Le problème étudié*

On se propose d'étudier la stabilité d'un remblai en sol homogène cohérent et frottant, sur une couche de sol purement cohérent, reposant sur une assise considérée comme rigide.

Les paramètres géométriques sont définis sur la figure 1.

La "condition de résistance" pour le sol constituant le corps du remblai est représentée par le critère de Coulomb : l'angle de frottement est φ et la cohésion C ; elle s'écrit :

$$(2.1) \qquad |\tau| < C + \sigma \operatorname{tg} \varphi, \qquad \forall \ \underline{n},$$

où σ et τ désignent les composantes normale et tangentielle de la contrainte agissant sur une facette quelconque de normale rentrante $\underline{n}$ (les contraintes sont comptées positivement en compression).

Pour le sol dans la couche d'assise, la condition de résistance se réduit à :

$$(2.2) \qquad |\tau| < C'.$$

On doit aussi mentionner ici les conditions de résistance aux contacts "remblai-couche de sol" et "couche de sol-assise rigide" ; une discussion sur l'influence de ces conditions quant à la stabilité de l'ouvrage a été faite par Coussy (1978). Pour fixer les idées on supposera dans la suite qu'il y a adhérence parfaite dans chacun des interfaces, mais cette hypothèse n'aura pas d'incidence sur la signification des résultats finalement obtenus et sur les conclusions qui seront présentées.

Le chargement pour le problème est défini par les poids spécifiques des sols constitutifs du remblai et de la couche, soit γ et γ' respectivement.

Le problème de l'analyse de la stabilité de cet ouvrage se pose donc de la façon suivante : *le remblai étant donné par sa géométrie, ses critères de résistance et son chargement, est-il possible que cet ouvrage soit stable ?*

La réponse à cette question procède d'un raisonnement très simple et l'on peut immédiatement affirmer que :

(2.3) *Pour que le remblai soit stable, il est nécessaire qu'il existe au moins un champ de contrainte σ, satisfaisant toutes les équations de l'équilibre statique en respectant en tout point de l'ouvrage la condition (2.1) ou (2.2) caractérisant le sol constitutif.*

La condition (2.3) n'étant qu'une condition nécessaire de stabilité, un remblai pour lequel (2.3) est vérifiée sera dit *"potentiellement stable"* ; par contre un remblai pour lequel (2.3) n'est pas vérifiée est *certainement instable.*

2.2. *Définition du coefficient de rupture*

Les paramètres définissant le problème peuvent être séparés en trois groupes :

B, H, D, β, *pour la géométrie,*
C, C', φ, *pour la résistance,*
γ, γ', *pour le chargement* (γ, $\gamma' > 0$).

En fixant les paramètres de géométrie et de résistance, et en considérant γ et γ' comme des variables, on examine la stabilité du même remblai en fonction de son chargement (γ, γ'). Il résulte alors de la convexité des critères de résistance (2.1) et (2.2) que : dans le plan des paramètres de chargement (γ,γ'), les points de charge correspondant à des remblais potentiellement stables définissent un ensemble convexe contenant le point O. La figure 2 représente le domaine des remblais potentiellement stables ; la forme précise indiquée peut être démontrée mais elle n'est pas essentielle pour la poursuite de la démonstration.

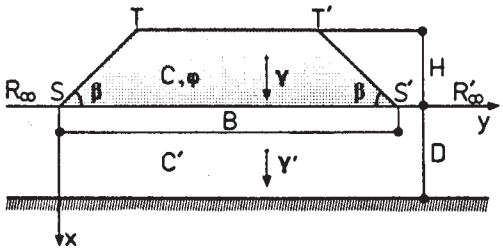

Figure 1 :
Analyse de la stabilité d'un remblai sur sol mou.

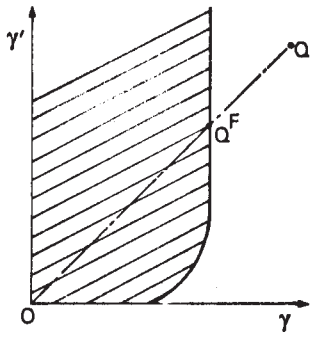

Figure 2 :
Remblais potentiellement stables à géométrie et résistance fixées (Coussy, 1978).

Cela étant on définira le coefficient de rupture pour le remblai, dans le cas de charge représenté par un point Q dans le plan (γ, γ') de la figure 2, par le rapport :

$$(2.4) \qquad F = \overline{OQ^F} / \overline{OQ},$$

où Q^F désigne l'intersection du rayon vecteur $\underline{OQ}$ avec la frontière du domaine convexe des remblais potentiellement stables.

Il est clair que le coefficient F ainsi défini possède la propriété suivante :

$$(2.5) \quad \begin{cases} F < 1 \longrightarrow \textit{remblai instable,} \\ F > 1 \longrightarrow \textit{remblai potentiellement stable.} \end{cases}$$

L'analyse dimensionnelle de ce coefficient, scalaire dépendant de tous les paramètres définissant le problème, montre qu'il peut nécessairement se mettre sous la forme :

$$(2.6) \qquad F = F\left(\frac{C'}{\gamma H}, \frac{C}{C'}, \frac{\gamma'}{\gamma}, \frac{B}{H}, \frac{D}{H}, \beta, \varphi\right).$$

De plus, il est évident, par la définition (2.4), qu'une homothétie d'origine O effectuée sur Q conduit à multiplier F par le rapport d'homothétie ; il en résulte que F se met nécessairement sous la forme :

$$(2.7) \qquad F = \frac{C'}{\gamma H} \kappa^+\left(\frac{C}{C'}, \frac{\gamma'}{\gamma}, \frac{B}{H}, \frac{D}{H}, \beta, \varphi\right)$$

où κ^+ est une fonction scalaire des arguments indiqués.

2.3. *Interprétation du coefficient de rupture*

L'équation (2.7) permet de dégager trois interprétations différentes pour le coefficient de rupture F :

1) coefficient sur les cohésions,
si le remblai de caractéristiques B, H, D, β, C, C', φ, γ, γ' est potentiellement stable, son coefficient de rupture étant égal à $F > 1$ alors, tout remblai de caractéristiques B, H, D, β, φ, γ, γ' identiques aux précédentes et de cohésion $\overline{C} = C/\lambda$ et $\overline{C'} = C'/\lambda$, avec $\lambda > F$, est certainement instable (pour ce remblai : $\overline{F} < 1$).

2) coefficient sur la géométrie,
si le remblai ... $F > 1$, alors tout remblai de caractéristiques C, C', φ, γ, γ' identiques aux précédentes avec les paramètres géométriques $\overline{B} = \lambda B$, $\overline{H} = \lambda H$, $\overline{D} = \lambda D$, $\overline{\beta} = \beta$, où $\lambda > F$, est certainement instable ($\overline{F} < 1$).

3) coefficient sur les poids spécifiques,
si le remblai ... $F > 1$, alors tout remblai de caractéristiques B, H, D, β, C, C', φ identiques aux précédentes, avec les poids spécifiques $\overline{\gamma'} = \lambda\gamma'$ et $\overline{\gamma} = \lambda\gamma$, où $\lambda > F$, est certainement instable (c'est le cas des expériences sur modèles réduits en centrifugeuse).

Ainsi qu'il apparaîtra dans la suite, le coefficient de rupture F défini par la formule (2.4) est très commode pour l'utilisation pratique, en particulier du point de vue cinématique. Par la première interprétation donnée plus haut, F apparaît comme un coefficient sur les cohésions, alors que l'on préfère souvent dans l'utilisation des méthodes classiques d'analyse de stabilité -telles que la méthode des tranches- se référer à un coefficient sur la résistance totale : cela signifie que le coefficient, au lieu de porter sur la cohésion de chacun des sols, concerne la résistance au cisaillement maximale mobilisable pour une valeur donnée de σ soit : $|\tau| = C + \sigma \operatorname{tg} \varphi$ et $|\tau| = C'$; ainsi ce coefficient concerne en fait C' et C d'une part et $\operatorname{tg} \varphi$ de l'autre.

La définition d'un coefficient de rupture sur la résistance totale, $\mathcal{F}$, ne présente aucune difficulté : $\mathcal{F}$ sera la solution de l'équation implicite :

$$(2.8) \qquad \mathcal{F} = \frac{C'}{\gamma H} \kappa^+\left(\frac{C}{C'}, \frac{\gamma'}{\gamma}, \frac{B}{H}, \frac{D}{H}, \beta, \operatorname{Arc\,tg}[\operatorname{tg}\varphi/\mathcal{F}]\right),$$

et sa détermination se fera par itérations. Il est clair que ce coefficient $\mathcal{F}$ possède la même propriété (2.4) que F et que pour un remblai donné, les valeurs de F et $\mathcal{F}$ se placent de la même façon par rapport à la valeur cruciale 1 :

$$(2.9) \quad \begin{cases} F\left(\frac{C'}{\gamma H}, \frac{C}{C'}, \frac{\gamma'}{\gamma}, \frac{B}{H}, \frac{D}{H}, \beta, \varphi\right) \gtrless 1 \\ \qquad \Updownarrow \\ \mathcal{F}\left(\frac{C'}{\gamma H}, \frac{C}{C'}, \frac{\gamma'}{\gamma}, \frac{B}{H}, \frac{D}{H}, \beta, \varphi\right) \gtrless 1 . \end{cases}$$

3 - *APPROCHE par EXCES de F par VOIE STATIQUE*

L'introduction du coefficient de rupture F ainsi que tous les raisonnements utilisés précédemment sont fondés sur des considérations d'équilibre statique.

Pour des valeurs données des paramètres C/C', γ'/γ, B/H, D/H, β, φ, la valeur de la fonction κ^+ dans la formule (2.7) apparaît comme la valeur maximale du paramètre $\gamma H/C'$ pour laquelle il existe un champ de contrainte $\underline{\sigma}$ satisfaisant la condition nécessaire (2.3).

Réciproquement, toute valeur de $\gamma H/C'$ pour laquelle un tel champ de contrainte n'existe pas est une borne supérieure pour κ^+. Cela signifie que toute valeur de $\gamma H/C'$ pour laquelle les équations d'équilibre et les critères de résistance sont incompatibles est une borne supérieure de κ^+. Connaissant une telle borne supérieure de κ^+, soit K_M, pour un ensemble donné de paramètres $(C/C', \gamma'/\gamma, B/H, D/H, \beta, \varphi)$, on obtient une borne supérieure F_M du coefficient de rupture F pour tout remblai de mêmes caractéristiques $(C/C', \gamma'/\gamma, B/H, D/H, \beta, \varphi)$ et une valeur quelconque de $\gamma H/C'$, au moyen de la formule :

$$(3.1) \qquad F_M = \frac{C'}{\gamma H} K_M .$$

Ce raisonnement est la base même des méthodes d'analyse de stabilité qui examinent l'équilibre d'un bloc. L'idée est simple : on considère une courbe, telle que RBA, tracée à travers le corps du remblai et la couche d'assise (figure 3).

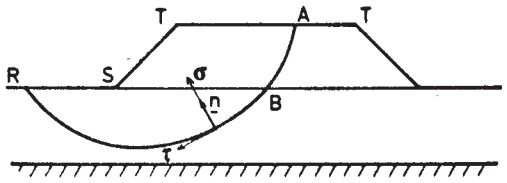

Figure 3 :
Analyse de la stabilité de l'ouvrage par l'étude de l'équilibre d'un bloc

Il résulte évidemment de la condition (2.3) que, pour que le remblai soit stable, il faut que l'équilibre global du bloc RBATSR soit assuré en respectant le long de RBA les conditions (2.1) et (2.2) écrites pour les facettes tangentes à cette courbe. Cette condition est évidemment plus faible que (2.3).

Ainsi, toute valeur de $\gamma H/C'$ pour laquelle l'équilibre global du bloc RBATSR est incompatible avec les critères de résistance (2.2) et (2.1) écrits le long de RB et BA respectivement, est une borne supérieure pour κ^+.

La difficulté de cette approche est de prouver l'incompatibilité "équilibre-critères de résistance" ; en effet, pour une courbe RBA donnée, on ne connait pas *a priori* la distribution optimale des contraintes σ, τ, c'est à dire celle qui assurerait la compatibilité pour la plus grande valeur de $\gamma H/C'$. C'est là l'origine des différences entre les méthodes classiques, fondées sur cette approche statique, et qui font des hypothèses diverses sur la distribution $(\sigma,\tau)_{RBA}$: aussi la valeur maximale ainsi obtenue pour $\gamma H/C'$ peut-elle alors perdre son caractère de borne supérieure pour κ^+, ce qui rend impossible l'interprétation rigoureuse des résultats.

Comme dans le cas de l'analyse de la stabilité d'une pente, on peut montrer qu'un choix judicieux de la forme de la courbe RBA permet d'éviter d'avoir à formuler des hypothèses *a priori* sur $(\sigma,\tau)_{BC}$; le problème est dit alors "statiquement déterminé" par certains auteurs ; la valeur maximale obtenue pour $\gamma H/C'$ est bien une borne supérieure pour κ^+. Il ne nous paraît pas utile d'insister sur cet aspect de la question : en effet, on reviendra dans les chapitres suivants sur le choix de la forme de la courbe RBA en l'abordant du point de vue cinématique par une démarche qui nous semble plus aisée .

4 - APPROCHE par EXCES de F par VOIE CINEMATIQUE

Par le principe des puissances virtuelles, la condition (2.3) peut être mise sous la forme suivante qui lui est équivalente :

(4.1) *Pour que le remblai soit stable il doit exister au moins un champ de contrainte $\underline{\sigma}$, respectant les critères de résistance [(2.1), (2.2)] en tout point de l'ouvrage et tel que sa puissance dans tout champ de vitesse cinématiquement admissible soit égale à la puissance des forces de pesanteur (γ, γ') :*

(4.2) *{Puissance de $\underline{\sigma}$ dans $\underline{v}$} =*
{Puissance de (γ, γ') dans $\underline{v}$} .

Ainsi, pour démontrer que F est inférieur à l'unité, il suffit de prouver que, pour le remblai considéré, dans au moins un champ de vitesse $\underline{v}$, les conditions (4.2) et (2.1), (2.2) partout -c'est-à-dire (2.1) dans le corps du remblai et (2.2) dans la couche d'assise- sont incompatibles.

Autrement dit, pour des paramètres (C/C', γ'/γ, B/H, D/H, β, φ) donnés, pour démontrer que K_M est une borne supérieure de κ^+, il suffit de prouver que pour cette valeur de $\gamma H/C'$ dans au moins un champ de vitesse $\underline{v}$, les conditions (4.2) et (2.1), (2.2) partout, sont incompatibles.

A ce stade cette forme dualisée de l'approche présentée dans les chapitres 2 et 3 ne semble pas devoir être plus commode que sa forme primale.

L'intérêt de la formulation cinématique tient à la propriété fondamentale énoncée ci-dessous, qui est démontrée de façon générale dans la théorie du Calcul à la Rupture et qui sera présentée directement sur le cas particulier étudié au chapitre 5 :

Quel que soit le champ de vitesse $\underline{v}$, et pour tout champ de contrainte $\underline{\sigma}$ satisfaisant (2.1), (2.2) en tout point, le premier membre de (4.2) admet une borne supérieure $P(\underline{v})$ qui est une fonction univoque de $\underline{v}$.

$P(\underline{v})$ dépend des paramètres C, C', φ définissant les conditions (2.1), (2.2) ; $P(\underline{v})$ est positivement homogène de degré 1 par rapport à $\underline{v}$, non-négative, et est finie ou infinie suivant le choix du champ $\underline{v}$.

D'où : $\underline{v}$ étant choisi tel que $P(\underline{v}) < +\infty$, tout remblai pour lequel l'inégalité (4.3) ci-dessous est vraie, est certainement instable (F est inférieur à l'unité) :

(4.3) $P(\underline{v})$ < *{Puissance de (γ,γ') dans $\underline{v}$ }.*

Comme la puissance de (γ, γ') dans $\underline{v}$, soit $p(\gamma,\gamma',\underline{v})$ est évidemment bilinéaire par rapport à (γ,γ') et $\underline{v}$, l'inégalité (4.3) sépare le plan (γ,γ') en deux demi-plans (figure 4) : tout remblai potentiellement stable doit se trouver dans le demi-plan : $P(\underline{v}) > p(\gamma,\gamma',\underline{v})$.

Il apparaît alors clairement sur la figure 4 que, pour un remblai donné, tout champ de vitesse cinématiquement admissible tel que la puissance des forces extérieures (forces de pesanteur) soit positive, fournit une borne supérieure pour le coefficient de rupture, à savoir :

(4.4) $$F_v = P(\underline{v}) \,/\, p(\gamma, \gamma', \underline{v}) > F .$$

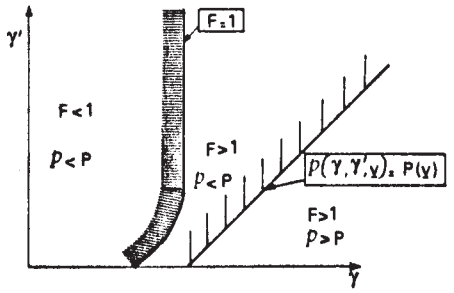

Figure 4 :
Approche par excès de F par voie cinématique .

La qualité de cette majoration sera améliorée en minimisant le rapport F_v sur une classe de champs de vitesse, c'est-à-dire une classe de modes de déformation de l'ouvrage : on obtiendra ainsi une borne supérieure que l'on notera F_M. Il est clair que pour toute majoration de F, et en particulier pour F_M, on a l'implication suivante :

(4.5) $\qquad F_M < 1 \longrightarrow$ *Remblai instable.*

Comme cela est prévisible d'après l'équation (2.7), la borne supérieure F_M sera obtenue sous la forme :

(4.6) $$F_M = \frac{C'}{\gamma H} K_M ,$$

où K_M est une fonction scalaire des mêmes arguments que κ^+ ; K_M est une borne supérieure pour κ^+.

Nous allons maintenant examiner plus en détails l'approche par excès de F au moyen de modes de déformation par blocs rigides.

Il convient d'insister sur le fait que l'approche cinématique présentée ici ne fait appel à aucune hypothèse concernant les déformations du sol à l'état limite (règle d'écoulement ou hypothèse semblable) : $P(\underline{v})$ est définie et peut être calculée à partir de la seule connaissance des critères de résistance.

5 - La METHODE du COEFFICIENT de RUPTURE

5.1. *Modes de déformation par blocs rigides*

Nous nous proposons de calculer un majorant F_M de F par la méthode cinématique décrite au chapitre 4, en utilisant, comme modes de déformation de l'ouvrage, des mécanismes par blocs rigides. On définira un tel mécanisme par son centre instantané de rotation O et la vitesse de rotation ω . RBA est une courbe tracée à travers le corps du remblai et la couche d'assise, et on suppose que le volume RBATSR tourne en bloc autour du point O à la vitesse angulaire ω , tandis que le reste de l'ouvrage demeure immobile. La courbe RBA est une ligne de discontinuité de vitesse.

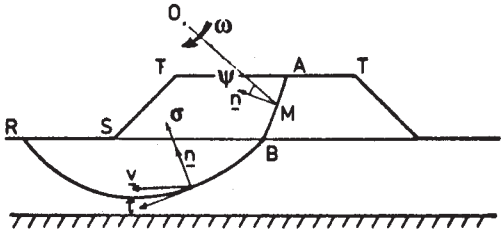

Figure 5 :
Mécanisme par blocs rigides .

Revenant à l'équation (4.2) on voit que pour ce champ de vitesse le premier membre se réduit à :

(5.1) $$\begin{cases} \{\textit{Puissance de } \underline{\sigma} \textit{ dans } \underline{v}\} = \\ -\int_{RB}(\sigma v_n + \tau v_t)ds - \int_{BA}(\sigma v_n + \tau v_t)ds , \end{cases}$$

où v_n et v_t sont les composantes normale et tangentielles de la vitesse $\underline{v}$.

Avec le critère de résistance (2.2), la première intégrale dans (5.1) est évidemment majorée par :

(5.2) $$-\int_{RB}(\sigma v_n + \sigma v_t)ds < \int_{RB} \pi(\underline{v})ds ,$$

où :

(5.3) $$\begin{cases} \pi(\underline{v}) = +\infty & \text{si } v_n \neq 0 , \\ \pi(\underline{v}) = C'|v_t| & \text{si } v_n = 0 . \end{cases}$$

Quant à la seconde intégrale, avec le critère de résistance (2.1), elle est bornée par :

(5.4) $$-\int_{BA}(\sigma v_n + \sigma v_t)ds < \int_{BA} \pi(\underline{v})ds$$

où (figure 6) :

(5.5) $$\begin{cases} \pi(\underline{v}) = +\infty & \text{si } v_n < |v_t| \operatorname{tg} \varphi , \\ \pi(\underline{v}) = C \operatorname{cotg} \varphi \, v_n & \text{si } v_n > |v_t| \operatorname{tg} \varphi . \end{cases}$$

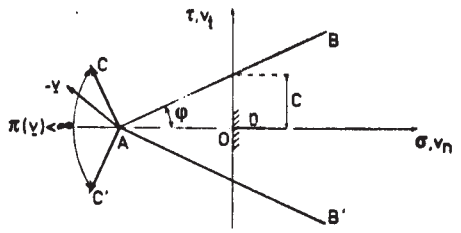

Figure 6 :
Sol cohérent et frottant : courbe intrinsèque et fonction $\pi(\underline{v})$.

On définira donc $P(v)$ par :

$$(5.6) \qquad P(\underline{v}) = \int_{RB} \pi(\underline{v})ds + \int_{BA} \pi(\underline{v})ds.$$

Le mécanisme doit être choisi de façon à obtenir une borne supérieure F_M non triviale, c'est-à-dire que $P(\underline{v})$ doit être finie. Puisque v est la vitesse dans un mouvement rigide autour du point O, pour que la 1ère intégrale soit finie il faut que RB soit un *arc de cercle de centre* O ; pour que la 2ème intégrale soit finie, il résulte de la formule (5.5) qu'en tout point M de BA la normale $\underline{n}$ doit faire un angle ψ avec le rayon vecteur $\underline{OM}$, satisfaisant : $\varphi < \psi < \pi - \varphi$; l'angle ψ peut varier le long de BA. On doit remarquer que la courbe BA ne peut être un arc de cercle. Par exemple, on peut choisir pour BA un arc de spirale logarithmique de centre O avec $\psi = \varphi$ (Rendulic, 1935 ; Drucker et Prager, 1952).

La puissance des forces de pesanteur se décompose aussi en deux termes :

1° pour le bloc RBSR, elle est nulle puisque RB est un arc de cercle de centre O et RSB est horizontal ;

2° pour le bloc BATSB.

On peut alors démontrer (Salençon et Coussy, 1978) que, pour un centre O et un point B fixés, le minimum du rapport F_V est atteint quand BA est un arc de spirale logarithmique de centre O avec $\psi = \varphi$ (cf aussi Chen, 1975 pour un résultat analogue).

En conséquence, pour obtenir F_M, on minimisera F_V sur l'ensemble des mécanismes par blocs rigides pour lesquels RBA se compose d'un arc de cercle de centre O dans la couche d'assise, et d'un arc de spirale logarithmique de centre O avec $\psi = \varphi$ dans le corps du remblai (figure 7).

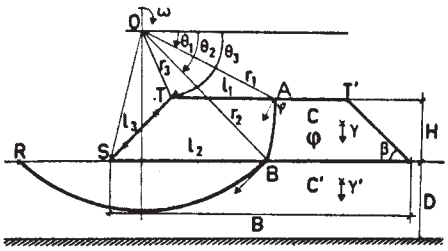

Figure 7 :
Définition des mécanismes par blocs rigides utilisés dans la méthode du coefficient de rupture.

5.2. *Détermination de F_M*

Comme cela est indiqué à la figure 7, on peut décrire commodément un tel mécanisme par blocs rigides au moyen de 3 paramètres angulaires $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, (comptés positivement dans le sens rétrograde). Des calculs détaillés montrent que F_V se met sous la forme :

$$(5.7) \qquad F_V = \frac{C'}{\gamma H} K_V\left(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \frac{C}{C'}, \beta, \varphi\right),$$

où K_V est une fonction scalaire de ses arguments. On obtiendra donc F_M par la formule :

$$(5.8) \qquad F_M = \min_{\theta_1, \theta_2, \theta_3} \{F_V\} = \frac{C'}{\gamma H} \min_{\theta_1, \theta_2, \theta_3} \{K_V\}$$

avec des contraintes d'origine géométrique sur $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, qui font intervenir B/H et D/H. On peut effectuer la minimisation par rapport à θ_3 analytiquement : la valeur de θ_3 qui correspond à l'optimum est une fonction explicite de θ_1 et θ_2. Il reste ensuite à minimiser K_V par rapport à θ_1 et θ_2, sous les contraintes géométriques indiquées, ce qui se fait numériquement. K_V étant une fonction explicite de θ_1 et θ_2, cette procédure numérique est très rapide.

5.3. *Quelques résultats obtenus - Possibilités d'extension*

La figure 8 présente sur des abaques, quelques-uns des résultats obtenus par l'approche cinématique avec mécanismes par blocs rigides. Compte-tenu des formules (4.6) et (5.8) on a choisi de représenter K_M en fonction de D/H pour diverses valeurs des autres paramètres.

La procédure de minimisation détermine aussi la courbe minimisante RBA, que l'on propose d'appeler la "ligne faible" du remblai étudié.

La méthode peut être modifiée pour permettre d'examiner la stabilité d'un remblai avec banquettes, ou d'un remblai reposant sur une multicouche de sols purement cohérents ; on peut aussi traiter le cas d'un remblai construit par étapes pour permettre la consolidation préalable du sol d'assise ; de même pour un remblai avec surcharge répartie ou avec surcharge ponctuelle.

A titre d'exemple, la figure 9 donne quelques abaques pour K_M, dans le cas d'un remblai avec banquettes latérales.

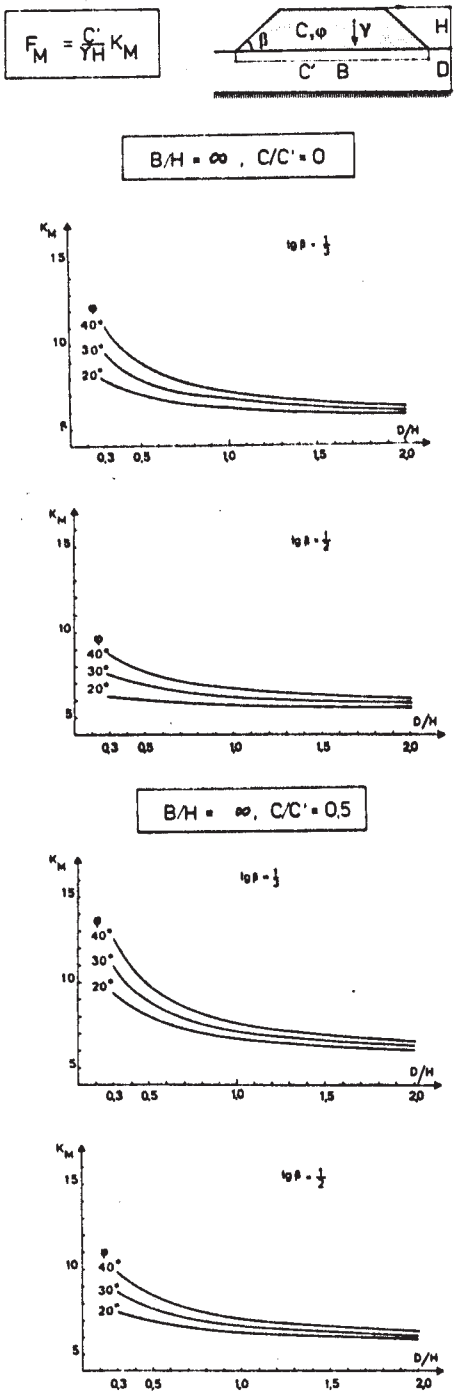

Figure 8 :
Analyse de stabilité d'un remblai sur sol mou : abaques pour K_M.

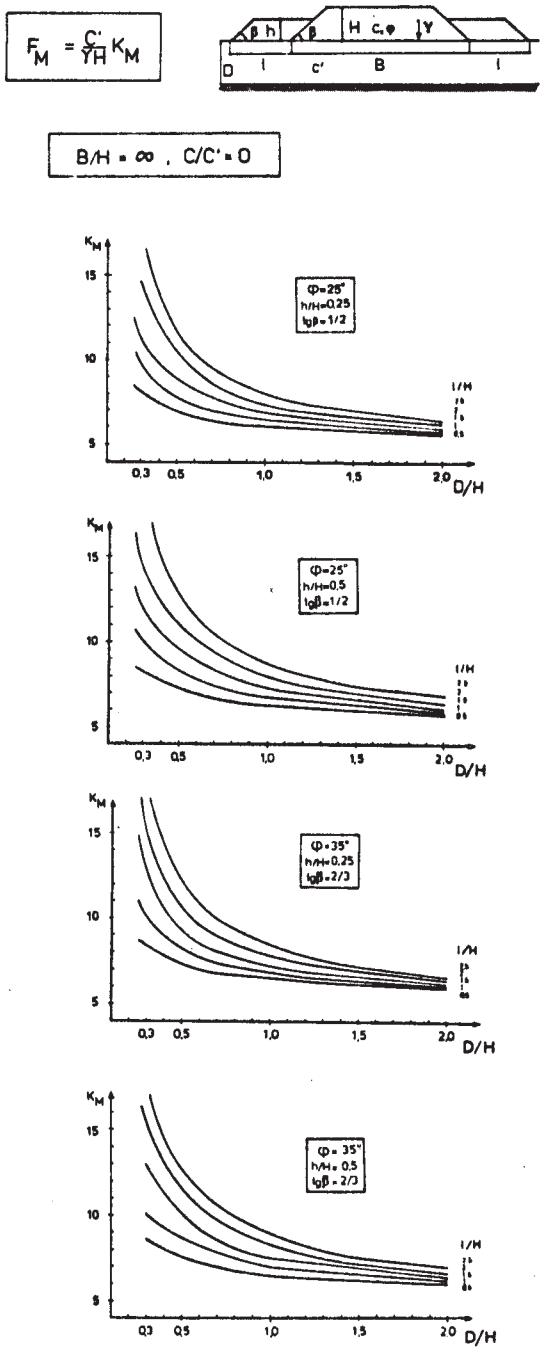

Figure 9 :
Analyse de stabilité d'un remblai avec banquettes latérales : abaques pour K_M.

5.4. *Analyse critique des résultats obtenus*

Dans la suite on conviendra de désigner par "méthode du coefficient de rupture", l'analyse décrite plus haut qui détermine une borne supérieure F_M de F au moyen de mécanismes par blocs rigides.

Il est évidemment intéressant de comparer les résultats obtenus par la méthode du coefficient de rupture avec ceux donnés par une méthode d'analyse classique. A titre d'exemple, on a effectué la comparaison avec les abaques du coefficient de sécurité donnés par Pilot et Moreau (1973) à partir d'une analyse par une méthode de tranches. Il apparaît que :

- pour $C'/\gamma H > 0,1$, le coefficient de rupture et le coefficient de sécurité donnés par la méthode des tranches ne sont pas en désaccord : tous deux sont supérieurs à 1 ;

- pour les faibles valeurs de $C'/\gamma H$, la méthode du coefficient de rupture se révèle fort intéressante, comme on le voit par exemple sur la figure 10 tracée dans le cas $C'/\gamma H = 0,1$: pour $0,3 < D/H < 0,4$, le coefficient de sécurité est supérieur à 1 alors que F_M, majorant du coefficient de rupture, est inférieur à 1. Cela signifie que l'ouvrage est *certainement instable* malgré ce que laisserait à penser la valeur du coefficient de "sécurité".

Il nous semble que ce type de résultats est à rapprocher des usages des praticiens qui accordent des seuils de confiance différents au coefficient de sécurité suivant les valeurs de certains paramètres caractérisant les sols constitutifs . Toutefois, on ne doit pas perdre de vue qu'en fixant la valeur minimale du coefficient de sécurité pour que l'ouvrage soit constructible, à un seuil supérieur à 1, le projeteur a pour but non seulement de se protéger contre l'instabilité mais surtout de se placer suffisamment loin de celle-ci pour en éviter les désordres préliminaires ; l'exemple présenté montre que cet objectif essentiel risque dans certains cas de ne pas être atteint.

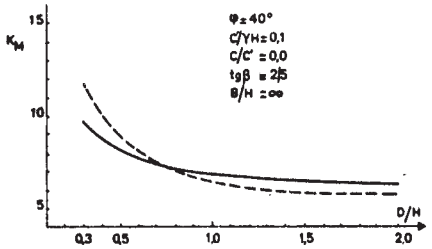

Figure 10 :
Comparaison entre la méthode du coefficient de rupture et une méthode de tranches

Quant à la ligne faible ? On a, à plusieurs reprises, insisté sur le fait que la méthode cinématique ne fait appel à aucune règle d'écoulement ou hypothèse sur le comportement des sols à l'état limite ; il s'ensuit que le mécanisme minimisant ne peut en aucune façon prétendre représenter le mécanisme de rupture qui se produirait pour un remblai instable. De plus, on ne doit pas perdre de vue que seule la classe des mécanismes par blocs rigides a été explorée dans cette minimisation de F_V . En fait, la méthode du coefficient de rupture est strictement équivalente à l'analyse statique présentée au chapitre 3 qui considère l'équilibre d'un bloc : la ligne faible correspond, si l'on peut dire, à l'équilibre "le plus faible".

Toute comparaison avec un mécanisme de ruine observé doit être interprétée avec prudence : en effet, dans le cas d'un remblai instable, de grands déplacements se produisent à la rupture et il est très difficile -pour ne pas dire aventureux- d'essayer d'imaginer le mécanisme de ruine à son tout début, dans la géométrie initiale ! La figure 11 présente une telle comparaison dans le cas d'un remblai sur la Dives. On observera la relative bonne concordance entre la ligne faible calculée et une "reconstitution" du mécanisme initial de ruine "réel".

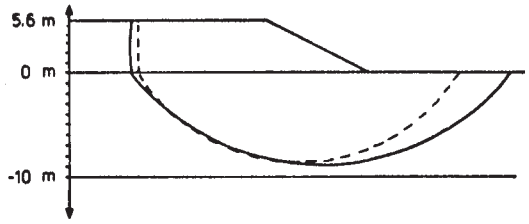

Figure 11 :
Remblai sur la Dives : ligne faible calculée et mécanisme initial de ruine présumé.

Enfin, il n'est pas sans intérêt de signaler que la méthode du coefficient de rupture, convenablement modifiée, peut être utilisée pour analyser la stabilité des barrages en terre ; on se place en contraintes effectives et les forces extérieures sont : les forces de pesanteur (avec les différents poids spécifiques à prendre en compte) et les forces de percolation. Là encore la comparaison entre les résultats obtenus par la méthode du coefficient de rupture et par une methode de tranches révèle le même type de discordances que précédemment, qui se produisent dans des cas non-pathologiques.

6 - CONCLUSION

La méthode du coefficient de rupture est basée sur la seule connaissance des critères de résistance définissant les états de contraintes permis dans les différents sols. En conséquence la signification de la borne supérieure du coefficient de rupture ainsi obtenue est claire : l'instabilité est certaine si cette borne est inférieure à 1.

Sans prétendre à être la méthode-tant-attendue qui résoudrait définitivement tous les problèmes d'analyse de stabilité en mécanique des sols, la méthode du coefficient de rupture, très facile d'emploi constitue à tout le moins un moyen de contrôle efficace des méthode classiques ; on a montré sur des exemples que ceci pouvait être fort utile.

REFERENCES

CHEN W.F. (1975) *Limit analysis and soil plasticity* Development in Geotechnical Engineering, Vol. 7, Elsevier, pp. 399-445.

COULOMB C.A. (1773) *Sur une application des règles de Maximis & Minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture.* Mémoires présentés à l'Académie des Sciences.

COUSSY O. (1977) *Application du calcul à la rupture à la tenue des remblais* - Communication 3ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 6-9 Sept. 1977.

COUSSY O. (1978) *Le calcul à la rupture dans la tenue des ouvrages en terre* - Thèse Dr Ing., Paris.

DRUCKER D.C. (1954) *Coulomb friction, Plasticity and limit loads* - Jl Appl. Mech. Trans.ASME, vol. 21, pp. 71-74.

DRUCKER D.C., PRAGER W. (1952) *Soil mechanics and plastic analysis or limit design* - Quart. Appl. Math., Vol. 10, pp. 157-165.

PILOT G., MOREAU M. (1973) *La stabilité des remblais sur sols mous. Abaques de calcul* - Eyrolles, Paris.

RADENKOVIC D. (1961) *Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb* - C.R. Ac.Sc., Paris, pp. 4103-4104.

RADENKOVIC D. (1962) *Théorie des charges limites* - Séminaire de Plasticité, J. Mandel ed., P.S.T. Min. Air n° 116, pp. 129-142.

RAULIN P. TOUBOL A. et ROUQUES G. (1974) *Calcul de la stabilité des pentes en rupture non circulaire.* Rapport de Recherche n° 36, L.C.P.C., Paris.

RENDULIC L. (1935) *Ein Beitrag zur Bestimmung der Gleitsicherheit* - Der Bauingenieur, n° 19/20.

SALENÇON J. (1976) *Calcul à la rupture* - Cours D.E.A., E.N.P.C., Paris.

SALENÇON J. (1978) *Calcul à la rupture et analyse limite* - Cours E.N.P.C., Paris.

SALENÇON J., COUSSY O. (1978) *Analyse de la stabilité des ouvrages en terre par le calcul à la rupture* - à paraître.

TAYLOR D.W. (1937) *Stability of earth slopes* - Jl of the Boston Society of Civil Engineers, Vol. 24, n° 3, pp. 337-386.

TAYLOR D.W. (1948) *Fundamentals of Soil Mechanics* - John Wiley, 1960.