Analyse de la stabilité des ouvrages en terre par le calcul à la rupture

Par Olivier COUSSY et Jean SALENÇON

1. Introduction.

L'analyse des ouvrages en terre du point de vue de la stabilité repose essentiellement sur le concept de *calcul à la rupture*, mode de raisonnement typique des ingénieurs et dont la mise en œuvre intuitive remonte à plusieurs siècles (cf. par exemple Coulomb, 1773).

Toutefois, il est bien connu des mécaniciens des sols que l'étude de la stabilité d'une pente ou d'un remblai présente des difficultés lorsqu'intervient un sol frottant : variant selon les auteurs, diverses méthodes ont été proposées pour essayer de surmonter ces difficultés en adjoignant à la notion de *surface* ou de *courbe de rupture*, des hypothèses supplémentaires issues de considérations *a priori* sur la répartition des efforts le long de la courbe de rupture, ou sur la façon dont l'équilibre interne du massif de sol situé au-dessus de la courbe de rupture est réalisé, etc. On trouvera en particulier dans le travail de Raulin, Rouquès et Toubol (1974) une présentation de plusieurs méthodes d'analyse de stabilité de pentes ainsi obtenues.

L'origine des difficultés rencontrées provient essentiellement de ce que les raisonnements utilisés de façon intuitive à propos de la ligne de rupture, qui mêlent des considérations de statique (équilibre de bloc) et de cinématique (mécanisme de rupture), et qui permettent pour le sol cohérent de caractériser chaque ligne de rupture *circulaire* par un coefficient, se révèlent inopérants dans le cas de sols frottants.

Il apparaît ainsi qu'une réflexion sur le concept même de ligne de rupture est nécessaire.

Récemment une *théorie* du calcul à la rupture a été mise en forme (Salençon, 1976-1978), élargissant certains travaux de Drucker (1954), Radenkovic (1961, 1962).

On y montre d'une façon générale que pour un ouvrage ou une structure donnés, dans une géométrie fixée, la seule connaissance en chaque point du système du « domaine de résistance » du matériau constitutif — domaine invariable dans le temps assigné en chaque point à l'état de contrainte — permet de définir l'ensemble des chargements dont on peut affirmer avec certitude que, quelles que soient les autres propriétés du matériau, il ne sera pas possible de réaliser l'équilibre de l'ouvrage sans violer le « critère de résistance », et son complémentaire : *l'ensemble des chargements potentiellement supportables.*

L'ensemble des chargements potentiellement supportables par l'ouvrage peut être déterminé par deux méthodes, mathématiquement duales l'une de l'autre : *approche par l'intérieur*, par la construction de champs de contraintes en équilibre et respectant le critère de résistance ; *approche par l'extérieur*, par la construction de champs de vitesses et le calcul dans ceux-ci de la « puissance dissipable » (selon la terminologie introduite par Coussy, 1978).

Il n'est pas de notre propos de donner ici une présentation générale de la théorie du calcul à la rupture et nous renvoyons le lecteur soucieux d'approfondissement aux ouvrages déjà cités.

Il est clair que cette théorie fournit la base fondamentale nécessaire à la mise en œuvre des études de stabilité des ouvrages en terre ; le problème posé est bien en effet le suivant : pour un ouvrage donné, constitué d'un matériau non nécessairement homogène, caractérisé par un critère de Coulomb (C, φ), déterminer si l'ouvrage

est « stable » ou « instable », le chargement étant constitué du poids propre de l'ouvrage et des surcharges éventuelles. A ce problème la théorie du calcul à la rupture permet d'ores et déjà de répondre : il ne sera possible que de déterminer les cas d'instabilité certaine de l'ouvrage, ce qui signifie qu'il y aurait lieu en tout état de cause de parler de coefficient de *rupture* plutôt que de coefficient de sécurité ; cette terminologie, introduite par Coussy (1977), vise à insister sur le fait que, quelle que soit la méthode de calcul, toute approche effectuée dans l'esprit du calcul à la rupture, c'est-à-dire sans la connaissance des autres propriétés des matériaux constitutifs, ne peut au mieux conduire qu'à des *certitudes* d'instabilité ou à des *présomptions* de stabilité. De plus, il va sans dire que ce type d'approche ne peut en aucun cas tenir compte des effets éventuellement stabilisants des changements de géométrie de l'ouvrage.

On se propose ici, sans entrer comme on l'a dit dans les détails du calcul à la rupture, d'examiner dans cet esprit le problème de la stabilité des pentes et des remblais sur sols mous.

Le texte est organisé en deux parties :

La première partie (chapitres 2 et 3) présente sur le cas particulier de l'analyse de la stabilité d'une pente, pour un sol homogène, l'essentiel de la théorie du calcul à la rupture et les notions correspondantes ; on s'y intéresse plus particulièrement aux problèmes d'équilibre de bloc et de mécanismes par blocs, et l'on situe les unes par rapport aux autres les méthodes d'analyse directement déduites de la théorie du calcul à la rupture et celles qui font appel à des hypothèses complémentaires.

La deuxième partie (chapitre 4) vise à mettre en évidence l'intérêt des méthodes directement issues du calcul à la rupture, en présentant les résultats nouveaux obtenus par Coussy (1978) dans l'analyse de la stabilité des remblais sur sols mous, en considérant des mécanismes par blocs, on trouvera dans Coussy (1978) des exemples d'application de ces méthodes à l'analyse de la stabilité d'ouvrages en terre en présence d'eau.

2. Étude de la stabilité d'une pente.

2.1. Problème posé.

On se propose d'analyser la stabilité de la pente représentée à la *figure* 1. Le matériau constitutif est régi par le critère de Coulomb (C, φ). Il est supposé homogène ; son poids volumique γ constitue le « chargement » pour le problème. Les notations sont indiquées sur la figure.

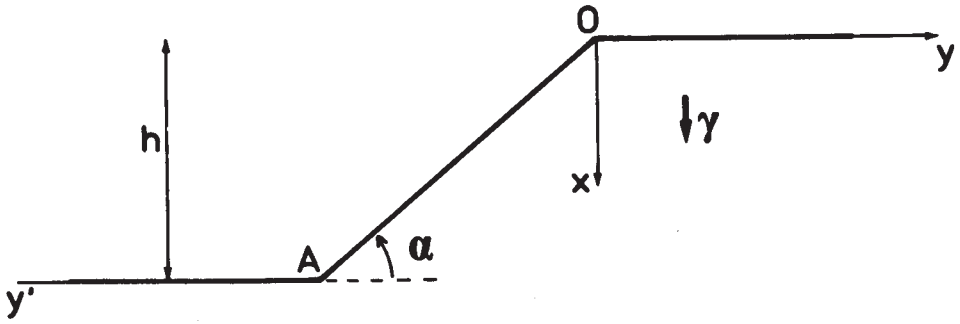


FIG. 1. — *Étude de la stabilité d'une pente.*

La question que l'on se pose est la suivante :

connaissant les paramètres C *et* φ *définissant le sol du point de vue de sa « résistance »,*
connaissant le poids volumique du sol, définissant le chargement,
est-il possible que la pente considérée soit stable ?

2.2. Notion de hauteur potentiellement stable (chargement potentiellement stable).

La réponse à la question posée au § précédent, procède d'un raisonnement très simple. En effet, si une telle pente est stable, c'est qu'il règne dans *tout le massif de sol* un état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$, qui :

(2.1)
1° respecte les conditions d'équilibre à la limite sur $y'AOy$: contraintes normale et tangentielle nulles ;
2° respecte les équations d'équilibre avec, pour force de masse, le poids volumique γ ;
3° respecte en tout point le critère de Coulomb avec les paramètres C et φ ci-dessus.

En conséquence, on peut affirmer que :

pour qu'une pente donnée soit stable, il est nécessaire qu'il existe au moins un état de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ *respectant les conditions* 1°, 2°, 3° *ci-dessus.*

On remarque qu'il ne s'agit que d'une condition nécessaire pour la stabilité de la pente, c'est-à-dire que l'on ne peut pas affirmer que si un tel état de contrainte existe la pente sera stable.

On dira qu'une pente pour laquelle cette condition nécessaire est satisfaite est *potentiellement stable.*

Considérons alors pour les mêmes valeurs de C, φ et α, deux pentes de hauteurs respectives h et h'. Supposons $h' < h$. Il est alors intuitivement évident que si la pente de hauteur h est potentiellement stable, la pente de hauteur h' l'est aussi ([1]).

On peut ainsi parler de hauteur potentiellement stable pour une pente à C, φ, α donnés, et on appellera *hauteur extrême* de la pente, la borne supérieure des hauteurs potentiellement stables, soit h^+.

h^+ est par définition une fonction univoque de C, φ, α, γ, qui d'après l'analyse dimensionnelle est nécessairement de la forme :

$$h^+ = \frac{C}{\gamma} \kappa^+(\alpha, \varphi) \tag{2.2}$$

où κ^+ est un nombre, fonction de α et de φ.

Ceci montre qu'une pente est potentiellement stable si et seulement si le paramètre $K = \gamma h/C$ est inférieur à $\kappa^+(\alpha, \varphi)$.

2.3. Notion de « ligne de rupture ».

Nous adoptons dans toute la suite la convention de signes sur les contraintes, habituelle en mécanique des sols : la facette sur laquelle agit le vecteur contrainte est repérée par sa normale rentrante n ; σ et τ désignent les valeurs algébriques des contraintes normale et tangentielle (*fig.* 2); σ_i ($i = 1, 2, 3$) sont les contraintes principales, qui sont donc comptées positivement en compression.

Le critère de Coulomb s'écrit de façons équivalentes :

$$|\tau| \leqslant C + \sigma \operatorname{tg} \varphi, \qquad \forall \underline{n} \tag{2.3}$$

ou bien :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \max_{i,j=1,2,3} \{\sigma_i(1 - \sin\varphi) - \sigma_j(1 + \sin\varphi) - 2C\cos\varphi\} \leqslant 0. \tag{2.4}$$

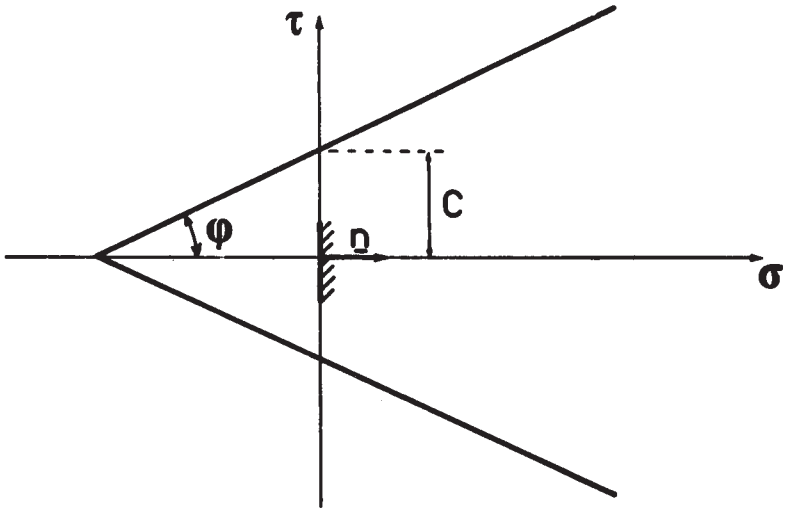


FIG. 2. — *Convention de signes sur les contraintes; critère de Coulomb.*

([1]) *La démonstration mathématique de ce résultat est aisée : si* $\underline{\underline{\sigma}}$ *est un champ de contraintes au moyen duquel on satisfait la condition nécessaire de stabilité pour la pente de hauteur h, le champ* $\underline{\underline{\sigma}}'$ *défini par « homothétie » :*

$$\underline{\underline{\sigma}}'(\underline{x}) = \frac{h'}{h} \underline{\underline{\sigma}}\left(\frac{h}{h'} \underline{x}\right)$$

où $\underline{x}$ *désigne le vecteur position* $\underline{OM}$ *d'un point* M *quelconque du massif, permet de satisfaire la condition nécessaire de stabilité pour la pente de hauteur* $h' < h$.

Considérons, tracée dans le massif, une ligne quelconque ([1]) coupant la surface libre $y'AOy$ en deux points B et C (*fig.* 3).

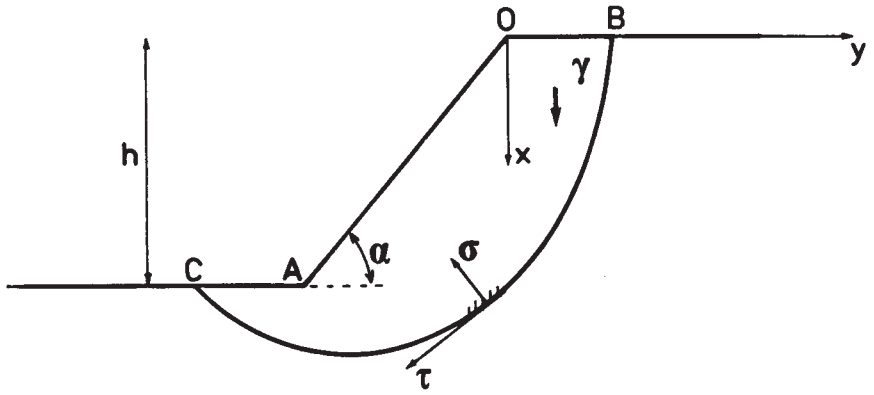


FIG. 3. — *Étude de la stabilité d'une pente; notion de ligne de rupture.*

Comme on l'a dit au § 2.2, pour qu'une pente soit stable il faut qu'il existe un état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfaisant les conditions (2.1).

Il est donc *a fortiori* nécessaire qu'un tel état de contrainte existe dans le volume de sol limité par le contour CAOBC.

Cela implique que :

Pour que la pente soit stable il est nécessaire qu'il existe une répartition de contraintes normales et tangentielles σ *et* τ *le long de* BC, *telle que* l'équilibre global *du volume de sol limité par le contour* CAOBC *soit réalisé, sous l'action :*

- *de forces extérieures nulles sur* CAOB (*surface libre*),
- *des forces de pesanteur* γ,
- *et des actions de contact* (σ, τ) *sur* BC *satisfaisant la condition* (2.5), *imposée par le critère de Coulomb, en chaque point de* BC :

$$|\tau| \leqslant C + \sigma \operatorname{tg} \varphi. \tag{2.5}$$

On voit ainsi que :

La condition nécessaire de stabilité exposée au § 2.2 représente ce que l'on peut obtenir de plus général à partir de la seule connaissance du critère de résistance du sol; elle a servi à la définition des hauteurs potentiellement stables; par un affaiblissement graduel de cette condition on a obtenu la condition nécessaire de stabilité portant sur l'existence d'une répartition $(\sigma, \tau)_{BC}$ satisfaisant certaines conditions, énoncée ci-dessus.

Cela signifie qu'une hauteur h pour laquelle cette dernière condition est satisfaite pour une courbe BC, n'est pas nécessairement potentiellement stable; par contre elle est certainement instable si la condition n'est pas satisfaite.

Ainsi en déterminant pour une courbe BC donnée, sur une pente géométriquement donnée (α, h), la valeur maximale du facteur $K = \gamma h/C$, pour laquelle la condition nécessaire, affaiblie, de stabilité est satisfaite, on obtient un majorant de la valeur extrême κ^+ pour cette pente. En particulier on sera amené, pour obtenir une meilleure majoration de κ^+, à rechercher la courbe BC la plus défavorable.

Bien que l'on aboutisse ici à un raisonnement apparenté aux raisonnements classiques et en particulier à la méthode dite « du prisme de Coulomb », rien ne permet de justifier, même pour la courbe BC la plus « défavorable », l'appellation de *courbe de rupture*. De plus, il reste à examiner par quelle méthode on peut, pour une courbe donnée, déterminer la valeur maximale de K satisfaisant la condition nécessaire affaiblie de stabilité. On verra dans la suite que ces questions ne sont pas indépendantes.

2.4. Détermination d'un majorant de κ^+, pour une courbe BC donnée, par les équations d'équilibre statique.

Reprenant le problème de la *figure* 3, on se propose de déterminer la valeur maximale de $K = \gamma h/C$, telle que :

([1]) *Sans point multiple.*

il existe une répartition $(\sigma, \tau)_{BC}$ satisfaisant (2.5) et réalisant l'équilibre statique global du volume CAOBC, c'est-à-dire :

$$\underline{R}(\underline{W}, (\sigma, \tau)_{BC}) = \underline{0}, \tag{2.6}$$

$$M(\underline{W}, (\sigma, \tau)_{BC}) = 0, \tag{2.7}$$

où $\underline{W}$ désigne le poids du volume CAOBC, $\underline{R}$ la résultante, et M le moment par rapport à un point quelconque choisi, des efforts indiqués dans la parenthèse.

L'étude de ce problème est en général malaisée. En effet, pour une courbe BC donnée, la forme de la répartition $(\sigma, \tau)_{BC}$ optimale satisfaisant (2.5, 2.6, 2.7) pour la valeur maximale de K n'est, *a priori*, pas connue ; par exemple rien ne prouve que cette distribution optimale doive satisfaire (2.5) sous forme d'égalité tout au long de BC.

C'est à ce niveau que se situe, pour ce type de raisonnement fondé sur les équations de l'équilibre statique, l'introduction d'hypothèses supplémentaires portant, soit directement sur la répartition $(\sigma, \tau)_{BC}$, soit sur $\underline{R}$ ou M, et qui permettent, de diverses façons, de poursuivre la résolution du problème et de conclure en déterminant une valeur maximale pour K soit K_M.

Mais il va de soi qu'il y a lieu d'examiner avec soin l'incidence de l'introduction de ces hypothèses sur la signification de K_M : s'agit-il encore d'un majorant de κ^+, ou bien au contraire la position de K_M par rapport à κ^+ n'est-elle plus déterminée ?

Il est clair que si l'hypothèse supplémentaire porte sur la forme de $(\sigma, \tau)_{BC}$, par exemple supposant *a priori* que $(\sigma, \tau)_{BC}$ vérifie (2.5) avec égalité des deux membres en tout point de BC, ceci a pour conséquence de restreindre la gamme des $(\sigma, \tau)_{BC}$ possibles. Par suite, K_M est inférieur ou égal au maximum possible sous la seule condition (2.5) qui est, lui, assurément un majorant de κ^+ : la position de K_M par rapport à κ^+ ne peut donc plus être affirmée.

Par contre, si l'hypothèse supplémentaire consiste à ne vérifier qu'incomplètement les équations d'équilibre (2.6) et (2.7), par exemple en ne prenant en compte que l'équation relative à la composante verticale de $\underline{R}$, ou celle annulant M par rapport à un point particulièrement choisi, K_M est un majorant de κ^+ car l'hypothèse faite affaiblit encore la condition nécessaire de stabilité.

Le plus souvent, les hypothèses supplémentaires relèvent des deux catégories ci-dessus, en sorte qu'il n'est pas possible de placer K_M par rapport à κ^+ : on ne dispose pas alors d'un raisonnement rigoureux permettant d'interpréter les résultats ainsi obtenus.

Il pourrait évidemment paraître prudent de se référer systématiquement à la plus petite des valeurs K_M obtenues par les diverses méthodes, comme s'il s'agissait toujours de majorants de κ^+, mais il est clair que cette pratique, utilisée sans discernement, conduirait à des conclusions dont le pessimisme interdirait toute édification d'ouvrages.

2.5. Cas de certaines formes de courbes BC.

Il est remarquable que le choix de certaines formes pour la courbe BC permet, par le raisonnement d'équilibre statique présenté ci-dessus, d'aboutir à des résultats concernant κ^+ sans avoir à faire d'hypothèses *a priori* sur la répartition $(\sigma, \tau)_{BC}$.

Considérons par exemple le cas d'un sol *purement cohérent* ($\varphi = 0$), et adoptons pour BC la forme *circulaire* (*fig.* 4).

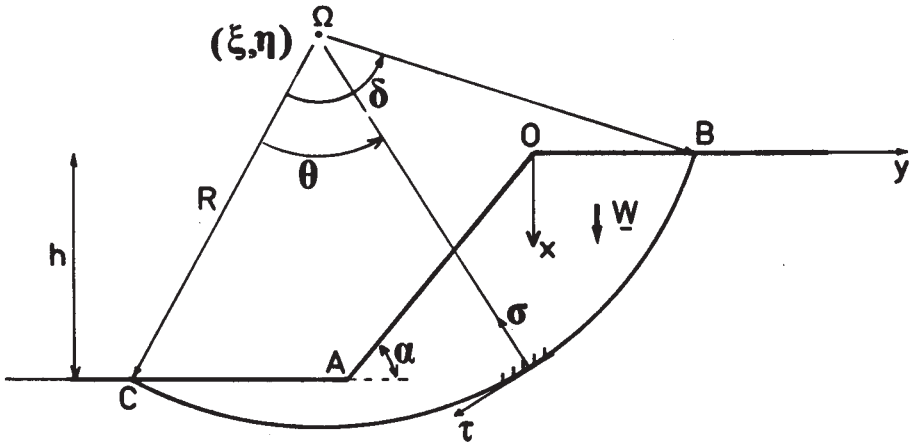


FIG. 4. — *Hauteur limite d'une pente pour un sol purement cohérent.*

Le problème mathématique de la détermination d'un majorant de κ^+ au moyen de la courbe BC s'écrit, avec les notations du § 2.4 :

$$\kappa^+ \leqslant K_M = \text{Max } K \tag{2.8}$$

sous :

$$\begin{cases} R(\underline{W}, (\sigma, \tau)_{BC}) = 0 & (2.6) \\ M(\underline{W}, (\sigma, \tau)_{BC}) = 0 & (2.7) \\ |\tau| \leqslant C \quad \text{sur} \quad BC. & (2.9) \end{cases}$$

On obtient *a fortiori* un majorant de κ^+ en n'imposant à $(\sigma, \tau)_{BC}$ que les conditions (2.9) et (2.7) par rapport à un point particulier : le bon choix est évidemment ici le point Ω, centre de l'arc de cercle BC, de rayon R et d'ouverture δ ; on désigne par (ξ, η) les coordonnées de ce point.

Avec la convention de signe indiquée sur la figure pour τ, les moments étant comptés positivement dans le sens direct, on écrira :

$$\text{sous} \begin{cases} \kappa^+ \leqslant \text{Max } K \\ |\tau(\theta)| \leqslant C, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \delta \\ M_\Omega(\underline{W}) = R^2 \displaystyle\int_0^\delta \tau(\theta)\, d\theta \end{cases} \tag{2.10}$$

$M_\Omega(\underline{W})$, moment de $\underline{W}$ par rapport à Ω, se met nécessairement (analyse dimensionnelle) sous la forme :

$$M_\Omega(\underline{W}) = \gamma R^3 w\left(\delta, \frac{\xi}{h}, \frac{\eta}{h}\right), \tag{2.11}$$

w étant un facteur sans dimension, de *signe quelconque* (suivant la position de Ω).

En introduisant le facteur sans dimension, positif :

$$\bar{R}\left(\delta, \frac{\xi}{h}, \frac{\eta}{h}\right) = R/h, \tag{2.12}$$

le problème devient :

$$\text{sous} \begin{cases} \kappa^+ \leqslant \text{Max } K \\ |\tau(\theta)| \leqslant C, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \delta \\ K \,.\, \bar{R} \,.\, w = \displaystyle\int_0^\delta \tau(\theta)\, d\theta. \end{cases} \tag{2.13}$$

A α, $\frac{\xi}{h}$, $\frac{\eta}{h}$ fixés, la solution de ce problème de maximisation correspond évidemment à :

$$\tau(\theta) = C \operatorname{sgn} w \quad (^1), \tag{2.14}$$

et conduit à :

$$\kappa^+ \leqslant \delta/\bar{R}|w| \tag{2.15}$$

Cela signifie que :

Pour un sol purement cohérent, en choisissant pour BC la forme circulaire, et en ne prenant en compte que la condition d'équilibre des moments par rapport à Ω, la répartition optimale $(\tau)_{BC}$ peut être déterminée ; elle correspond au cisaillement maximal appliqué tout au long de BC dans le sens qui résiste au moment du poids du volume CAOBC par rapport à Ω.

On aboutit alors à la majoration (2.15) qui reste à optimiser par rapport à δ, $\frac{\xi}{h}$, $\frac{\eta}{h}$, paramètres de l'arc BC.

On remarque que la démonstration du résultat ci-dessus concernant la répartition optimale $(\tau)_{BC}$, résultat qui pourrait pourtant paraître intuitif, s'appuie sur la forme circulaire de BC en liaison avec la forme de la condition (2.9) : *elle ne serait pas valable pour une ligne circulaire dans le cas d'un matériau à frottement non nul.*

---

(1) $\operatorname{sgn} w = w/|w|$ = *signe de w.*

Cette démonstration ne prend en compte qu'une des équations de l'équilibre statique (équation (2.7)) mais, la répartition $(\sigma)_{BC}$ à l'optimum pour chaque courbe BC n'étant pas déterminée par le raisonnement ci-dessus, il est donc possible de satisfaire alors l'équation d'équilibre (2.6). Ainsi, le résultat de l'optimisation (2.15) par rapport à δ, ξ/h et η/h, représente le meilleur majorant de κ^+ pour les courbes BC de forme circulaire. Les résultats de cette optimisation sont classiques (cf. Taylor, 1937, 1948).

2.6. La « méthode des tranches » vue sous l'angle du calcul à la rupture.

La démarche précédente peut être raffinée. Reprenant le volume CACBC de la *figure* 3, on le découpe en blocs verticaux adjacents — *en tranches* — comme indiqué sur la *figure* 5.

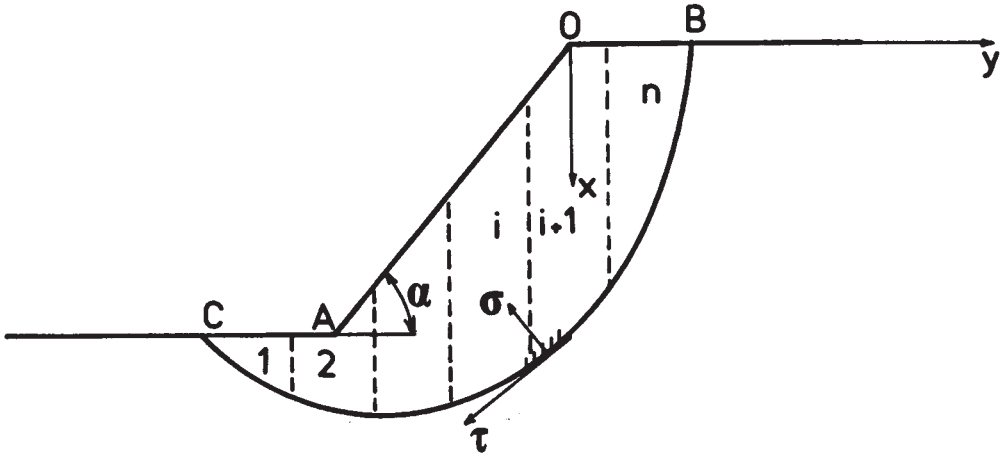


FIG. 5. — *Étude de la stabilité d'une pente; principe de la méthode des tranches.*

On peut à nouveau affirmer que, pour que la pente considérée soit stable, il est nécessaire qu'il existe un état de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfaisant les conditions (2.1).

Cela implique, en reprenant les raisonnements du § 2.3, qu'il doit exister :

une répartition $(\sigma, \tau)_{BC}$,

des répartitions $(\sigma, \tau)_i$, $(i = 1, \ldots, n - 1)$, aux frontières verticales entre les tranches,

vérifiant la condition (2.5) :

$$|\tau| \leqslant C + \sigma \operatorname{tg} \varphi,$$

et telles que l'équilibre global de chacune des tranches soit réalisé.

La plus grande valeur de K telle que ceci soit réalisé pour une courbe BC et un découpage en tranches verticales donnés, est un majorant de κ^+.

On rencontre alors la même difficulté que celle exposée au § 2.4, à savoir que la forme des distributions optimales $(\sigma, \tau)_{BC}$ et $(\sigma, \tau)_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$, n'est pas connue *a priori*.

Ici encore on introduit des hypothèses supplémentaires permettant de poursuivre le calcul et de déterminer une valeur maximale K_M. Celles-ci se classent comme précédemment en deux catégories :

1° des hypothèses qui affaiblissent la condition nécessaire de stabilité confirmant ainsi le caractère de majorant de K_M vis-à-vis de κ^+, par exemple en ne satisfaisant qu'une partie des équations d'équilibre;

2° des hypothèses portant sur la forme des répartitions $(\sigma, \tau)_{BC}$ ou $(\sigma, \tau)_i$, restreignant l'ensemble sur lequel on maximise K, et rendant ainsi impossible de situer K_M par rapport à κ^+ : voir (Raulin, Rouquès et Toubol, 1974).

Il s'ensuit qu'en règle générale K_M n'est pas nécessairement un majorant de κ^+, ce qui, comme on l'a dit au § 2.4, pose des problèmes quant à l'utilisation des résultats obtenus.

3. Étude de la stabilité d'une pente par dualisation.

3.1. Le principe des puissances virtuelles.

L'analyse de la stabilité du point de vue du Calcul à la rupture, telle que nous l'avons présentée au chapitre précédent, repose sur des considérations d'équilibre statique.

Ainsi, dans l'étude de la stabilité d'une pente, pour déterminer κ^+, il faut déterminer la valeur de K au-dessus de laquelle il n'existe plus de champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfaisant les conditions (2.1).

De même pour obtenir un majorant de κ^+ en considérant seulement l'équilibre global d'un bloc (§ 2.3) il faut déterminer la valeur de K au-dessus de laquelle cet équilibre n'est plus possible en respectant la condition (2.5).

Une telle recherche correspond mathématiquement à trouver la valeur de K au-dessus de laquelle, un certain convexe, inclus dans un espace de dimension infinie, est vide. Elle suppose donc que l'on sache explorer ce convexe de manière à pouvoir décider de sa vacuité. Exposée sous cette forme, la difficulté du problème est évidente et correspond bien aux constatations des § 2.4 et 2.6.

On va montrer qu'il est possible d'aboutir à une formulation du problème qui, quoique strictement équivalente, se révèle plus efficace du point de vue de la mise en œuvre, en procédant à la dualisation mathématique au moyen du principe des puissances virtuelles.

En effet, d'après le principe des puissances virtuelles, il est équivalent d'énoncer que :

pour une valeur donnée de K, *il existe un champ de contraintes* $\underline{\underline{\sigma}}$ *en équilibre avec les forces extérieures appliquées à l'ouvrage, et respectant en tout point le critère de Coulomb* (2.3),

ou que :

pour cette valeur donnée de K, *il existe un champ de contraintes* $\underline{\underline{\sigma}}$, *respectant en tout point le critère* (2.3) *et tel que sa puissance dans tout champ de vitesses cinématiquement admissible* $\underline{v}$ *est égale à la puissance des forces extérieures (en l'occurence il s'agit de la puissance des forces de pesanteur,* γ) :

$$\text{(3.1)} \qquad \left.\begin{array}{c}\text{Puissance de déformation}\\ \text{de } \underline{\underline{\sigma}} \text{ dans } \underline{v}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Puissance des}\\ \text{forces } \gamma \text{ dans } \underline{v}.\end{array}\right.$$

Ainsi, pour montrer que K_M est un majorant de κ^+, il *suffit* de montrer que pour cette valeur, dans *un* champ de vitesses cinématiquement admissible, les conditions (2.3) en tout point, et (3.1) sont incompatibles.

A ce stade il n'apparaît pas que cette approche dualisée puisse se révéler plus efficace que l'approche directe, puisque la démonstration de l'incompatibilité ci-dessus suppose l'exploration de tous les champs $\underline{\underline{\sigma}}$ respectant (2.3) en tout point ce qui correspond à un convexe plus grand que celui évoqué précédemment !

L'intérêt de la méthode réside dans la possibilité *de choix des champs de vitesses :*

En effet, on peut montrer que *pour tout champ* $\underline{\underline{\sigma}}$ *satisfaisant* (2.3) *en tout point, la puissance de déformation dans un champ* $\underline{v}$ *quelconque peut être majorée par une quantité* $P(\underline{v})$, *fonction univoque de* $\underline{v}$ ([1]).

La forme de $P(\underline{v})$ dépend des caractéristiques C et φ définissant la condition (2.3). De façon générale, $P(\underline{v})$ est non négative, est finie ou infinie suivant le choix du champ $\underline{v}$, et est positivement homogène de degré 1 en $\underline{v}$.

Il s'ensuit que :

si l'on choisit pour $\underline{v}$ un champ dans lequel $P(\underline{v})$ est finie, et si, pour une valeur K_M de K, la puissance des forces de pesanteur γ dans ce champ est supérieure à $P(\underline{v})$,
alors on est certain de l'incompatibilité de (2.3) en tout point et (3.1), et donc on peut affirmer que :

$$K_M \geqslant \kappa^+.$$

On a ainsi une méthode qui ne fait plus intervenir de champs de contraintes, et qui pour chaque champ de vitesses cinématiquement admissible $\underline{v}$ définit, en égalant la puissance dissipable à la puissance des forces extérieures, une valeur K_M majorant κ^+.

Cette méthode, sous sa forme générale, porte le nom d'approche par l'extérieur.

Les champs $\underline{v}$ doivent être tels que la majoration $K_M \geqslant \kappa^+$ ne soit pas triviale, c'est-à-dire que la puissance dissipable doit y être *finie* et la puissance des forces extérieures *positive*.

Il importe de bien remarquer que l'introduction des champs de vitesses correspond à une simple opération de dualisation par le principe des puissances virtuelles ; les conditions sur le champ $\underline{v}$ pour que la puissance dissipable soit finie, telles que celles que nous mettrons en évidence dans la suite, procèdent uniquement de la connaissance de la condition (2.3) imposée aux *contraintes* $\underline{\underline{\sigma}}$, et en aucune manière d'une hypothèse sur le mode de déformation du sol.

([1]) $P(\underline{v})$ *est la puissance dissipable dans* $\underline{v}$ (*Coussy*, 1977).

Nous ne nous étendrons pas sur l'étude de l'approche par l'extérieur pour ce problème dans sa généralité. Dans la suite nous analyserons, par cette méthode, la stabilité d'une pente en matériau cohérent puis frottant, en utilisant des champs de vitesses correspondant à des mouvements par blocs.

On trouvera dans Coussy (1978) la présentation des formules relatives à ce type de champs à partir des résultats de la théorie générale de l'approche par l'extérieur. Nous préférons ici reprendre directement le raisonnement, esquissé de façon générale ci-dessus, à partir de l'équilibre d'un bloc.

3.2. Étude de la stabilité d'une pente en sol purement cohérent au moyen de mécanismes par blocs.

On reprend le problème de la *figure* 3 tel qu'il était posé dans l'approche par les équations d'équilibre pour une courbe BC de forme quelconque (§ 2.3 et 2.4), dans le cas d'un sol purement cohérent.

Une condition nécessaire de stabilité pour une valeur donnée de $K = \gamma h/C$ est qu'il existe une répartition de contraintes $(\sigma, \tau)_{BC}$ telle que les équations :

(2.6) $$\underline{R}(\underline{W}, (\sigma, \tau)_{BC}) = 0$$

(2.7) $$M(\underline{W}, (\sigma, \tau)_{BC}) = 0$$

(2.9) $$|\tau| \leqslant C \quad \text{sur} \quad BC$$

soient satisfaites.

Les équations (2.6) et (2.7) traduisent l'équilibre du volume CAOBC. Ceci équivaut d'après le principe des puissances virtuelles, à écrire que dans tout mouvement rigidifiant de ce volume, la puissance des forces $\underline{W}$ et $(\sigma, \tau)_{BC}$ est nulle.

Soit $\Omega(\xi, \eta)$ le centre instantané de rotation du bloc dans un mouvement rigidifiant quelconque, et ω la vitesse de rotation. On écrira :

$$(2.6, 2.7) \Leftrightarrow (3.2) \qquad \text{avec :}$$

(3.2) $$P[\underline{W}, (\sigma, \tau)_{BC}; \ \xi, \eta, \omega] = 0 \qquad \forall \xi, \eta, \omega.$$

En explicitant la puissance des forces de pesanteur d'une part, et celle de $(\sigma, \tau)_{BC}$ de l'autre, cette équation devient :

(3.3) $$P[\underline{W}; \xi, \eta, \omega] = -\int_{CAOBC} \gamma \times v_n \, ds = -\int_{CB} (\sigma v_n + \tau v_t) \, ds$$

où v_n et v_t désignent les composantes normale et tangentielle de la vitesse $\underline{v}$, fonction de ξ, η, ω.

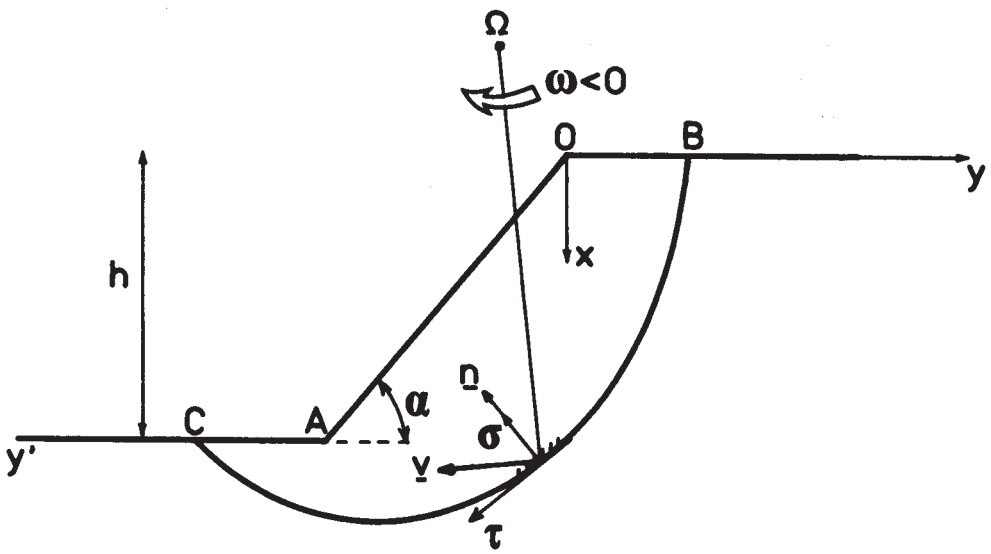


FIG. 6. — *Étude de la stabilité d'une pente au moyen de mécanismes par blocs; sol cohérent.*

La condition nécessaire de stabilité est donc :

Il faut qu'il existe une distribution $(\sigma, \tau)_{BC}$ *satisfaisant* (3.3) $\forall \xi, \eta, \omega$ *sous* (2.9).

Introduisons alors la fonction $\pi(\underline{v})$ définie par :

(3.4) $$\begin{cases} \pi(\underline{v}) = +\infty & \text{si} \quad v_n \neq 0 \\ \pi(\underline{v}) = C|v_t| & \text{si} \quad v_n = 0 \end{cases}$$

on voit que l'intégrale :

$$P(\underline{v}) = \int_{CB} \pi(\underline{v})\, ds$$

représente la meilleure majoration du troisième membre de (3.3) sous la seule condition (2.9). Cette intégrale est une fonction de ξ, η, ω, qui est finie si $v_n \equiv 0$ sur BC.

Il en résulte une condition nécessaire de stabilité pour la pente :

Il faut que :

(3.5) $$P[\underline{W}\,;\xi, \eta, \omega] \leqslant P(\underline{v}) \qquad \forall \xi, \eta, \omega.$$

Autrement dit :

Pour que la pente soit stable il faut que dans tout mouvement rigidifiant d'un volume CAOBC, *la ligne* BC *étant ligne de discontinuité de vitesse entre le bloc* CAOBC *et le reste du massif, immobile, la puissance des forces extérieures au système (les forces de pesanteur) soit inférieure à la quantité* $P(\underline{v})$ *ci-dessus, intégrale de* $\pi(\underline{v})$ *le long de la ligne de discontinuité* BC.

En égalant ces deux quantités dans un tel mouvement on obtient un majorant de κ^+.

On a ainsi un énoncé purement cinématique concernant les modes de déformation du système par mécanismes par blocs.

Il est clair que :

Lorsque la courbe BC n'est pas un arc de cercle centré en Ω, cette condition est inefficace et conduit à un majorant infini pour κ^+, puisque $P(\underline{v})$ est alors infini $\forall \xi, \eta, \omega\ (\neq 0)$.

Par contre, si la courbe BC est *circulaire* et centrée en Ω, autrement dit si la ligne de discontinuité BC est une ligne le long de laquelle le bloc CAOBC glisse sur le reste du massif, $P(\underline{v})$ prend une valeur finie et l'on obtient ainsi une majoration non triviale de κ^+.

On voit sans difficulté ([1]) en reprenant les notations du § 2.5 que cette majoration de κ^+ n'est autre que $\delta/\bar{R}|w|$.

Ainsi, dans le cas du sol purement cohérent, on a mis en évidence qu'il est possible en considérant des mécanismes par blocs pour la déformation du massif de sol, d'obtenir directement une majoration de κ^+. Les mécanismes qui conduisent à une majoration non triviale sont ceux dans lesquels un bloc de sol *glisse* le long d'une *ligne circulaire* (ou *rectiligne* — cas particulier de cercle) sur le reste du massif immobile.

Il est important de constater que cette condition de *glissement* est fondamentalement issue de la forme du critère adoptée pour le sol ($\varphi = 0$), et que d'autre part la fonction $\pi(\underline{v})$ à partir de laquelle est calculée $P(\underline{v})$ ne fait aucunement appel à une quelconque hypothèse sur la déformation du sol lorsque le critère est atteint.

3.3. Étude de la stabilité d'une pente pour un sol cohérent et frottant au moyen de mécanismes par blocs.

Le problème se pose comme au § précédent et à la *figure* 6. La condition nécessaire de stabilité s'énonce au moyen des équations (2.6) et (2.7) et en remplaçant (2.9) par (2.5) :

(2.5) $$|\tau| \leqslant C + \sigma \operatorname{tg} \varphi \qquad \text{sur} \qquad BC.$$

Reprenant le même raisonnement qu'au § 3.2, on a la condition nécessaire de stabilité :

Il faut qu'il existe $(\sigma, \tau)_{BC}$ satisfaisant :

(3.3) $$P[\underline{W}\,;\xi, \eta, \omega] = -\int_{CAOBC} \gamma \times v_n\, ds = -\int_{CB} (\sigma v_n + \tau v_t)\, ds, \qquad \forall \xi, \eta, \omega$$

sous (2.5).

([1]) *On a :*

$$P(\underline{v}) = \omega C R^2 \delta \qquad et \qquad P(\underline{W}\,;\xi, \eta, \omega] = \omega \gamma R^3 w\left(\delta, \frac{\xi}{h}, \frac{\eta}{h}\right)$$

d'où la condition $\omega K \bar{R} w \leqslant \omega\delta \quad \forall\omega$, *en posant* $\bar{R} = R/h$ *dont on déduit :* $\kappa^+ \leqslant \delta/\bar{R}|w|$.

On introduit la fonction $\pi(\underline{v})$ définie par

$$(3.6)\qquad \begin{cases} \pi(\underline{v}) = +\infty & \text{si} \quad v_n < |v_t| \operatorname{tg} \varphi \\ \pi(\underline{v}) = C \operatorname{cotg} \varphi \, v_n & \text{si} \quad v_n \geqslant |v_t| \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

(Rappelons que $\underline{n}$ est la normale rentrante à la facette au point où la vitesse de celle-ci est $\underline{v}$.)

On voit alors que l'intégrale :

$$P(\underline{v}) = \int_{CB} \pi(\underline{v}) \, ds$$

représente la meilleure majoration du second membre de (3.3) sous la seule condition (2.5) (*fig.* 7).

Cette intégrale, fonction de ξ, η, ω est finie si :

$$v_n \geqslant |v_t| \operatorname{tg} \varphi \qquad \text{sur} \qquad BC.$$

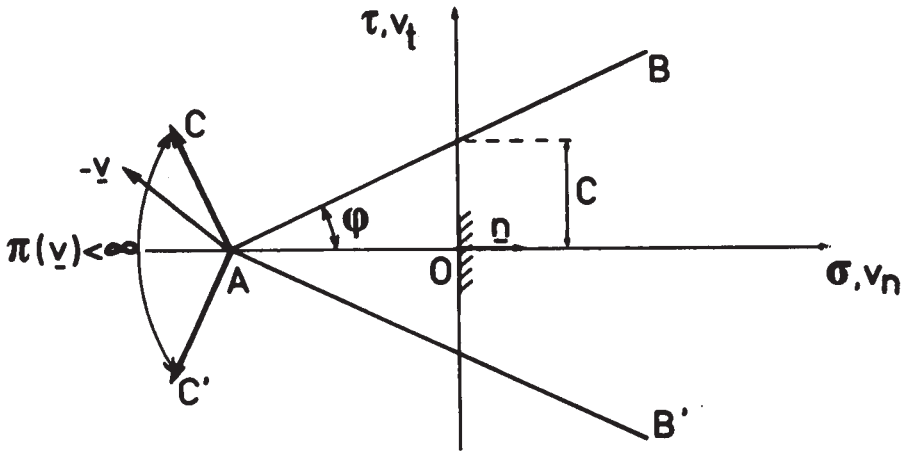


FIG. 7. — *Sol cohérent et frottant : courbe intrinsèque et fonction* $\pi(\underline{v})$. (*Le maximum de* $(-\sigma v_n - \tau v_t)$ *pour* $\underline{v}$ *tel que* $\pi(\underline{v}) < +\infty$, *sous la condition* (2.5), *est représenté par le produit scalaire* $\underline{OA} \,.\, (-\underline{v}) = C \operatorname{cotg} \varphi \, v_n$.)

On aboutit ainsi à la condition nécessaire de stabilité (3.5), et à l'énoncé « cinématique » correspondant donné au § 3.2.

Il convient d'examiner quelles sont les courbes BC qui conduisent à des majorations non triviales pour κ^+. Il est clair d'après (3.6) que, pour que $\pi(\underline{v})$ soit finie en un point M de BC il faut qu'en ce point la normale $\underline{n}$ fasse avec le rayon vecteur ΩM un angle β : $\varphi \leqslant \beta \leqslant \pi - \varphi$; ainsi, pour un centre de rotation Ω donné, on est amené à considérer les courbes BC satisfaisant cette propriété en tout point. Cela implique que le vecteur vitesse $\underline{v}$, incliné à β sur la ligne, correspond à un *décollement* du bloc par rapport au reste du massif : la ligne de discontinuité de vitesse n'est pas une ligne de glissement ; *elle n'est jamais circulaire de centre* Ω.

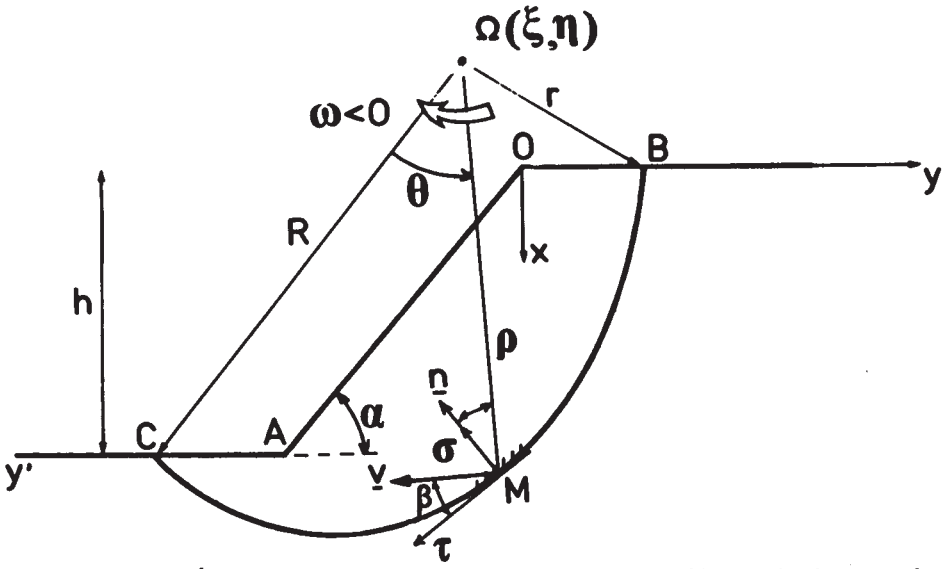


FIG. 8. — *Étude de la stabilité d'une pente ; mécanisme par blocs ; sol cohérent et frottant.*

On peut ainsi en particulier utiliser pour BC une courbe telle que $\underline{v}$ fasse en tout point un angle $\beta = \varphi$ avec la ligne de discontinuité : BC sera alors un arc *de spirale logarithmique* à φ, de foyer Ω (Rendulic, 1935 ; Drucker et Prager, 1952).

D'une façon générale, pour les courbes satisfaisant la condition indiquée sur β on a, avec les notations de la *figure* 8 (θ, ρ : coordonnées polaires de centre Ω) :

$$\sin \beta \, ds = - d\rho$$

et, ω devant être négatif pour que $P(\underline{v})$ soit fini :

$$P(\underline{v}) = - C\omega \operatorname{cotg} \varphi \, (R^2 - r^2)/2. \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\underline{W} ; \xi, \eta, \omega) &= - \int_{CAOBC} \gamma \times v_n \, ds \\ &= - \gamma\omega h \left[\eta \frac{y_A}{2} - \eta y_C - \frac{y_A^2}{6} + \frac{h^2}{3} - \xi \frac{h}{2} - \frac{R^2}{2} + \int_B^C \frac{\rho^2}{2} \frac{dx}{h} \right]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

En écrivant la condition nécessaire de stabilité :

$$\mathcal{P}(\underline{W} ; \xi, \eta, \omega) \leqslant P(\underline{v}), \tag{3.5}$$

dans le cas présent où ω est négatif, on obtient pour κ^+ la majoration suivante :

$$\kappa^+ \leqslant \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{2} (R^2 - r^2)[\quad]^{-1} \tag{3.9}$$

(où [ ] a l'expression donnée dans (3.8)).

Cette majoration s'écrit aussi :

$$\kappa^+ \leqslant \frac{\gamma h}{C} P(\underline{v})/\mathcal{P}(\underline{W} ; \xi, \eta, \omega). \tag{3.10}$$

Elle dépend de $\Omega(\xi, \eta)$ et de la courbe BC que l'on peut définir par le paramètre R et la fonction $\beta(\theta)$.

On voit alors sur (3.9) que, pour Ω et R fixés (donc C fixé), la *spirale logarithmique* à φ de foyer Ω évoquée ci-dessus fournit la majoration minimale pour κ^+ : r est en effet maximum ainsi que l'intégrale figurant au dénominateur.

Ceci justifie de ne considérer que les mécanismes dans lesquels la surface de discontinuité de vitesse est une spirale logarithmique. Il reste ensuite à minimiser par rapport à $\Omega(\xi, \eta)$ et R pour obtenir la meilleure majoration de κ^+ fournie par les mécanismes par blocs.

Remarque.

Cette démonstration a été donnée par Salençon (1978), Elle peut être adaptée sans difficulté pour s'appliquer au cas où la pente est constituée d'un sol non homogène dont les caractéristiques C et φ varient en fonction de x de façon continue ou discontinue (couche de sol) ; il suffit en effet de reprendre l'expression de $P(\underline{v})$ sous forme d'intégrale :

$$P(\underline{v}) = (-\omega) \left[- \int_{CB} C(x) \operatorname{cotg} \varphi(x) \rho \, d\theta \right],$$

on voit que, les points C et Ω étant fixés, la courbe optimale doit minimiser le crochet du second membre sous la condition imposée à β, ce qui conduit à maximiser ρ en fonction de l'angle polaire θ.

En conséquence :

Pour un sol dont φ est constant par couches, la courbe optimale, pour C et φ fixés, est composée d'arcs de spirales logarithmiques de même foyer Ω et définis par les angles φ correspondant à chaque couche ;

Pour un sol dont φ varie de façon continue en fonction de x, la courbe optimale pour C et φ fixés, est définie de façon analogue à une spirale logarithmique, avec pour foyer Ω et l'angle β égal à l'angle φ à la profondeur considérée ;

Pour un sol constitué de couches distinctes à l'intérieur desquelles φ varie de façon continue en fonction de x, la courbe optimale à C et φ fixés est composée d'arcs de courbes telles que ci-dessus.

La question de la forme optimale de la courbe CB a été examinée par Chen et Snithban (1975), Chen (1975). Tout dernièrement Baker et Gaber (1978) ont présenté des résultats qui rejoignent ceux que nous venons

d'énoncer ; il est à remarquer que ces auteurs se sont placés du point de vue du § 2.3, dans l'approche du Calcul à la rupture telle que nous l'avons présentée et ont cherché à déterminer la « ligne de rupture » la plus défavorable en s'appuyant sur les équations d'équilibre statique et le critère de résistance, dans l'esprit du § 2.4 ; ceci les a conduit à résoudre un délicat problème de calcul des variations.

Comme on a pu le voir, la dualisation du problème au moyen du principe des puissances virtuelles permet de mettre en œuvre un raisonnement mathématique simple. Du point de vue du § 2.3, les résultats obtenus dans les § 3.2 et 3.3 ci-dessus définissent la forme de la courbe BC la plus défavorable : ainsi en particulier, pour le sol purement cohérent, la forme circulaire adoptée pour la courbe BC au § 2.5, qui permet d'aboutir à des résultats sur κ^+ sans hypothèse *a priori, est la forme la plus défavorable.* Ce type de résultat est général, pour un sol frottant et cohérent, de caractéristiques C et φ variables avec x : la forme de la courbe la plus défavorable est aussi celle qui permet de mener à bien l'analyse de l'équilibre du bloc sans hypothèse complémentaire.

3.4. Définition du « coefficient de rupture » d'une pente.

Il est commode, pour analyser la stabilité de la pente définie à la *figure* 1, pour le sol purement cohérent comme pour le sol cohérent et frottant, d'introduire le coefficient scalaire $F(\gamma, h, \alpha, C, \varphi)$ défini par :

$$F = \kappa^+(\alpha, \varphi)/K, \tag{3.11 a}$$

c'est-à-dire :

$$F\left(\frac{\gamma h}{C}, \alpha, \varphi\right) = \frac{C}{\gamma h}\,\kappa^+(\alpha, \varphi). \tag{3.11 b}$$

D'après l'analyse faite au chapitre 2 (§ 2.2), ce coefficient possède les propriétés suivantes :

(3.12) $F\left(\frac{\gamma h}{C}, \alpha, \varphi\right) < 1 \Rightarrow$ l'équilibre de la pente, en géométrie initiale, en respectant le critère (C, φ) est *impossible* : pente instable ;

(3.13) $F\left(\frac{\gamma h}{C}, \alpha, \varphi\right) > 1 \Rightarrow$ pente potentiellement stable.

Coussy (1977) a proposé la dénomination de « coefficient de rupture » pour F : on voit d'après (3.12) et (3.13) que F fournit soit une certitude d'instabilité soit une présomption de stabilité ; (rappelons, comme on l'a dit au chapitre 1, qu'aucun coefficient dit de sécurité, calculé sans connaissance complémentaire sur le comportement du sol, ne peut conduire à des conclusions plus précises que celles-ci).

Il est alors évident sur la définition (3.11) que tout mécanisme par blocs fournit directement une majoration pour $F\left(\frac{\gamma h}{C}, \alpha, \varphi\right)$; en effet, on déduit de (3.10) que :

$$F\left(\frac{\gamma h}{C}, \alpha, \varphi\right) \leqslant P(\underline{v})/\mathcal{P}(\underline{W}\,;\,\xi, \eta). \tag{3.14}$$

Le majorant de F ainsi obtenu, fonction de ξ, η, R et de la courbe BC, possède *a fortiori* la propriété (3.12). Autrement dit il suffit, pour affirmer l'instabilité de la pente, que dans un mécanisme par blocs le rapport $P(\underline{v})/\mathcal{P}(\underline{W})$ soit inférieur à 1.

3.5. Interprétation du « coefficient de rupture ».

La définition du coefficient de rupture (3.11 *b*) montre que celui-ci peut s'interpréter comme :

1° un coefficient sur la cohésion : si une pente de caractéristiques γ, h, α, C, φ est potentiellement stable avec un coefficient de rupture égal à F (> 1), alors toute pente de caractéristiques γ, h, α, φ identiques et de cohésion $C' < C/F$ est certainement instable.

2° un coefficient sur la hauteur : si une pente de caractéristiques γ, h, α, C, φ est potentiellement stable avec un coefficient de rupture égal à F (> 1), alors toute pente de caractéristiques γ, α, C, φ identiques et de hauteur $h' > Fh$ est certainement instable.

3° un coefficient « sur la pesanteur » : si une pente de caractéristiques γ, h, α, C, φ est potentiellement stable avec un coefficient de rupture égal à F (> 1), alors toute pente de caractéristiques h, α, C, φ identiques placée dans un champ de forces de masse $\gamma' > F\gamma$ (centrifugeuse) est certainement instable.

Ce type de coefficient, dont on a vu qu'il s'introduit très naturellement du point de vue mécanique, ne coïncide pas, pour le sol cohérent et frottant, avec certains usages actuels des mécaniciens des sols. Ces derniers préfèrent en effet souvent utiliser un coefficient sur la résistance totale qui porte donc, non plus seulement sur la cohésion, mais sur la résistance au cisaillement maximale mobilisable à σ donné, à savoir : $|\tau| = C + \sigma \operatorname{tg} \varphi$. Cela signifie que le coefficient porte en fait sur C et sur φ, ou plus exactement sur tg φ.

La détermination d'un « coefficient de rupture » de ce type que nous désignerons par $\mathcal{F}\left(\frac{\gamma h}{C}, \alpha, \varphi\right)$ sera donc un peu plus difficile que celle de $F\left(\frac{\gamma h}{C}, \alpha, \varphi\right)$, car elle nécessite la résolution de l'équation implicite en $\mathcal{F}$:

$$\frac{\gamma h}{C}\mathcal{F} = \kappa^{+}[\alpha, \operatorname{Arc\,tg}(\operatorname{tg}\varphi/\mathcal{F})], \tag{3.14}$$

dont la signification mécanique est la suivante :

étant donnée la pente de caractéristiques γ, h, α, C et φ déterminer $\mathcal{F}$ tel que la pente de caractéristiques γ, h, α, $C' = C/\mathcal{F}$ et φ' tel que $\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi/\mathcal{F}$, vérifie :

$$\frac{\gamma h}{C'} = K' = \kappa^{+}(\alpha, \varphi') \qquad \text{ou encore} \qquad F\left(\frac{\gamma h}{C'}, \alpha, \varphi'\right) = 1.$$

Il est clair que ce type de coefficient possède comme F les propriétés (3.12) et (3.13) et que pour une pente donnée, $\mathcal{F}$ et F se placent de la même façon par rapport à la valeur 1 :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\gamma h}{C}, \alpha, \varphi\right) \gtrless 1 \Leftrightarrow F\left(\frac{\gamma h}{C}, \alpha, \varphi\right) \gtrless 1.$$

L'utilisation de mécanismes par blocs permet, par itération, de déterminer un majorant de $\mathcal{F}\left(\frac{\gamma h}{C}, \alpha, \varphi\right)$: en effet, une valeur $\mathcal{F}^*$ telle que dans un mécanisme par blocs on ait :

$$P^*(\underline{v})/\mathcal{P}(\underline{W}) = 1,$$

où $P^*(\underline{v})$ représente la puissance dissipable calculée pour la cohésion $C^* = C/\mathcal{F}^*$ et pour $\operatorname{tg}\varphi^* = \operatorname{tg}\varphi/\mathcal{F}^*$ est un majorant de $\mathcal{F}\left(\frac{\gamma h}{C}, \alpha, \varphi\right)$.

En optimisant par rapport aux mécanismes on obtient le meilleur majorant de $\mathcal{F}\left(\frac{\gamma h}{C}, \alpha, \varphi\right)$ fourni par les mécanismes par blocs.

3.6. Remarques finales.

Le mode de raisonnement par dualisation utilisé dans ce chapitre a conduit à l'introduction d'un « coefficient de rupture », facilement approchable par des méthodes cinématiques, qui s'apparentent à des considérations énergétiques, en utilisant en particulier des mécanismes de déformation par blocs (la formule (3.12) donnant la majoration du coefficient F se généralise en effet à tout type de mécanisme de déformation de l'ouvrage).

Il est important de remarquer que le rapport figurant à la formule (3.12) est différent, quoique le rapprochement soit tentant, du rapport d'une puissance dissipée à une puissance de force motrice : $P(\underline{v})$ représente le maximum de la puissance mobilisable le long de la ligne de discontinuité de vitesse choisie, quantité finie ou infinie, et c'est précisément le fait que l'on veuille que $P(\underline{v})$ soit finie qui fixe la forme de la ligne de discontinuité de vitesse.

On s'explique alors les difficultés de certaines méthodes « énergétiques » d'analyse de la stabilité qui, choisissant *a priori* une forme de courbe pour laquelle $P(\underline{v})$ serait infinie (courbes circulaires avec $\varphi \neq 0$) tentent par des hypothèses complémentaires de borner la valeur de $P(\underline{v})$, ce qui évidemment ne permet plus de donner une interprétation claire et rigoureuse au coefficient ainsi obtenu.

Enfin, bien que dans l'utilisation des mécanismes par blocs on procède à l'optimisation par rapport à la forme de la ligne BC, il serait abusif d'employer, pour désigner la ligne minimisante, le terme « ligne de rupture ». En effet, rien ne prouve que les mécanismes par blocs sont effectivement les plus défavorables et que c'est pour l'un d'eux qu'est atteinte la valeur minimale $F\left(\frac{\gamma h}{C}, \alpha, \varphi\right)$, et d'autre part, même si cela était, rien ne prouve, sans

information complémentaire sur le comportement du sol qu'il y aura réellement rupture le long de cette ligne pour la pente à $F < 1$. On préfèrera donc parler de « ligne faible ».

Pour ce problème de l'analyse de la stabilité d'une pente en sol homogène, la comparaison de diverses méthodes a été faite par Taylor (1937, 1948), par Chen (1975), et par Huang et Avery (1976) pour le coefficient sur la résistance totale. Les différences entre les résultats obtenus sont trop faibles pour être significatives pratiquement. De ce point de vue on peut donc dire que l'analyse présentée au chapitre 2 et dans le présent chapitre offre essentiellement un intérêt didactique. Par contre, on verra dans la suite que pour d'autres ouvrages les différences entre les résultats obtenus peuvent être importantes, et la possibilité d'interpréter rigoureusement les résultats issus directement du calcul à la rupture se révèlera fort utile.

4. Étude de la stabilité d'un remblai en sol cohérent et frottant reposant sur un sol purement cohérent.

4.1. Définition du coefficient de rupture.

On se propose dans cette partie d'analyser la stabilité de l'ouvrage représenté à la *figure* 9.

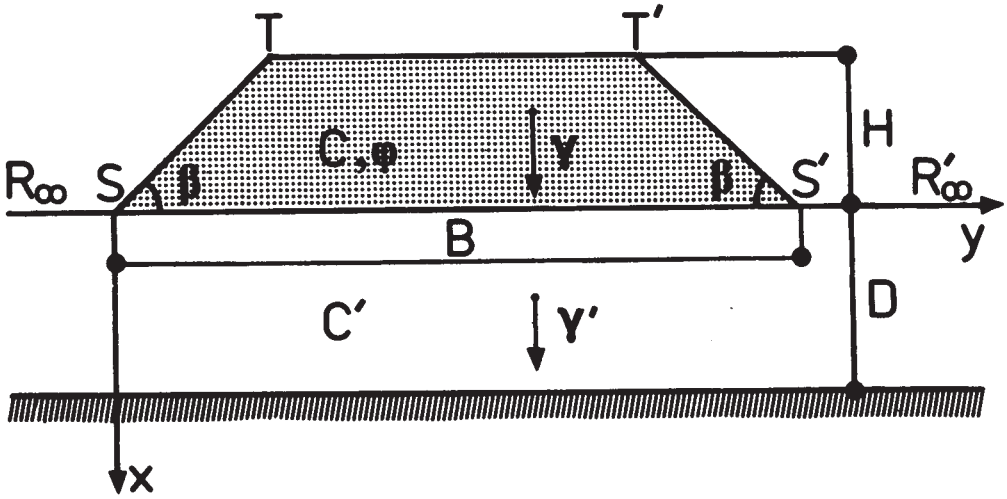


FIG. 9. — *Étude de la stabilité d'un remblai.*

C'est un remblai dont le matériau constitutif, supposé homogène, est régi par le critère de Coulomb (C, φ) et a un poids volumique γ. Il repose sur un sol purement cohérent (cohésion C'), supposé lui aussi homogène et de poids volumique γ'. Le tout est assis sur un substratum indéformable situé à une profondeur D, les autres paramètres géométriques étant indiqués sur la *figure* (1).

Sur la seule connaissance de ces données (2), l'analyse de la stabilité de l'ouvrage se pose comme au § 2.1. Par le même raisonnement que dans le cas de la pente (§ 2.2) on définira la notion d'ouvrage (le remblai) potentiellement stable ; ouvrage pour lequel la condition nécessaire de stabilité suivante est satisfaite :

il existe au moins un état de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ *respectant, dans tout l'ouvrage, les conditions locales d'équilibre et les conditions aux limites, sans violer en aucun point les critères indiqués pour les sols.*

De la même manière qu'au § 3.4, dans le cas d'une pente, on peut se proposer de caractériser cette propriété au moyen d'un coefficient scalaire F, « coefficient de rupture », satisfaisant les conditions homologues de (3.12) et (3.13).

La définition d'un tel coefficient est ici moins immédiate ; en effet, l'ouvrage étudié dépend de l'ensemble de paramètres : γ, γ', B, H, D, β, C, C', φ. Ceux-ci peuvent être séparés en trois groupes :

γ, γ' *définissant le chargement de l'ouvrage* (γ, γ' > 0),
B, H, D, β, *pour la géométrie,*
C, C', φ, *caractérisant la résistance des sols constitutifs.*

---

(1) *Les indices primes* (C', γ') *utilisés ici n'ont pour but que de distinguer les paramètres de la couche de ceux correspondant au remblai ; ils n'ont pas la signification particulière qui leur est attachée en mécanique des sols.*

(2) *Nous n'avons pas parlé des critères d'interfaces (remblai-sol d'assise, sol d'assise-substratum), mais on pourra à ce sujet consulter Coussy* (1978) *où leur influence quant à la stabilité générale de l'ouvrage a été examinée.*

Le problème se place dans le cadre de la théorie du calcul à la rupture pour un système mécanique soumis à un processus de chargement à n paramètres (ici $n = 2$). Celle-ci permet de démontrer que : les paramètres de géométrie et de résistance étant fixés, l'ensemble des remblais potentiellement stables est représenté dans le plan des paramètres de chargement (γ, γ') par un domaine convexe contenant l'origine (*fig.* 10).

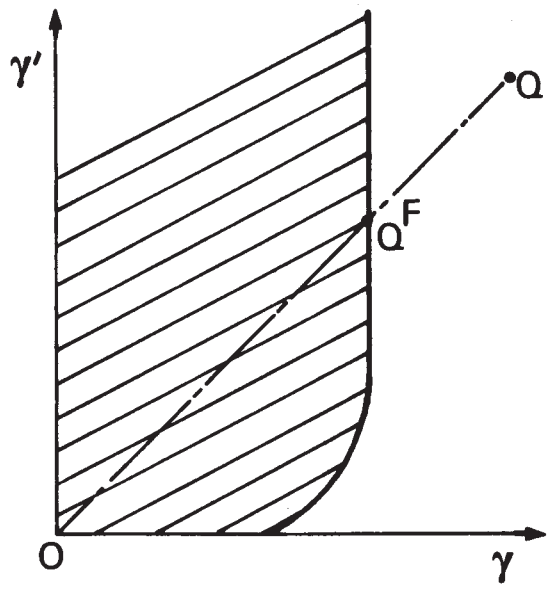


Fig. 10. — *Remblais potentiellement stables à géométrie et résistance fixées* (*Coussy*, 1978).

Cela étant, on définira le coefficient de rupture pour un remblai représenté par un point Q dans le plan (γ, γ') de la *figure* 10, par le rapport :

$$F = OQ^F/OQ, \tag{4.1}$$

où Q^F désigne l'intersection du rayon vecteur OQ avec la frontière du domaine convexe des remblais potentiellement stables.

Il est clair que le coefficient F ainsi défini possède pour le remblai les propriétés homologues de (3.12) et (3.13) :

$$\begin{cases} F < 1 \Rightarrow \textit{remblai instable}, \\ F > 1 \Rightarrow \textit{remblai potentiellement stable}. \end{cases} \tag{4.2}$$

L'analyse dimensionnelle de ce coefficient, scalaire dépendant de tous les paramètres définissant l'ouvrage, montre qu'il peut nécessairement se mettre sous la forme :

$$F = F\left(\frac{C'}{\gamma H}, \frac{C}{C'}, \frac{\gamma'}{\gamma}, \frac{B}{H}, \frac{D}{H}, \beta, \varphi\right).$$

De plus, il est évident, par la définition (4.1), qu'une homothétie d'origine 0 effectuée sur Q conduit à diviser F par le rapport d'homothétie ; il en résulte que F se met nécessairement sous la forme :

$$F = \frac{C'}{\gamma H} \kappa^+\left(\frac{C}{C'}, \frac{\gamma'}{\gamma}, \frac{B}{H}, \frac{D}{H}, \beta, \varphi\right), \tag{4.3}$$

où κ^+ est une fonction scalaire.

Nous ne nous étendrons pas ici sur les interprétations que l'on peut donner à ce coefficient, analogues à celles dégagées pour le cas de la pente, à savoir : coefficient sur les cohésions ou sur les dimensions ou sur la pesanteur, ni sur la possibilité de définir un coefficient de rupture F, portant sur la résistance totale, qui serait solution de l'équation :

$$F = \frac{C'}{\gamma H} \kappa^+\left(\frac{C}{C'}, \frac{\gamma'}{\gamma}, \frac{B}{H}, \frac{D}{H}, \beta, \text{Arc tg}(\text{tg}\, \varphi/F)\right).$$

4.2. Dualisation. Approche par excès du coefficient de rupture.

La démonstration générale de la convexité de l'ensemble des remblais potentiellement stables représenté dans le plan (γ, γ') s'appuie uniquement sur la condition nécessaire de stabilité abordée sous l'angle des équations d'équilibre (comme au chapitre 2 pour la pente, la définition de h^+ et de $\kappa^+(\alpha, \varphi)$).

On a vu au chapitre 3 que la dualisation au moyen du principe des puissances virtuelles permet d'aboutir pour $\kappa^{+}(\alpha, \varphi)$ à une méthode d'approche par excès au moyen de champs de vitesses. De la même manière on montre, d'une façon générale, que l'utilisation de champs de vitesses permet d'aboutir à une *approche par l'extérieur* du domaine convexe de la *figure* 10. La logique du raisonnement reprend celle du § 3.1 :

la puissance de déformation d'un champ de contraintes quelconque $\underline{\underline{\sigma}}$ respectant les critères des sols constitutifs, dans un champ de vitesse $\underline{v}$, est majorée par la puissance dissipable $P(\underline{v})$ possédant les propriétés indiquées au § 3.1 ([1]);

la puissance des forces extérieures (forces de pesanteur : γ, γ') est bilinéaire en (γ, γ') et $\underline{v}$: $p(\gamma, \gamma', \underline{v})$;

une condition nécessaire pour que (γ, γ') corresponde à un remblai potentiellement stable est donc :

$$p(\gamma, \gamma', \underline{v}) \leqslant P(\underline{v}),$$

ce qui définit dans le plan (γ, γ') un demi-plan dans lequel tout remblai potentiellement stable (à « géométrie et résistance fixés ») doit nécessairement se trouver (*fig.* 11).

Par un choix judicieux des champs $\underline{v}$, notamment en sorte que $P(\underline{v})$ soit finie et $p(\gamma, \gamma', \underline{v})$ positive, on aboutit à une approche par l'extérieur, non triviale, pour la frontière du domaine convexe évoqué plus haut.

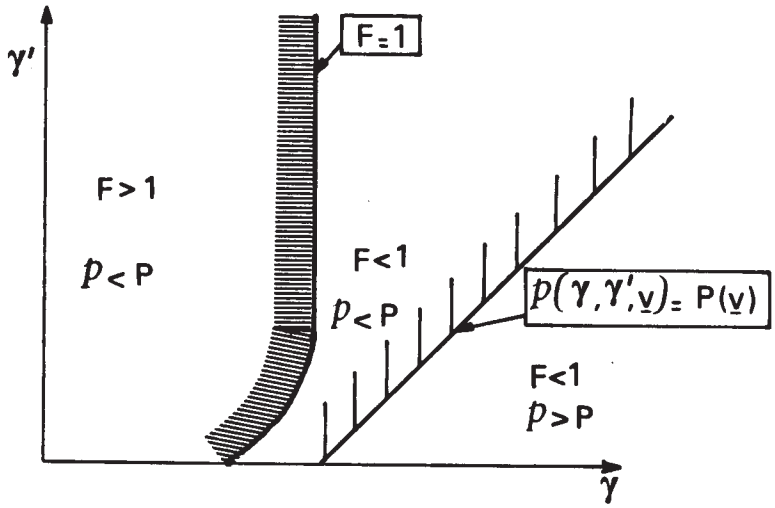


FIG. 11. — *Approche par l'extérieur du convexe des remblais potentiellement stables à géométrie et résistance fixées.*

Il est alors évident que, pour un remblai caractérisé par (γ, γ'), le rapport fonction de $\underline{v}$:

$$F_v = P(\underline{v})/p(\gamma, \gamma', \underline{v})$$

est un majorant du coefficient de rupture F défini par (4.1), pour tout champ de vitesse $\underline{v}$ dans lequel la puissance des forces de pesanteur est positive ([2]).

On a ainsi une approche par excès du coefficient de rupture :

$$\text{(4.4)} \qquad \begin{cases} F \leqslant F_v = P(\underline{v})/p(\gamma, \gamma', \underline{v}) \\ \forall \underline{v} \quad \text{tel que :} \quad (\gamma, \gamma', \underline{v}) > 0. \end{cases}$$

En minimisant le rapport figurant au second membre de (4.4) sur une gamme plus ou moins étendue de modes de déformation — de mécanismes de déformation — pour le remblai, on obtiendra une évaluation de F par excès, soit F_M. Il est clair que F_M possède, à plus forte raison que F, la propriété :

$$\text{(4.5)} \qquad F_M < 1 \Rightarrow \text{remblai instable.}$$

([1]) *Il ne s'agit, par rapport au* § 3.1, *que de traiter le cas d'un milieu non homogène : pour partie sol cohérent, pour partie sol cohérent et frottant.*

([2]) *En effet, on a évidemment :*

$$P(\underline{v})/p(F\gamma, F\gamma', \underline{v}) = F_v/F$$

où le point de coordonnées $(F\gamma, F\gamma')$ *est par définition le point* Q^F *de la* figure 10, *situé sur la frontière du domaine convexe et pour lequel on a donc nécessairement :*

$$p(F\gamma, F\gamma', \underline{v}) \leqslant P(\underline{v});$$

il en résulte, si p *est positive, que :* $F_v/F \geqslant 1$.

4.3. Évaluation de F par excès au moyen de mécanismes par blocs.

4.3.1. *Choix de la ligne de discontinuité de vitesse.*

Nous nous proposons de calculer un majorant F_M de F au moyen de mécanismes par blocs.

Les notations sont définies sur la *figure* 12.

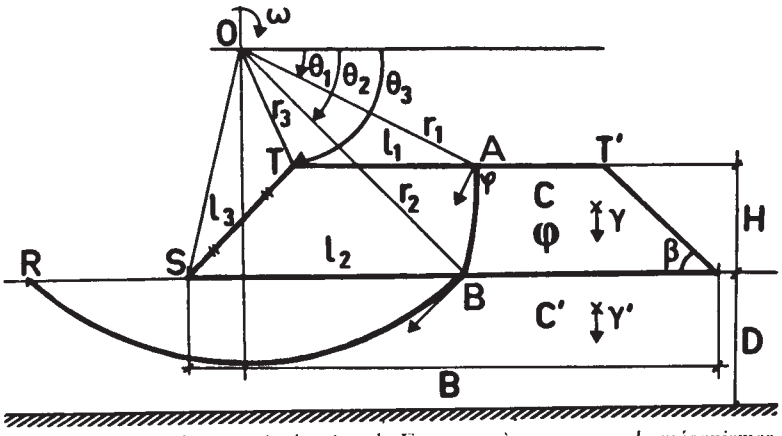


FIG. 12. — *Remblai sur sol mou : évaluation de F par excès au moyen de mécanismes par blocs.*

0 est le centre instantané de rotation dans le mécanisme et ω la vitesse de rotation. Autour de 0 tournent : le bloc RBSR dans la couche de sol cohérent, sous jacente au remblai, et le bloc BATSB dans le remblai.

La puissance dissipable $P(\underline{v})$ se décompose en deux termes :

1° l'intégrale, sur l'arc RB, de $\pi(\underline{v})$ définie par (3.4),

2° l'intégrale, sur l'arc AB, de $\pi(\underline{v})$ définie par (3.6).

Afin d'obtenir pour F une majoration F_M non triviale, $P(\underline{v})$ doit être finie : il en résulte, par les mêmes arguments qu'au § 3.2, que l'arc RB dans la couche de sol cohérent doit être un *arc de cercle centré en* 0 ; dans le remblai l'arc AB doit posséder la propriété indiquée au § 3.2 : en chaque point de AB la normale à la courbe doit faire avec le rayon vecteur issu de 0 un angle β compris entre φ et $\pi - \varphi$ ($\varphi \leqslant \beta \leqslant \pi - \varphi$).

La puissance des forces extérieures, $p(\gamma, \gamma', \underline{v})$ se décompose en deux termes :

1° la puissance des forces de pesanteur pour le bloc RBSR : celle-ci est ici nulle puisque BSR est horizontal et que RB est un arc de cercle centré en 0 ;

2° la puissance des forces de pesanteur pour le bloc BATSB.

En reprenant le raisonnement du § 3.3, on montre alors que, pour un centre de rotation 0 donné, et un arc RB fixé, le minimum de F_v correspond pour AB à un arc de spirale logarithmique à φ, de foyer 0.

En conséquence, nous effectuerons la recherche de F_M par minimisation sur l'ensemble des mécanismes par blocs dans lesquels *la ligne de discontinuité de vitesse*, séparant les blocs mobiles du reste du système immobile, *est constitué d'un arc de cercle de centre* 0 *dans la couche de sol cohérent, et d'un arc de spirale logarithmique à* φ *de foyer* 0 *dans le remblai.*

4.3.2. *Déroulement pratique du calcul.*

Le problème de la détermination de F_M s'écrit :

$$F_M = \underset{\underline{v}}{\mathrm{Min}} \{F_v = P(\underline{v})/p(\gamma, \gamma', \underline{v})\} \tag{4.6}$$

sur l'ensemble des mécanismes par blocs définis ci-dessus.

Pour procéder au calcul effectif de F_M il est commode de définir ces mécanismes au moyen des trois angles θ_1, θ_2 et θ_3, indiqués sur la *figure* 12 ; ces angles sont comptés positivement dans le sens rétrograde. On pose également :

$$(4.7)\qquad \begin{cases} OA = r_1 & TA = l_1 \\ OB = r_2 & SB = l_2 \\ OT = r_3 & TS = l_3 \\ a = \exp\left[(\theta_2 - \theta_1)\operatorname{tg}\varphi\right] \\ b = a\sin\theta_2 - \sin\theta_1. \end{cases}$$

L'équation polaire de la ligne de discontinuité de vitesse ABR, est alors (coordonnées polaires de centre 0 : r, θ) :

$$(4.8)\qquad \begin{cases} r(\theta) = r_1 \exp\left[(\theta - \theta_1)\operatorname{tg}\varphi\right] & \theta \in [\theta_1, \theta_2] \\ r(\theta) = r_2 = ar_1 & \theta \in [\theta_2, \pi - \theta_2] \end{cases}$$

On a aussi les relations géométriques :

$$(4.9)\qquad \begin{cases} \dfrac{H}{r_1} = b; \quad r_3 = r_1 \dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3}; \quad \dfrac{l_1}{r_1} = \dfrac{\sin(\theta_3 - \theta_1)}{\sin\theta_3}; \\ \dfrac{l_2}{r_2} = \dfrac{1}{a}\left[b\operatorname{cotg}\beta + a\cos\theta_2 - \sin\theta_1\operatorname{cotg}\theta_3\right]; \\ \dfrac{l_3}{r_3} = \dfrac{b}{\sin\beta}\dfrac{\sin\theta_3}{\sin\theta_1}. \end{cases}$$

Compte-tenu des expressions (3.4) et (3.6) données pour $\pi(\underline{v})$, on a pour un tel mécanisme :

$$P(\underline{v}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} C\operatorname{cotg}\varphi(\omega r(\theta)\sin\varphi)\frac{r(\theta)\,d\theta}{\cos\varphi} + \int_{\theta_2}^{\pi-\theta_2} C'(\omega r(\theta))r(\theta)\,d\theta$$

ce qui s'écrit aussi par (4.7) :

$$(4.10)\qquad P(\underline{v}) = \omega C' r_1^2\left[\frac{C}{2C'\operatorname{tg}\varphi}(a^2 - 1) + (\pi - 2\theta_2)a^2\right].$$

La puissance des forces de pesanteur se réduit, comme on l'a dit, à :

$$(4.11)\qquad P(\gamma, \gamma', \underline{v}) = \int_{ABST} \gamma(\omega r(\theta)\cos\theta)r(\theta)\,dr\,d\theta,$$

que l'on peut calculer en la décomposant en quatre termes sous la forme :

$$(4.12)\qquad P(\gamma, \gamma', \underline{v}) = \gamma\omega r_1^3\left[\dot{g}_{\overset{\triangle}{OAB}} + \dot{g}_{\overset{\triangle}{OBS}} - \dot{g}_{\overset{\triangle}{OTS}} - \dot{g}_{\overset{\triangle}{OAT}}\right]$$

où chaque terme $\dot{g}$ correspond au secteur indiqué par son indice. $\dot{g}_{\overset{\triangle}{OAB}}$ se calcule simplement à partir de la restriction de l'intégrale (4.10) au secteur $\overset{\triangle}{OAB}$ (on trouvera dans (Coussy, 1978) le détail du calcul). On calcule les autres secteurs triangulaires en remarquant que, pour un triangle quelconque de sommet 0 tel que celui défini par la *figure* 13, la puissance correspondante est donnée par :

$$(4.13)\qquad P = \frac{1}{6}\gamma\omega r^3\frac{l}{r}\left(2\cos\theta - \frac{l}{r}\cos\alpha\right)\sin(\theta + \alpha)$$

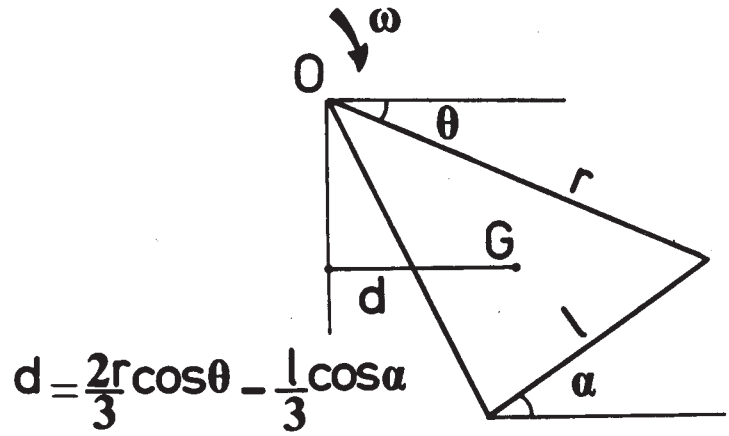


FIG. 13. — *Puissance des forces de pesanteur pour un triangle quelconque de sommet* 0.

On obtient ainsi :

$$\dot{g}_{\overset{\triangle}{OAB}} = \frac{1}{3(1 + 9\,\mathrm{tg}^2\,\varphi)}\left[a^3(\sin\theta_2 + 3\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos\theta_2) - \sin\theta_1 - 3\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos\theta_1\right]$$

$$\dot{g}_{\overset{\triangle}{OAT}} = \frac{l_1}{6r_1}\sin\theta_1\left(2\cos\theta_1 - \frac{l_1}{r_1}\right)$$

$$\dot{g}_{\overset{\triangle}{OBS}} = \frac{a^3 l_2}{6r_2}\sin\theta_2\left(2\cos\theta_2 - \frac{l_2}{r_2}\right)$$

$$\dot{g}_{\overset{\triangle}{OTS}} = \frac{\sin^3\theta_1}{\sin^3\theta_3}\frac{l_3}{6r_3}\left(2\cos\theta_3 - \frac{l_3}{r_3}\cos\beta\right)\sin(\theta_3 + \beta).$$

En remplaçant $P(\underline{v})$ et $\mathcal{P}(\gamma, \gamma', \underline{v})$ par leurs expressions (4.10) et (4.12), on voit que F_v se met sous la forme :

$$F_v = \frac{C'}{\gamma H} K_v\left(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \frac{C}{C'}, \beta, \varphi\right),$$

où K_v est une fonction scalaire des arguments indiqués.

Le majorant F_M donné par (4.6) sera donc :

$$F_M = \frac{C'}{\gamma H}\,\underset{\theta_1, \theta_2, \theta_3}{\mathrm{Min}}\,\{K_v\}. \tag{4.14}$$

Il est possible de ramener la minimisation indiquée dans (4.14) à une minimisation par rapport à *deux* paramètres seulement. En effet, la minimisation analytique de K_v par rapport à θ_3 conduit à la relation :

$$\sin\theta_1\,\mathrm{cotg}\,\theta_3 = \frac{1}{2}b\,\mathrm{cotg}\,\beta \tag{4.15}$$

soit encore :

$$r_1\sin\theta_1\,\mathrm{cotg}\,\theta_3 = \frac{1}{2}H\,\mathrm{cotg}\,\beta$$

Cette condition signifie que 0 est situé sur la droite normale au plan d'assise et coupant la pente en son milieu ($\dot{g}_{\overset{\triangle}{OTS}} = 0$, *figure* 12). Ainsi en tenant compte de (4.15) dans (4.14), on se réduit à une minimisation par rapport aux deux paramètres θ_1 et θ_2, auxquels on imposera de plus les restrictions suivantes d'origine géométrique :

$$\begin{cases} \dfrac{B}{H} \geqslant \dfrac{\cos\theta_1}{b} + \dfrac{3}{2}\mathrm{cotg}\,\beta, & \dfrac{1}{2}\mathrm{cotg}\,\beta \leqslant \dfrac{\cos\theta_1}{b} \\[2ex] \dfrac{D}{H} \geqslant \dfrac{a}{b}(1 - \sin\theta_2), & \dfrac{1}{2}\mathrm{cotg}\,\beta \leqslant \dfrac{a\cos\theta_2}{b} \end{cases} \tag{4.16}$$

qui expriment respectivement que : A est entre T et T', le cercle ne coupe pas le substratum indéformable ni la pente TS.

La détermination du majorant F_M s'écrit donc :

$$\begin{cases} F_M = \dfrac{C'}{\gamma H}\,\underset{\theta_1, \theta_2}{\mathrm{Min}}\,\{K_v\} \\ \text{sous (4.15) et (4.16).} \end{cases} \tag{4.17}$$

A ce stade, par suite de la complexité des expressions analytiques, le calcul effectif de F_M nécessite le recours à l'ordinateur. Ce calcul est aisément programmable car il ne conduit qu'à la minimisation d'une fonction explicite de deux variables. Il ne requiert donc qu'un minimum de temps et présente l'intérêt d'être peu coûteux.

En annexe, nous donnons les abaques dressés par Coussy (1978) fournissant le majorant F_M en fonction de D/H et pour différentes valeurs des autres paramètres. En fait, on a tracé les abaques représentatifs de :

$$K_M = \frac{\gamma H}{C'}F_M, \tag{4.18}$$

en fonction de D/H et pour diverses valeurs des paramètres autres que $\frac{\gamma H}{C'}$, compte-tenu de la linéarité de F_M par rapport à $\frac{C'}{\gamma H}$. Ainsi par exemple, pour $C'/\gamma H = 0{,}1$ les abaques fournissent F_M en divisant les valeurs des ordonnées par 10.

4.4. Cas du remblai équipé de banquettes latérales.

Pour assurer la stabilité d'un remblai dont on est peu sûr, on a souvent recours à l'adjonction de banquettes latérales au remblai principal (*fig.* 14). On les suppose avoir les mêmes caractéristiques mécaniques et la même pente que le remblai principal. Elles ont une hauteur h et une largeur l.

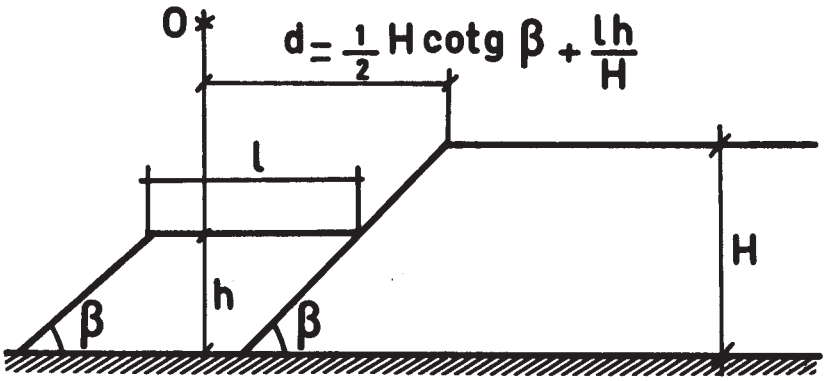


FIG. 14. — *Remblai équipé de banquette.*

Après avoir étudié la banquette seule, considérée comme un remblai indépendant, on étudie par la même méthode l'ensemble remblai plus banquettes. Il suffit pour cela d'ajouter dans l'expression (4.12) de la puissance des forces extérieures, celle due au poids des banquettes (qui font contrepoids). Cela revient à ajouter au dénominateur de K_v le terme :

$$\dot{g}_b = \frac{lh}{H^2} b^3 \left[\frac{1}{b} \sin\theta_1 \operatorname{cotg}\theta_3 - \operatorname{cotg}\beta - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{H} - \frac{h}{H} \operatorname{cotg}\beta \right) \right].$$

La minimisation analytique de K_v par rapport à θ_3 conduit à :

$$\sin\theta_1 \operatorname{cotg}\theta_3 = \frac{1}{2} b \operatorname{cotg}\beta + \frac{lh}{H^2} b$$

soit encore :

$$r_1 \sin\theta_1 \operatorname{cotg}\theta_3 = \frac{1}{2} H \operatorname{cotg}\beta + \frac{lh}{H};$$

(à l'optimum, 0 est donc situé sur une droite normale au plan d'assise, à la distance lh/H de la droite précédemment définie dans le cas du remblai sans banquette).

On trouvera en annexe les abaques relatifs à ce cas : on a représenté, comme au § 4.3, K_M en fonction de D/H, pour diverses valeurs des paramètres : φ, h/H, β, l/H ; on rappelle que le majorant du coefficient de rupture est donné par :

$$F_M = \frac{C'}{\gamma H} K_M.$$

4.5. Cas du remblai reposant sur plusieurs couches de sols purement cohérents.

Le remblai de mêmes caractéristiques que celui étudié plus haut, repose sur plusieurs couches de sol purement cohérent dans lesquelles la cohésion C' varie linéairement en fonction de la profondeur : pour une couche repérée par l'indice i, d'épaisseur h_i, de poids volumique γ_i, elle variera entre deux valeurs C_i^1 et C_i^2 (*fig.* 15).

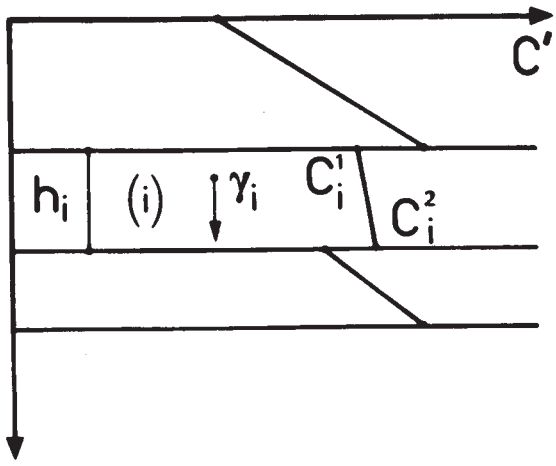


FIG. 15. — *Remblai reposant sur plusieurs couches dont les cohésions varient linéairement en fonction de la profondeur.*

La définition du coefficient de rupture dans un tel cas reprend le raisonnement du § 4.1 ; le système apparaît comme soumis à un processus de chargement à $n + 1$ paramètres (si n est le nombre de couches). Ainsi on montre que le coefficient de rupture d'un tel ouvrage se met sous la forme :

$$F = \frac{C}{\gamma H} \kappa^{+} (C_i^1/C,\ C_i^2/C,\ \gamma_i/\gamma,\ h_i/H,\ D/H,\ B/H,\ \beta, \varphi)$$

l'indice i variant de 1 à n.

L'approche par excès du coefficient de rupture s'écrit, de façon analogue à (4.4) :

$$\begin{cases} F \leqslant F_v = P(\underline{v})/p(\gamma, \gamma_i, \underline{v}), & i = 1, \ldots n \\ \forall \underline{v} \text{ tel que : } p(\gamma, \gamma_i, \underline{v}) > 0. \end{cases}$$

Ceci permet de calculer un majorant de F_M au moyen de mécanismes par blocs : les mécanismes utilisés sont identiques à ceux employés dans le cas de la couche unique ([1]). Le calcul pratique de F_M se fera comme au § 4.3.2. en modifiant simplement l'expression de $P(\underline{v})$. Les détails de calcul sont donnés dans (Coussy, 1978).

4.6. Cas du remblai avec surcharge.

4.6.1. *Surcharge répartie.*

L'ouvrage est soumis à une surcharge répartie entre T et T', de densité p (*fig.* 16).

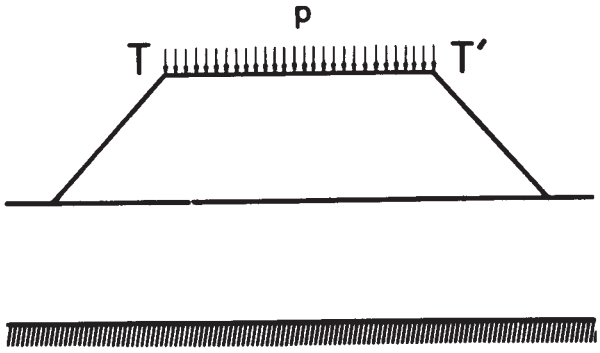


FIG. 16. — *Remblai soumis à une surcharge répartie.*

L'introduction du coefficient de rupture se fait de façon analogue aux cas précédents et ce coefficient se met sous la forme :

$$F = \frac{C'}{\gamma H} \kappa^{+} (C/C',\ \gamma'/\gamma,\ D/H,\ B/H,\ p/\gamma H,\ \beta, \varphi).$$

([1]) *Le raisonnement du § 4.3.1. peut être repris sans modification.*

L'approche par excès de F repose alors sur la formule :

$$F \leqslant F_v = P(\underline{v})/\mathcal{P}(\gamma, \gamma', p, \underline{v})$$
$$\forall \underline{v} \text{ tel que : } \mathcal{P}(\gamma, \gamma', p, \underline{v}) > 0.$$

$\mathcal{P}(\gamma, \gamma', p, \underline{v})$ comprend, outre la puissance des forces de pesanteur, la puissance développée par la surcharge p dans le champ de vitesses $\underline{v}$.

En utilisant encore le même type de mécanismes par blocs on obtient un majorant F_M de F : on aboutit à nouveau au problème (4.14), où K_v est modifié en ajoutant au dénominateur le terme :

$$\frac{pb}{\gamma H} \frac{\sin^2(\theta_3 - \theta_1)}{2 \sin^2 \theta_3}. \tag{4.19}$$

La minimisation analytique par rapport à θ conduit à :

$$\sin \theta_1 \operatorname{cotg} \theta_3 (3\gamma H - p) = \frac{3}{2} \gamma H b \operatorname{cotg} \beta - p \cos \theta_1 \tag{4.20}$$

ce qui ramène encore le problème à la minimisation numérique de K_v par rapport aux deux paramètres θ_1 et θ_2 sous (4.20), et les conditions géométriques (4.16).

4.6.2. *Surcharge concentrée.*

L'ouvrage est soumis à une surcharge concentrée, d'intensité P et située à la distance x de T (*fig.* 17).

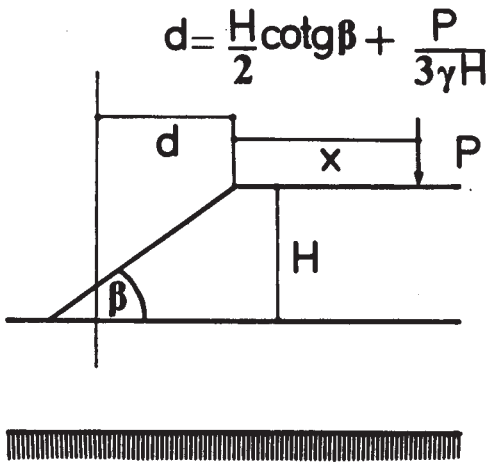


FIG. 17. — *Remblai soumis à une surcharge concentrée.*

Le coefficient de rupture se met sous la forme :

$$F = \frac{C'}{\gamma H} \kappa^+ (C/C', \gamma'/\gamma, D/H, B/H, x/H, P/\gamma H^2, \beta, \varphi).$$

En utilisant encore les mêmes mécanismes par blocs, on obtient un majorant F_M de F : K_v dans le problème (4.14) est modifié par addition au dénominateur du terme :

$$\frac{b^2 P}{\gamma H^2} \left[\frac{x}{H} b + \sin \theta_1 \operatorname{cotg} \theta_3 \right].$$

La minimisation analytique par rapport à θ_3 fournit la relation :

$$\sin \theta_1 \operatorname{cotg} \theta_3 = \frac{1}{2} b \operatorname{cotg} \beta + \frac{Pb}{3\gamma H^2},$$

soit encore :

$$r_1 \sin \theta_1 \operatorname{cotg} \theta_3 = \frac{1}{2} H \operatorname{cotg} \beta + P/3\gamma H,$$

(à l'optimum, le centre de rotation 0 se trouve sur la suite normale au plan d'assise à la distance $P/3\gamma H$ de la droite précédemment définie pour le remblai sans surcharge, *figure* 17).

Le calcul de F_M se fait par minimisation par rapport à θ_1 et θ_2 de F_M sous la condition ci-dessus et sous des conditions géométriques modifiées par rapport à (4.16) :

$$\frac{B}{H} \geqslant \frac{\cos\theta_1}{b} + \frac{3}{2}\operatorname{cotg}\beta - \frac{P}{3\gamma H}; \qquad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\beta + \frac{P}{3\gamma H^2} \leqslant \frac{\cos\theta_1}{b}$$

$$\frac{D}{H} \geqslant \frac{a}{b}(1 - \sin\theta_2); \qquad \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\beta + \frac{P}{3\gamma H^2} \leqslant \frac{a}{b}\cos\theta_2.$$

4.7. Comparaison avec les méthodes usuelles.

A titre d'exemple on a comparé les résultats obtenus par la méthode présentée ci-dessus dans le cas du remblai simple (§ 4.3) avec les valeurs du *coefficient de sécurité* données par les abaques de Pilot et Moreau dressés en application de la méthode des tranches de Bishop. On s'est placé dans le cas $\varphi = 40°$, $C/C' = 0$, $\operatorname{tg}\beta = 2/5$, (*fig.* 18*a* et *b*).

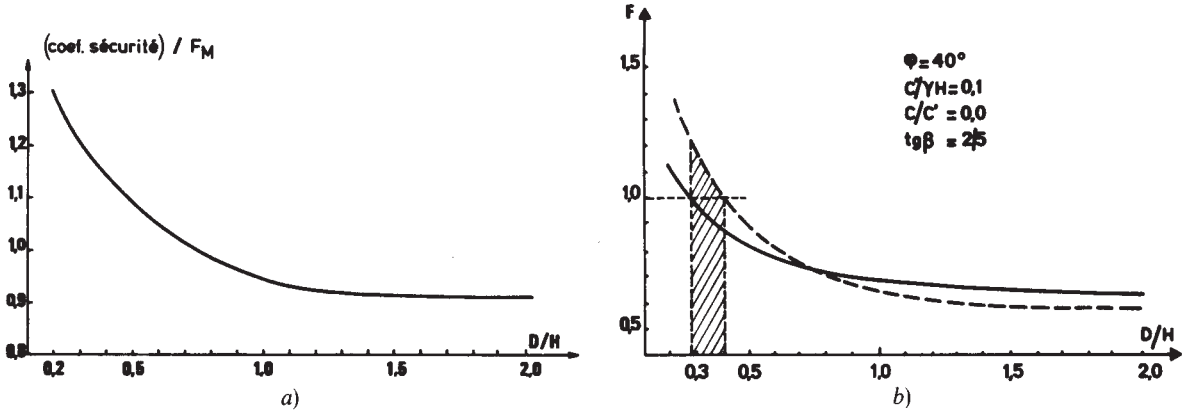


FIG. 18. — Comparaison de la méthode du coefficient de rupture et de la méthode des tranches.
---- Méthode des tranches : « coefficient de sécurité ».
— — Méthode du coefficient de rupture.

La *figure* 18*a*) donne en fonction de D/H le rapport « coefficient de sécurité »/F_M pour $C'/\gamma H = 0{,}1$. On y constate que ce rapport décroît depuis la valeur 1,30 pour $D/H = 0{,}2$ jusqu'à la valeur 0,91 pour $D/H = 2$. En particulier, pour $D/H < 0{,}74$, le coefficient de sécurité fourni par la méthode des tranches est *plus optimiste* que F_M, et ce caractère est très marqué pour $D/H < 0{,}4$. Le fait que F_M ne soit qu'un *majorant du coefficient de rupture* exact F vient renforcer la signification de cette constatation.

La *figure* 18*b*) donne, dans les mêmes conditions, en fonction de D/H les valeurs du coefficient de sécurité et de F_M : on y remarque que, pour $0{,}28 < D/H < 0{,}4$, la méthode des tranches donne un coefficient de sécurité supérieur à 1 alors que le majorant F_M du coefficient de rupture est inférieur à 1.

La rupture du remblai est donc certaine en application de (4.5), *contrairement à ce que laisserait entendre la terminologie même de coefficient de sécurité.*

A noter que ce type de résultats semble rejoindre les usages des praticiens qui accordent des seuils de confiance différents au coefficient de sécurité, suivant les valeurs de certains paramètres caractérisant les sols. Toutefois on ne doit pas perdre de vue qu'en fixant la valeur minimale du coefficient de sécurité pour que l'ouvrage soit constructible, à un seuil supérieur à 1, on vise non seulement à se protéger contre l'instabilité, mais surtout à se placer suffisamment loin de celle-ci pour se prémunir contre les désordres qui la précèdent : l'exemple présenté montre donc que cet objectif essentiel risque de ne pas être atteint.

5. Conclusion.

Par cette étude nous avons montré que le calcul à la rupture est, par essence, le fondement théorique de toute analyse de « stabilité » des ouvrages en terre.

Nous avons ainsi mis en évidence que, en s'appuyant sur la seule connaissance d'un critère de résistance pour les sols constitutifs — qui est en règle générale la seule donnée dans les problèmes d'analyse de stabilité — on peut introduire le concept d'ouvrage potentiellement stable dans une géométrie donnée : ouvrage pour lequel il y a compatibilité entre les conditions d'équilibre statique sous le chargement imposé, et la condition de résistance en chaque point. La stabilité potentielle ou l'instabilité certaine d'un ouvrage est alors caractérisée par la position, par rapport à l'unité, de la valeur du « coefficient de rupture ». Il convient d'insister à nouveau sur le fait qu'aucune hypothèse supplémentaire n'étant introduite, par exemple sur la façon dont « l'équilibre limite »

de l'ouvrage se réalise, la signification du coefficient de rupture est sans ambiguïté : si le coefficient de rupture est inférieur à 1, l'ouvrage étudié est certainement instable.

Cette façon d'aborder les problèmes d'analyse de « stabilité » des ouvrages en terre permet, non seulement d'aboutir à une démarche claire, en particulier en ce qui concerne le concept de « ligne de rupture » tant du point de vue statique que cinématique, mais aussi de proposer une méthode de calcul qui se révèle très commode dans la pratique : la « méthode du coefficient de rupture » qui est basée sur l'utilisation de mécanismes de déformation par blocs dans une approche dualisée, par le moyen du principe des puissances virtuelles, de la condition de compatibilité entre équilibre et résistance qui a servi de point de départ à la définition des ouvrages potentiellement stables.

Ainsi, à côté des méthodes habituellement utilisées pour les analyses de stabilité d'ouvrages, que les praticiens ont étalonnées par l'expérience en établissant des niveaux de confiance variables selon les problèmes étudiés et dans lesquelles le raisonnement présente souvent des insuffisances du point de vue mécanique, on dispose maintenant d'une méthode entièrement cohérente et d'une efficacité certaine.

En particulier, il est remarquable que cette méthode, ne faisant intervenir aucune autre condition que la condition de résistance, puisse dans certains cas affirmer de façon indiscutable l'instabilité d'un ouvrage que d'autres méthodes censées s'appuyer sur la même condition, voire sur des hypothèses plus contraignantes présument stables.

L'extension de la méthode est prévue pour traiter les cas d'ouvrages constitués de sols anisotropes (notamment : anisotropie de cohésion), et de géométries non simplifiées.

Remerciements.

Les auteurs remercient Monsieur le Professeur Habib pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail et en particulier pour ses nombreuses suggestions qui ont permis d'en améliorer la présentation.

Références.

BAKER R. et GARBER M. (1978). – *Theoretical analysis of the stability of slopes* Géotechnique, vol 28, n° 4, pp. 395-411.

CHEN W. F. (1975). – *Limit analysis and soil plasticity.* Development in Geotechnical Engineering, vol 7, Elsevier, pp. 399-445.

CHEN W. F. et SNITHBAN N. (1975). – *On slip surface and slope stability analysis.* Soils and foundations. Jap. Soc. Soil Mech. and Foundation Engng, vol 15, n° 3, pp. 41-49.

COULOMB C. A. (1773). – *Sur une application des règles de Maximis et Minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture.* Mémoires présentés à l'Académie des Sciences.

COUSSY O. (1977). – *Application du calcul à la rupture à la tenue des remblais.* Communication 3ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 6-9 Sept. 1977.

COUSSY O. (1978). – *Le calcul à la rupture dans la tenue des ouvrages en terre.* Thèse Dr. Ing., Paris.

DRUCKER D. C. (1954). – *Coulomb friction, Plasticity and limit loads.* Jl Appl. Mech. Trans. ASME, vol 21, pp. 71-74.

DRUCKER D. C., and PRAGER W. (1952). – *Soil mechanics and plastic analysis or limit design.* Quart. Appl. Math. vol 10, pp. 157-165.

GUELLEC P. (1970). – *Calcul des écoulements en milieu poreux par la méthode des éléments finis.* Rapport recherche L.C.P.C., n° 11.

HUANG Y. H. and AVERY C. M. (1976). – *Stability of slopes by logarithmic spiral method.* Jnl of the Geotechnical Engineering Division, A.S.C.E. vol 102, GT1.

PILOT G., MOREAU M. (1973). – *La stabilité des remblais sur sols mous. Abaques de calcul.* Eyrolles, Paris.

RADENKOVIC D. (1961). – *Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb.* C.R. Ac. Sc. Paris, pp. 4103-4104.

RADENKOVIC D. (1962). – *Théorie des charges limites.* Séminaire de plasticité, J. Mandel ed., P.S.T. Min. Air, n° 116, pp. 129-142.

RAULIN P., TOUBOL A. et ROUQUES G. (1974). – *Calcul de la stabilité des pentes en rupture non circulaire.* Rapport de recherche n° 36, L.C.P.C., Paris.

RENDULIC L. (1935). – *Ein Beitrag zur Bestimmung der Gleitscherheit.* Der Bauingenieur, n° 19/20.

SALENÇON J. (1976). – *Calcul à la rupture.* Cours D.E.A., E.N.P.C., Paris.

SALENÇON J. (1978). – *Calcul à la rupture et analyse limite.* Cours E.N.P.C., Paris.

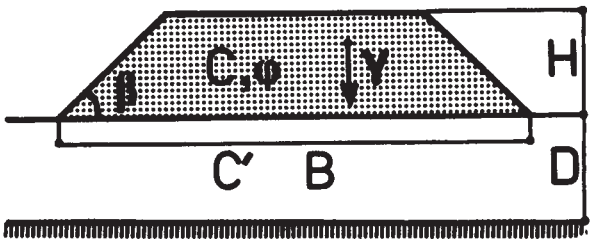
SALENÇON J. et COUSSY O. (1979). – *Analyse de la stabilité des remblais sur sols mous.* C.R. Symp. Intern. Mécanique des sols, mars 1979, Oaxaca (Mexique), vol. 1, pp. 145-153.

TAYLOR D. W. (1937). – *Stability of earth slopes.* Journal of the Boston Society of Civil Engineers. Vol 24, n° 3, pp. 337-386.

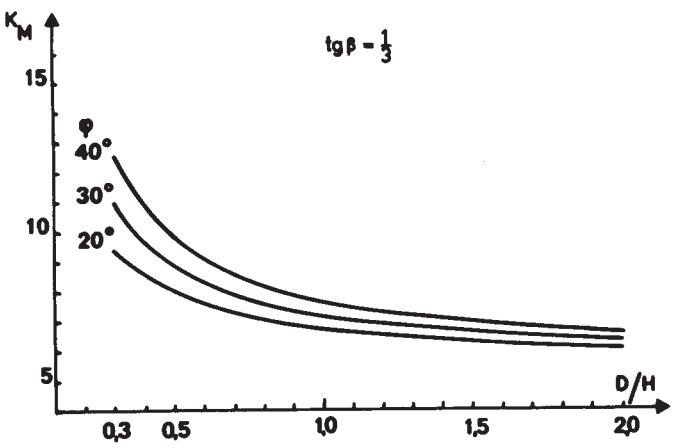
TAYLOR D. W. (1948). – *Fundamentals of Soil Mechanics.* John Wiley, 1960.

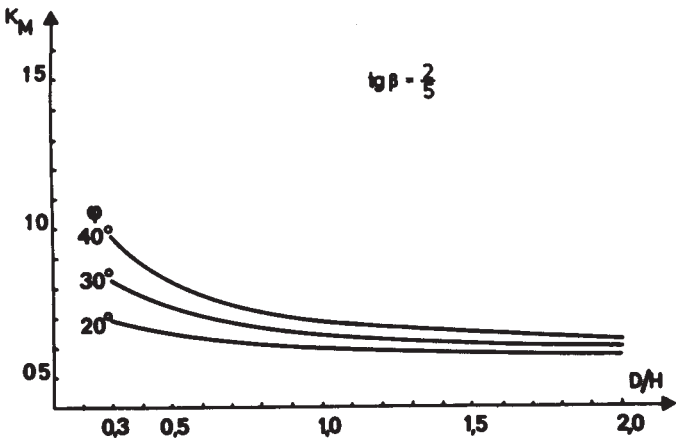
Annexe : Méthode du coefficient de rupture : Abaques de calcul de F_M.

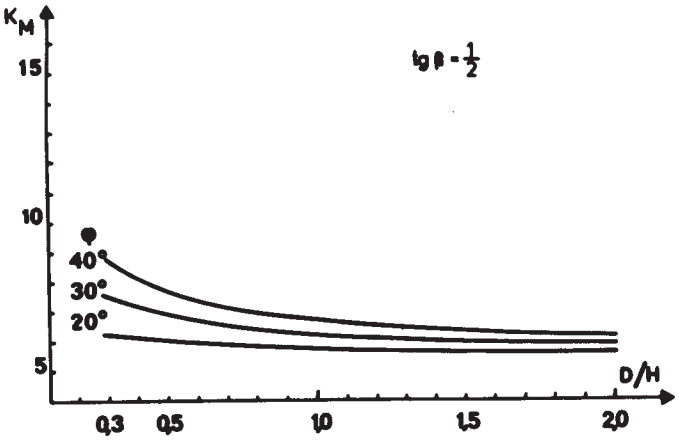
$$C/C' = 0$$

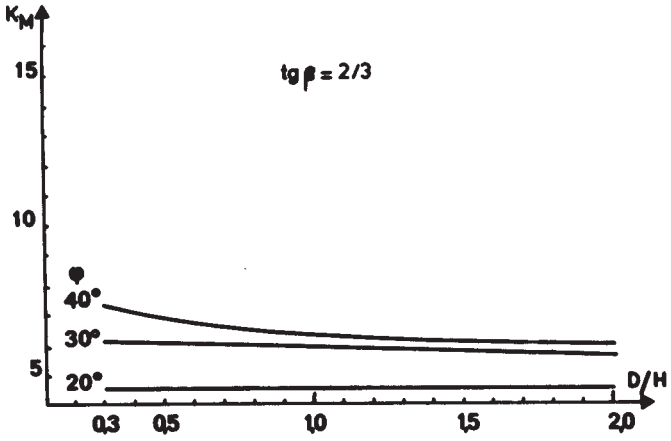


$$F_M = \frac{C'}{\gamma H} K_M$$



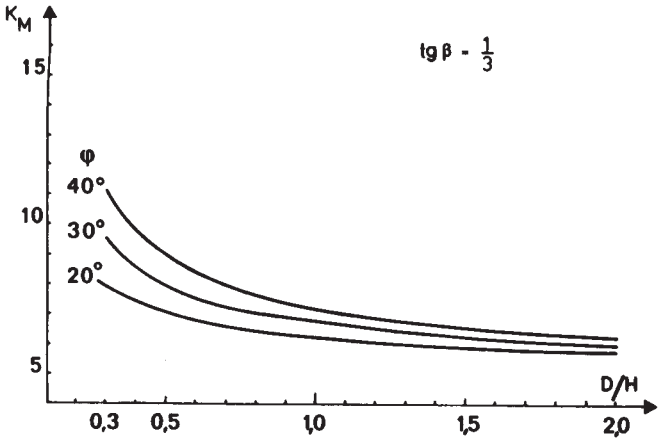


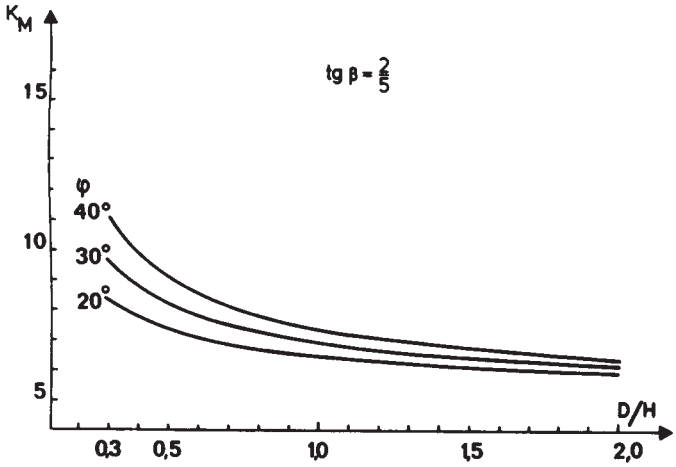


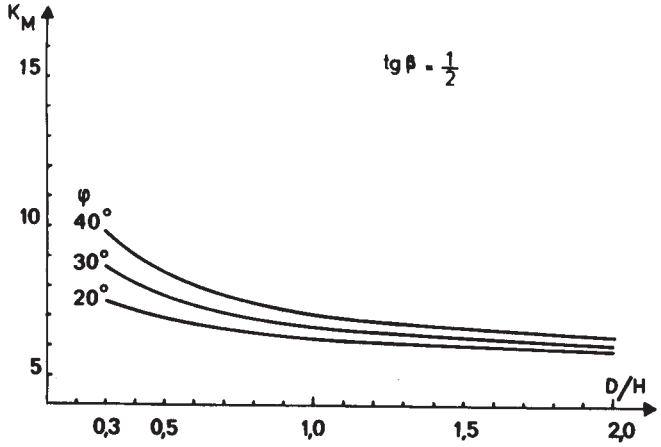


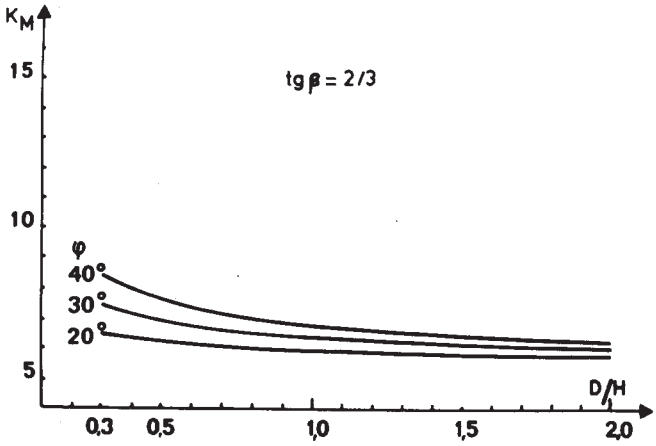
$$C/C' = 0{,}5$$

$$F_M = \frac{C'}{\gamma H} K_M$$

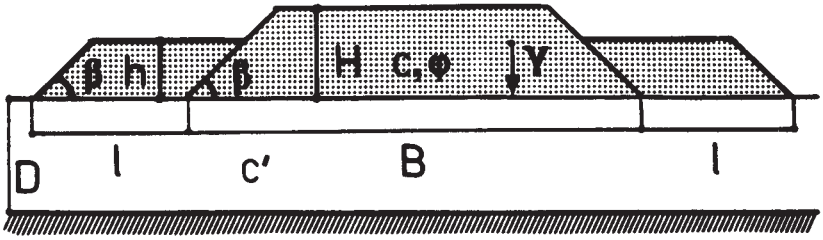




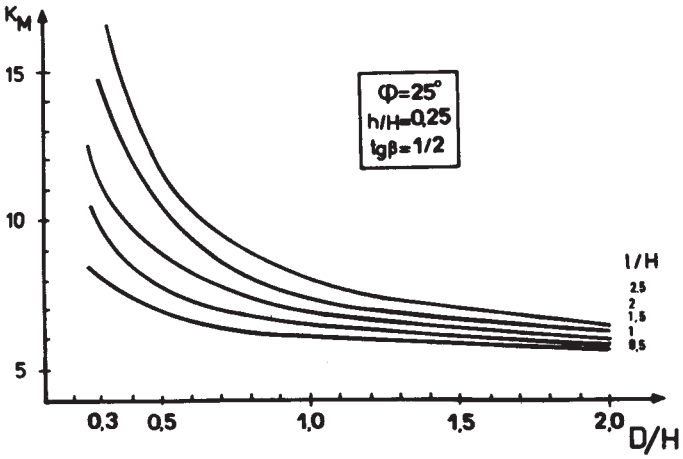


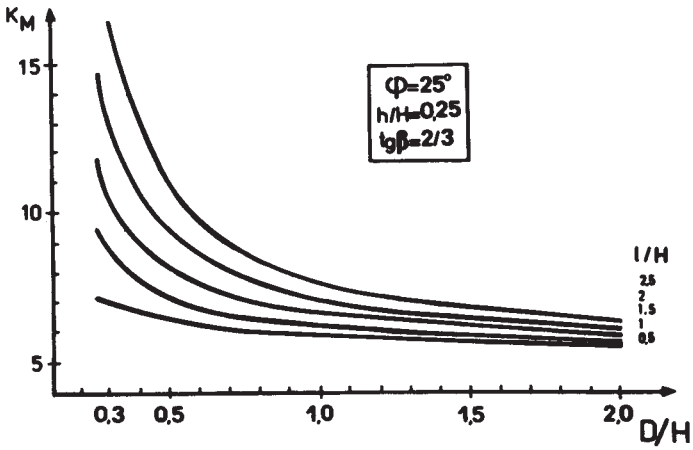


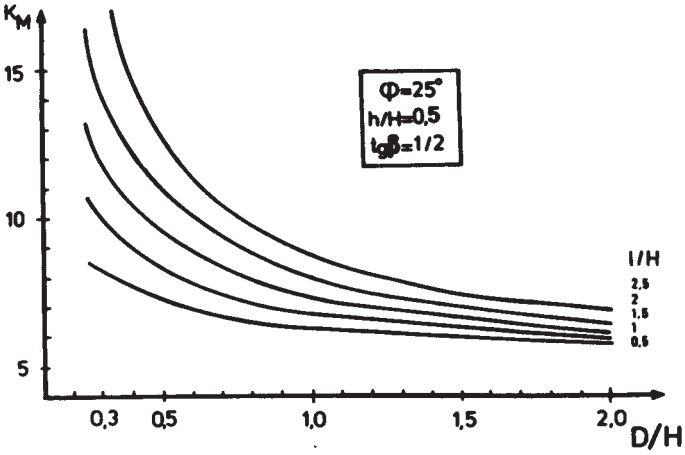
$$C/C' = 0$$

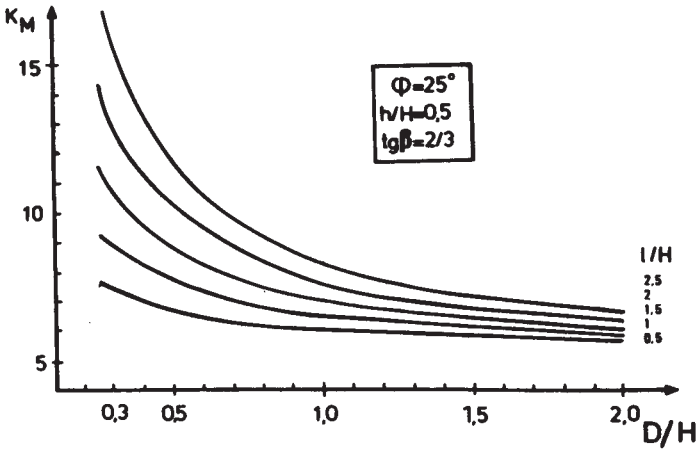


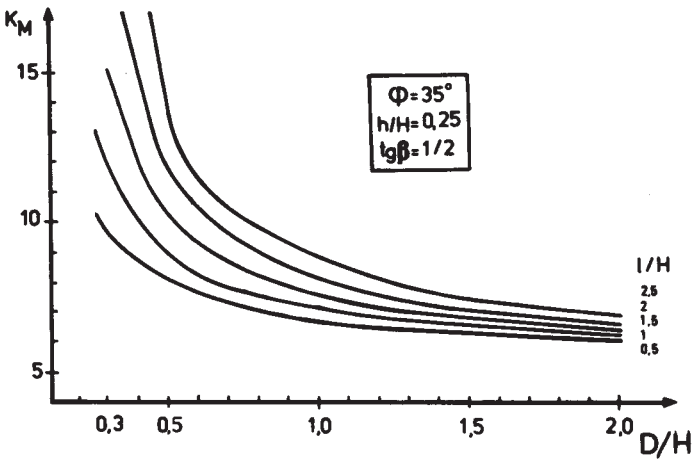
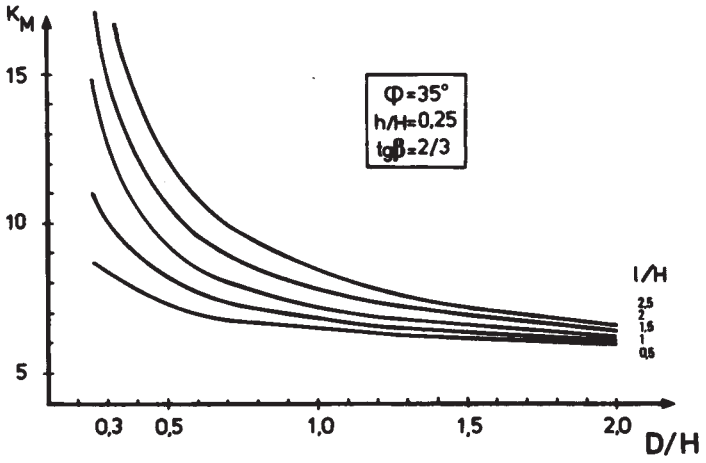
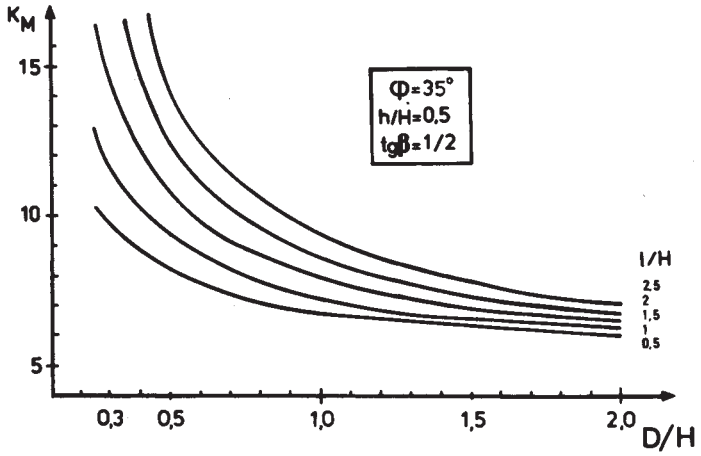
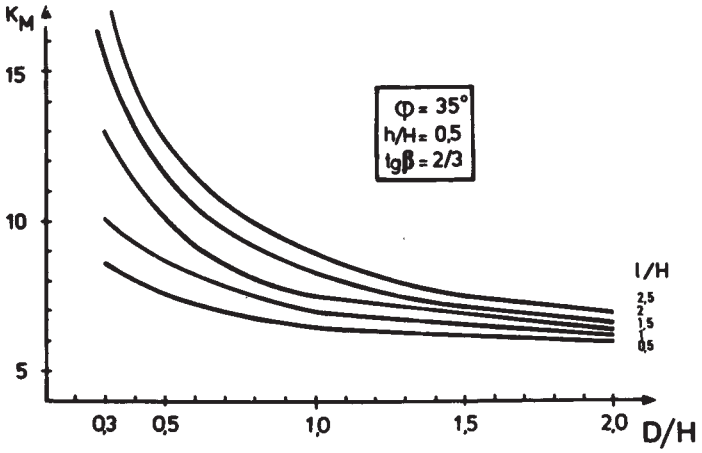
$$F_M = \frac{C'}{\gamma H} K_M$$









$$C/C' = 0$$

$$F_M = \frac{C'}{\gamma H} K_M$$