

ZASTOSOWANIE ANALIZY STANÓW GRANICZNYCH DO BADANIA STATECZNOŚCI NASYPÓW

O. COUSSY i J. SALENÇON (PALAISEAU)*

Teoria analizy wytrzymałościowej układu mechanicznego opiera się na znajomości jedynie kryterium wytrzymałościowego materiału. Na podstawie twierdzenia kinematycznego można zdefiniować współczynnik zniszczenia, którego znaczenie jest jasne: gdy współczynnik ten jest mniejszy od 1, wtedy następuje zniszczenie układu pod wpływem przyłożonych obciążeń. Współczynnik ten może być łatwo określony lub oszacowany na podstawie podejścia kinematycznego teorii ogólnej. Dla problemu zachowania się nasypów rozwija się tutaj metodę pozwalającą na oszacowanie tego współczynnika w sposób prosty i łatwy do zastosowania przy wykorzystaniu metod numerycznych; podaje się również nomogramy. Metodę tę zastosowano do rzeczywistego przypadku zniszczenia nasypu i wydaje się, że uzyskano bardzo dobry opis zaobserwowanego typu zniszczenia. W końcu na podstawie ścisłej teorii stanów granicznych analizuje się i wyjaśnia konieczność przyjęcia wprowadzonych hipotez przy wykorzystaniu metod tradycyjnych; przeprowadzono porównanie wyników obu metod.

OZNACZENIA

- Ω badany system,
- \mathbf{Q} wektor obciążeń układu,
- \mathbf{u}, \mathbf{U} pole prędkości, nieciągłość prędkości,
- $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{u})$ wektor prędkości odkształcenia układu,
- $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ pole tensora naprężeń Cauchy'ego, tensor naprężeń w punkcie \mathbf{x} ,
- $\mathbf{d}, \mathbf{d}(\mathbf{x})$ pole tensorów odkształcenia, tensor odkształcenia w punkcie \mathbf{x} .
- f warunek stanu granicznego,
- $P(\mathbf{u}) P(\mathbf{U})$ moc dysypowana na nieciągłości,
- $F(\mathbf{Q}) F^+(\mathbf{Q})$ współczynnik zniszczenia związany z \mathbf{Q} , górne oszacowanie współczynnika,
- C, φ, C' spójność, kąt tarcia wewnętrznego gruntu nasypu podłoża,
- γ, γ' gęstość nasypu, gęstość gruntu podłoża,
- B, D, H, β parametry określające kształt nasypu,
- $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ kąty określające pole prędkości oszacowania.

1. WSTĘP

Metody stosowane zazwyczaj do badania budowli ziemnych opierają się na teorii stanów granicznych. Słynne prace COULOMBA [1] mogą być uznane zresztą za pierwsze przykłady tego rodzaju obliczeń zastosowanych w tej dziedzinie. Dla analizy zachowania się nasypów używa się, jak wiadomo, metod pasków (FELLENUS [2], BISHOP [3]) lub metod globalnych (CAQUOT [4], RENDULIC [5], TAYLOR [6]).

(*) Original text available in French as request to the senior author.

W niniejszej pracy przypomina się dokładne znaczenie pojęcia stanu granicznego i związanych z nim rezultatów, a w szczególności przedstawia się twierdzenie podejścia kinematycznego i proponuje się wyprowadzenie stąd definicji »współczynnika zniszczenia« dla badanej konstrukcji w taki sposób, żeby znaczenie tego współczynnika i jego zakres stosowalności były jasne.

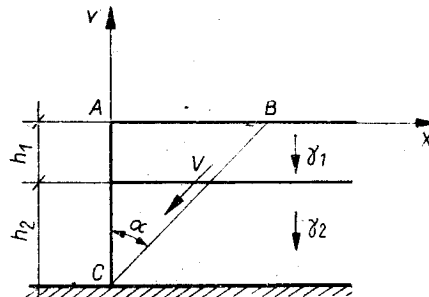
2. METODA STANÓW GRANICZNYCH

2.1. Postawienie problemu; podejście statyczne

Rozpatruje się układ mechaniczny Ω i bada się go w jego układzie geometrycznym początkowym (tzn. nie będzie się uwzględniać żadnych zmian w jego układzie geometrycznym). Układ ten jest poddany działaniu obciążenia określonego przez wektor obciążenia $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}^n$, z którym związany jest wektor prędkości deformacji układu $\dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{R}^n$ taki, że w całym polu prędkości \mathbf{u} kinematycznie dopuszczalnych dla układu — moc sił zewnętrznych wyraża się iloczynem skalarnym

$$(2.1) \quad P_e(\mathbf{u}) = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{u}).$$

W charakterze przykładu rozpatrzmy skarpe pionową przedstawioną na rys. 1, która składa się z dwu warstw poziomych o gęstościach γ_1 i γ_2 i grubościach h_1 i h_2 . Można zdefiniować obciążenia układu za pomocą wektora $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}^2$, $\mathbf{Q} = (\gamma_1, \gamma_2)$.



Rys. 1. Dwuwarstwowa skarpa pionowa

Odpowiedni wektor $\dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{R}^2$ zdefiniowany jest, dla każdego pola \mathbf{u} kinematycznie dopuszczalnego, przez równość (2.1), w której $P_e(\mathbf{u})$ przedstawia moc sił zewnętrznych określonych przez γ_1 i γ_2 w polu prędkości \mathbf{u} , które spełnia warunki graniczne dla danego układu; stąd wyprowadza się ogólne wzory na składowe \dot{q} dla tego problemu:

$$(2.2) \quad \dot{q}_1(\mathbf{u}) = \int \int_{\substack{x \geq 0 \\ -h_1 < y \leq 0}} -u_x \, dx \, dy, \quad \dot{q}_2(\mathbf{u}) = \int \int_{\substack{x \geq 0 \\ -(h_1+h_2) < y < -h_1}} -u_x \, dx \, dy.$$

W szczególności, jeśli dla badanego problemu rozpatruje się pole prędkości \mathbf{u} , w którym blok ABC ślizga się jako ciało sztywne wzdłuż BC z prędkością styczną V , otrzymuje się dla $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{u})$

$$(2.3) \quad \dot{q}_1(\mathbf{u}) = h_1(h_1 + 2h_2) V \frac{\sin \alpha}{2}, \quad \dot{q}_2(\mathbf{u}) = h_2^2 V \frac{\sin \alpha}{2}.$$

Wracając do ogólnego układu Ω przyjmuje się, że w każdym punkcie $\mathbf{x} \in \Omega$ wytrzymałość materiału określona jest przez kryterium f , funkcję skalarną tensora naprężeń Cauchy'ego $\sigma(\mathbf{x})$; powinien być przeto spełniony warunek

$$(2.4) \quad f(\mathbf{x}; \sigma(\mathbf{x})) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Oczywiście, żeby układ Ω wytrzymał dane obciążenie \mathbf{Q} przy spełnieniu warunku (2.4) musi istnieć pole naprężeń σ , które co najmniej równoważy \mathbf{Q} i spełnia (2.4). Inaczej możemy to napisać następująco:

$$(2.5) \quad \Omega \text{ wytrzyma } \mathbf{Q} \Rightarrow \exists \sigma \begin{cases} \sigma \text{ równoważy } \mathbf{Q}, \\ f(\mathbf{x}; \sigma(\mathbf{x})) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases}$$

Jest to podejście statyczne analizy stanu granicznego, które można sformułować następująco:

Jeśli przy danym obciążeniu \mathbf{Q} nie istnieje żadne pole naprężeń σ spełniające warunki (2.5), to jest pewne, że układ Ω nigdy nie wytrzyma obciążenia \mathbf{Q} ⁽¹⁾.

Tak więc dla przykładu z rys. 1 można stwierdzić, że jeśli przy danych h_1, h_2, γ_1 i γ_2 nie można znaleźć pola naprężeń, które byłoby w równowadze z siłami masowymi i spełniało warunki brzegowe oraz spełniało kryterium stanu granicznego gruntu w każdym punkcie, to jest pewne, że rozpatrywana konstrukcja będzie niestateczna w sensie rozważanego warunku wytrzymałościowego, tzn. nastąpi zniszczenie w sensie analizy stanów granicznych.

2.2. Podejście kinematyczne

Powyższe podejście statyczne wymaga w zastosowaniach zbadania wszystkich pól naprężeń równoważących przyłożone do układu naprężenie, co jak łatwo zauważyć jest często trudne.

Na szczęście można otrzymać proste i łatwe w zastosowaniu twierdzenie, jeśli rozpatrzeć pola prędkości kinematycznie dopuszczalne dla układu. Dowód jest klasyczny [7] jest przedstawiony w Dodatku 1

Oznaczmy przez \mathbf{u} pole prędkości kinematycznie dopuszczalne dla układu a przez \mathbf{d} odpowiednie pole odkształcenia i wprowadźmy funkcję:

$$(2.6) \quad \pi(\mathbf{x}; \mathbf{d}(\mathbf{x})) = \sup_{\sigma^*(\mathbf{x})} \{ \text{tr}(\sigma^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x})) \mid \sigma^*(\mathbf{x}): f(\mathbf{x}; \sigma^*(\mathbf{x})) \leq 0 \},$$

oraz oznaczmy

$$(2.7) \quad P(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \pi(\mathbf{x}; \mathbf{d}(\mathbf{x})) d\Omega.$$

Można wykazać, że jeśli w polu prędkości \mathbf{u} , kinematycznie dopuszczalnym dla układu, zachodzi nierówność

$$(2.8) \quad P_e(\mathbf{u}) = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{u}) > P(\mathbf{u}),$$

to układ nie wytrzyma danego obciążenia \mathbf{Q} , przy przyjęciu warunku stanu granicznego (2.4).

⁽¹⁾ Uwaga: w danym układzie geometrycznym.

Jak widać, twierdzenie to zachowuje charakter stwierdzenia dającego się zastosować w praktyce, podobnie jak odpowiednie twierdzenie w punkcie 2.1, ale zastosowanie go jest łatwiejsze, ponieważ wystarczy jeśli tylko nierówność (2.8) jest spełniona dla jednego pola \mathbf{u} .

W charakterze przykładu dla układu z rys. 1 można pokazać, że jeśli w polu prędkości polegającym na przesunięciu bloku rozpatrzonym powyżej zachodzi nierówność

$$\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{u}) > P(\mathbf{u}),$$

to konstrukcja jest niestateczna.

Analogicznie do klasycznej analizy granicznej [7] można będzie umownie określić $P(\mathbf{u})$ terminem moc dysypowana.

2.3. Definicja współczynnika zniszczenia

Rezultat podany powyżej pozwala w sposób jasny zdefiniować współczynnik $F(\mathbf{Q})$ zniszczenia układu Ω związany z obciążeniem \mathbf{Q} za pomocą wzoru

$$(2.9) \quad F(\mathbf{Q}) = \underset{\mathbf{u}}{\text{Min}} \left\{ \frac{P(\mathbf{u})}{\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{u})} \mid \mathbf{u}: \mathbf{u} \text{ kinematycznie dopuszczalne} \right\},$$

$$\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{u}) > 0$$

współczynnik ten ma jasno określone znaczenie: jeśli

$$(2.10) \quad F(\mathbf{Q}) < 1,$$

to układ Ω jest niestateczny przy rozpatrywaniu obciążeniu \mathbf{Q} .

Oczywiście, jeśli się ograniczyć do rozpatrywania kilku (lub tylko jednego) pól \mathbf{u} kinematycznie dopuszczalnych dla układu, to otrzymuje się majorantę $F^+(\mathbf{Q})$ współczynnika $F(\mathbf{Q})$. Istotny jest jednak fakt, że znaczenie (2.10) pozostanie w mocy dla takiego niezbyt dokładnego oszacowania, ponieważ, jeśli $F^+(\mathbf{Q}) < 1$, przeto można być pewnym, że układ jest tym bardziej niestabilny.

2.4. Wzór na moc dysypowaną w przypadku kryterium Coulomba

Jeśli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ są naprężeniami głównymi uporządkowanymi według wielkości $\sigma_1 \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ (rozciąganie uważamy za dodatnie), to kryterium Coulomba przybiera postać

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1 (1 + \sin \varphi) - \sigma_{III} (1 - \sin \varphi) - 2C \cos \varphi.$$

Moc dysponowana wyraża się wzorem [8]

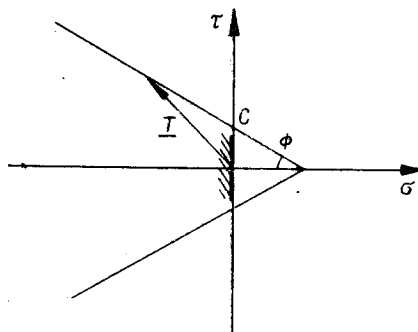
$$(2.11) \quad P(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \{ C \cotg \varphi \cdot \text{tr } \mathbf{d}(\mathbf{x}) + \sup_{p \geq 0} \{ p [(|d_1(\mathbf{x})| + |d_2(\mathbf{x})| + |d_3(\mathbf{x})|) \sin \varphi - \text{tr } \mathbf{d}(\mathbf{x})] \} \} dV,$$

gdzie $d_i(\mathbf{x})$ są wartościami głównymi $\mathbf{d}(\mathbf{x})$.

Przy płaskim stanie odkształcenia kryterium to wyraża się w sposób klasyczny: $f(\sigma, \tau) = |\tau| + \sigma \text{tg } \varphi - C$, gdzie σ i τ są odpowiednio składową normalną i styczną wektora naprężeń \mathbf{T} (rys. 2).

W tym przypadku i dla nieciągłych pól prędkości, jeśli U oznacza nieciągłość prędkości na przecięciu linii L i normalnej \mathbf{n} , przyrost nieciągłości mocy dysypowanej wynosi [7]:

$$(2.12) \quad P(U) = \int_L (C \cotg \varphi (U \cdot \mathbf{n}) + \text{Sup}_{p \geq 0} \{p (|U| \sin \varphi - U \cdot \mathbf{n})\}) ds.$$



Rys. 2. Warunek Coulomba dla płaskiego stanu odkształcenia

Ażby $P(U) < \infty$ potrzeba, by U miała składową normalną dodatnią i żeby jej nachylenie α do linii nieciągłości zawierało się między φ a $\pi - \varphi$. W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać wyłącznie układy, dla których $\alpha = \varphi$, a więc gdy będzie zachodzić

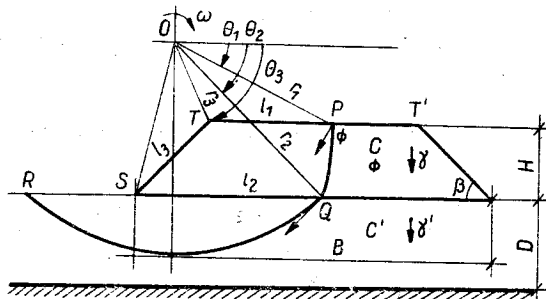
$$(2.13) \quad P(U) = \int_L C \cos \varphi |U| ds.$$

Należy podkreślić fakt, że wzór (2.12) określający $P(U)$ (lub wzór (2.11) określający $P(\mathbf{u})$), jak też warunek nałożony na U , ażeby moc dysypowana pozostała skończona, nie wymagają przyjęcia żadnej hipotezy dotyczącej np. reguł deformacji materiału, lecz są wyłącznie wynikiem dwuznaczności matematycznej kryterium stanu granicznego. Wynika stąd jasno, że nie należy przypisywać jakiegось znaczenia «fizycznego» stosowanemu tu polu prędkości.

3. WSPÓLCZYNNIK ZNISZCZENIA DLA NASYPU

3.1. Wprowadzenie

Niech będzie dany nasyp (rys. 3) jednorodny, położony poza wodą, o wysokości H , szerokości podstawy B , o danym nachyleniu stoku ($\text{tg } \beta$). Odpowiednim kryterium stanu granicznego jest kryterium Coulomba: spójność C , kąt tarcia wewnętrznego φ . Gęstość nasypu wynosi γ . Nasyp położony jest na gruncie jednorodnym idealnie spoistym (kryterium stanu granicznego Treski): spójność bez drenażu C' , gęstość gruntu γ' . Całość oparta jest na podłożu nieodkształcalnym o głębokości D . Problem polega na wyznaczeniu lub oczasowaniu współczynnika określonego w punkcie 2.3 dla rozpatrywanej tu budowli.



Rys. 3. Przekrój nasypu i założony mechanizm

3.2. Postać współczynnika zniszczenia

Wzory (2.11) i (2.12) na $P(\mathbf{u})$ i $P(\mathbf{U})$ pokazują, że dla całego systemu, $P(\mathbf{u})$ będzie złożony z dwu wyrazów liniowych odpowiednio względem C i C' ; z drugiej strony $P_e(\mathbf{u})$ będzie sumą dwu wyrazów liniowych odpowiednio względem γ i γ' . Przeprowadzając analizę wymiarową problemu stwierdza się, że współczynnik zniszczenia konstrukcji $F(\mathbf{Q})=F(\gamma, \gamma')$ musi mieć postać

$$(3.1) \quad F(\gamma, \gamma') = \frac{C'}{\gamma H} f(C/C', \gamma/\gamma', B/H, D/H, \beta, \varphi).$$

3.3. Dyskusja

Wykorzystując ogólną zależność (2.10) można stwierdzić, że jeśli $F(\gamma, \gamma') < 1$, to nasyp jest na pewno niestateczny. Ponadto postać (3.1) współczynnika $F(\gamma, \gamma')$ pozwala przypisać mu dwie proste interpretacje fizyczne:

1. *Współczynnik gęstości nasypu.* Przypuśćmy, że $F(\gamma, \gamma') > 1$; nie można wtedy nic powiedzieć odnośnie do stateczności nasypu. Ale jeśli rozważyć ten sam pod względem geometrycznym nasyp — z tymi samymi parametrami wytrzymałościowymi, ale z gęstościami γ i γ' pomnożonymi przez czynnik $K > F(\gamma, \gamma')$ (co daje $\gamma_1 = K\gamma$ i $\gamma'_1 = K\gamma'$), to można stwierdzić, że ten nowy nasyp będzie z pewnością niestateczny: rzeczywiście, ze wzoru (3.1) otrzymuje się

$$F(\gamma_1, \gamma'_1) = F(\gamma, \gamma')/K < 1.$$

Dla zrozumienia tej interpretacji wystarczy odwołać się do doświadczenia z wirowką, gdzie zniszczenie osiąga się przez stopniowe zwiększenie γ i γ' przy zachowaniu stałej wartości stosunku γ/γ' .

2. *Współczynnik spójności podłoża gruntu.* Podobnie, jeśli wychodząc od nasypu, dla którego $F(\gamma, \gamma') > 1$, rozpatrzy się inną budowlę podobną z punktu widzenia cech geometrycznych i sił masowych, której parametry wytrzymałościowe są zmodyfikowane przez podzielenie C oraz C' przez $K > F(\gamma, \gamma')$ — tak że nowe spójności

wynoszą $C_1=C/K$ oraz $C'_1=C'/K$ — to można stwierdzić, że nowy nasyp będzie niestateczny: rzeczywiście, dla nowej budowli mamy

$$F(\gamma, \gamma') = F(\gamma, \gamma')/K < 1.$$

W końcu można w pewnym sensie interpretować F jako współczynnik wysokości budowli. Rzeczywiście, jeśli dla budowli określonej przez parametry $H, B, D, \gamma, \gamma', C, C', \varphi$ mamy $F > 1$, to można stwierdzić, że budowla określona przez $(KH, KB, KD, \gamma, \gamma', C, C', \varphi)$ przy $K > F$ — jest niestateczna. Należy zauważyć, że chodzi o budowlę geometrycznie podobną do poprzedniej, tzn., że szerokość podstawy jest również pomnożona przez K .

4. OSZACOWANIE WSPÓLCZYNNIKA ZA POMOCĄ KONKRETYCH PÓL PRĘDKOŚCI

4.1. Określenie górnego oszacowania współczynnika F

Dla oszacowania współczynnika F wykorzystujemy typ pola nieciągłego przedstawionego na rys. 3: obrót bloku $PQRST$ wokół O ; PQ jest spiralą logarytmiczną względem φ , QR jest kołem.

Wygodnie jest zdefiniować pole prędkości tego typu przez trzy parametry $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ pokazane na rysunku. Kąty odmierzane są w kierunku pokazanym na rysunku. Równanie linii nieciągłości PQR ma postać

$$r(\theta) = r_1 \exp(\theta - \theta_1) \operatorname{tg} \varphi, \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2)$$

$$r(\theta) = r_1 \exp(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{tg} \varphi, \quad \theta \in (\theta_2, \pi - \theta_2).$$

Przyjmując

$$a = \exp(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{tg} \varphi, \quad b = a \sin \theta_2 - \sin \theta_1,$$

można pokazać, że

$$(4.1) \quad \frac{H}{r_1} = b, \quad r_3 = r_1 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_3}, \quad \frac{l_1}{r_1} = \frac{\sin(\theta_3 - \theta_1)}{\sin \theta_3},$$

$$\frac{l_2}{r_2} = \frac{1}{a} (b \cotg \beta + a \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cotg \theta_3), \quad \frac{l_3}{r_3} = \frac{b}{\sin \beta} \frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_1}.$$

Jeśli obszar $PQRST$ pozostaje sztywny, to tylko nieciągłość prędkości $\omega r(\theta)$ wchodzi do wzoru na moc dysypowaną. Tworzy ona kąt φ ze styczną do linii nieciągłości PQ i kąt zerowy z kołem QR ($\varphi' = 0$). Można więc obliczyć moc dysypowaną wychodząc ze wzoru (2.13):

$$P = \omega C' r_1^2 \left[\frac{C}{2C' \operatorname{tg} \varphi} (a^2 - 1) + (\pi - 2\theta_2) a^2 \right].$$

Moc oddziaływań zewnętrznych związanych z grawitacją jest zerowa dla gruntu podłoża, ogranicza się więc ona do mocy bloku $PQST$ w ruchu; dla mocy tej można napisać

$$\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \gamma \omega r_1^3 \left[\dot{g} \triangle_{OPQ} + \dot{g} \triangle_{OQS} - \dot{g} \triangle_{OTS} - \dot{g} \triangle_{OPT} \right],$$

przy czym każdy wyraz \dot{g} odpowiada wskazanemu we wzorze wycinkowi:

$$\begin{aligned}\dot{g}_{OPQ} &= \frac{1}{3(1+9\operatorname{tg}^2\varphi)} [a^3(\sin\theta_2+3\operatorname{tg}\varphi\cos\theta_2) - \sin\theta_1 - 3\operatorname{tg}\varphi\cos\theta_1], \\ \dot{g}_{OPT} &= \frac{l_1}{6r_1} \sin\theta_1 \left(2\cos\theta_1 - \frac{l_1}{r_1}\right), \\ \dot{g}_{OQS} &= \frac{a^3 l_2}{6r_2} \sin\theta_2 \left(2\cos\theta_2 - \frac{l_2}{r_2}\right), \\ \dot{g}_{OTS} &= \frac{\sin^3\theta_1}{\sin^3\theta_3} \frac{l_3}{6r_3} \left(2\cos\theta_3 - \frac{l_3}{r_3}\cos\beta\right) \sin(\theta_3+\beta).\end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów (4.1) można napisać

$$\frac{P}{Q \cdot q} = \frac{C'}{\gamma H} f^+(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \varphi, \beta, C/C'),$$

skąd F^+ , majoranta F , ma postać

$$(4.2) \quad F^+ = \frac{C'}{\gamma H} \min_{\theta_1, \theta_2, \theta_3} f^+.$$

Można jednak zredukować liczbę parametrów do dwu. Analitycznie minimum określone jest przez równanie $\partial f^+ / \partial \theta_3 = 0$.

Niech będzie

$$(4.3) \quad \sin\theta_1 \operatorname{cotg}\theta_3 = \frac{1}{2} b \operatorname{cotg}\beta,$$

albo też

$$(4.3') \quad r_1 \sin\theta_1 \operatorname{cotg}\theta_3 = \frac{1}{2} H \operatorname{cotg}\beta.$$

Oznacza to, że O położone jest na prostej normalnej do płaszczyzny podstawy przecinającej stok w połowie ($\dot{g}_{OTS} = 0$ rys. 3).

Korzystając z (4.2) i (4.3) otrzymuje się

$$(4.4) \quad F^+ = \frac{C'}{\gamma H} \min_{\theta_1, \theta_2} f^+$$

z dwoma warunkami geometrycznymi

$$\frac{D}{H} \geq \frac{a}{b} (1 - \sin\theta_2), \quad \frac{B}{H} \geq \frac{3}{2} \operatorname{cotg}\beta + \frac{1}{b} \cos\theta_1,$$

które oznaczają odpowiednio, że P zawarte jest między T i T' oraz że okrąg nie przecina podstawy. Minimalizacja wymaga użycia maszyny liczącej.

4.2. Dyskusja

Jak pokazano w punkcie 2.3, znaczenie przypisane F zachowuje się również dla F^+ . Ponadto zgodnie z (4.4), $F^+(\gamma, \gamma')$ przyjmuje oczywiście postać analogiczną do postaci (3.1) dla $F(\gamma, \gamma')$. Wynika stąd, że interpretacje F przedstawione w punkcie 3.3 są ważne dla F^+ , a więc F^+ można uważać za: 1) współczynnik gęstości nasypu, 2) współczynnik spójności gruntu podłoża.

Między innymi, biorąc pod uwagę postać wykorzystywanych pól prędkości, można przypisać $F^+(\gamma, \gamma')$ interpretację podobną do tej, która została podana dla współczynników powszechnie używanych.

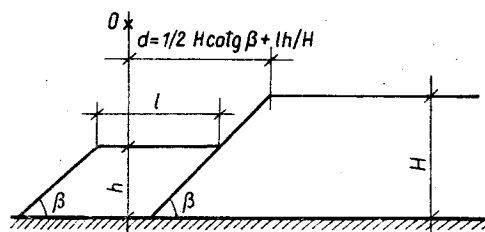
Rzeczywiście, dzieląc licznik i mianownik $F^+(\gamma, \gamma')$ przez ω , tzn. przez prędkość kątową bloku $PQRST$, otrzymuje się:

w liczniku $P(\mathbf{u})/\omega = P(\mathbf{U})/\omega$, tj. moment »dysypujący« wzdłuż linii nieciągłości;

w mianowniku $\mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{u})/\omega$, tj. moment sił zewnętrznych (sił motorycznych). Minimalizacja względem θ_1 i θ_2 daje »linię słabości« scharakteryzowaną przez najmniejszą wartość stosunku momentu »dysypującego« do momentu motorycznego.

4.3. Przypadek nasypu wyposażonego w umocnienia pomocnicze (nasypy pomocnicze)

Dla zapewnienia stateczności nasypu, który wydaje się niepewny, stosuje się często nasypy pomocnicze przy nasypie głównym (rys. 4). Zakłada się, że ich charakterystyki mechaniczne i nachylenie stoku są te same, co nasypu głównego. Ich wysokość wynosi h , a szerokość l .



Rys. 4. Nasyp schodkowy dwustopniowy

Po rozpatrzeniu nasypu głównego, jako nasypu niezależnego, rozpatruje się tą samą metodą układ: nasyp główny-nasypy pomocnicze. W tym celu wystarczy w wyrażeniu na moc sił zewnętrznych dołączyć wyraz odpowiadający ciężarowi nasypów pomocniczych, które tworzą przeciwwagę. Należy więc dołączyć do mianownika wzoru określającego f^+ wyraz

$$\dot{q}_b = \frac{lh}{H^2} b^3 \left(\frac{1}{b} \sin \theta_1 \cotg \theta_3 - \cotg \beta - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{H} - \frac{h}{H} \cotg \beta \right) \right).$$

Analitycznie minimum określone jest przez równanie

$$\frac{\partial F^+}{\partial \theta_3} = 0$$

albo

$$\sin \theta_1 \cotg \theta_3 = \frac{1}{2} b \cotg \beta + \frac{lh}{H^2} b,$$

albo też

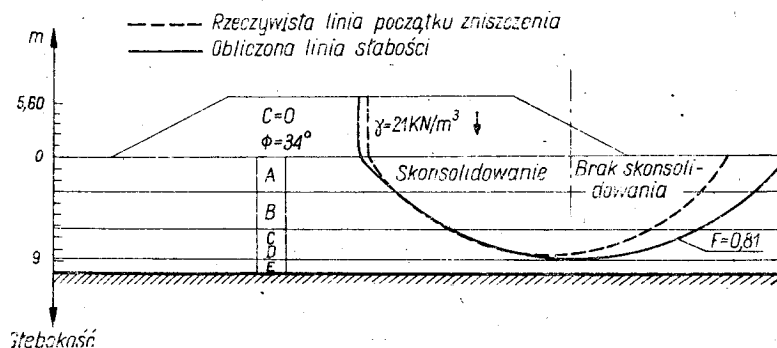
$$r_1 \sin \theta_1 \cotg \theta_3 = \frac{1}{2} H \cotg \beta + \frac{lh}{H}.$$

Symbol O umieszczone jest na prostej normalnej do płaszczyzny podstawy (rys. 4) w odległości lh/H od prostej określonej uprzednio dla nasypu głównego.

5. ZASTOSOWANIE DO RZECZYWISTEGO PRZYPADKU ZNISZCZENIA

Celem dalszych rozważań jest pokazanie prostego zastosowania przedstawionej metody.

Zniszczenie i naprawa nasypu, który badaliśmy, przedstawione są w pracy [9]. (Postawionym problemem było tam rozpatrzenie przecięcia doliny la Dives⁽²⁾ przez nasyp autostrady normandzkiej). Grunt podłoża złożony jest z pięciu warstw (rys. 5): 1) warstwa A z gliniastych ilów, 2) B z czarnego torfu, 3) C z glin ilastych, 4) D z glin piaszkowych oraz 5) E z gęstych torfów ilastych.



Rys. 5. Nasyp z Dives

Charakter gruntu wymagał, aby nastąpiło jej utwardzenie przez odleżenie się nasypu grubości 3,25 m w ciągu jednego roku. Po tej fazie kontynuowano dalsze prace. Nasyp przerwał się przy osiągnięciu wysokości 5,60 m. Stwierdzono 3 metrowe załamanie w osi nasypu i zgrubienie o wysokości 1 m w odległości około 30 m od osi. Wiercenia pozwoliły na zbadanie charakteru zniszczenia: warstwy A, B, C, D zdeformowały się, podczas gdy zachowanie stałej grubości warstwy E pozwoliło stwierdzić, że powierzchnia pęknięcia doszła do podstawy warstwy D.

Przeprowadzono pomiary spójności pod nasypem w strefie niezdeformowanej i w zgrubieniu; stwierdzono występowanie najlepszych parametrów pod nasypem w wyniku konsolidacji.

(²) 20 km na wschód od Caen (Calvados, Francja).

Przedstawiona metoda daje się łatwo adoptować do przypadku, w którym parametry charakterystyczne gruntu nie są jednorodne poziomo i pionowo: wystarczy uwzględnić zmiany w spójnościach różnych warstw we wzorze na moc dysypowaną. Co do zjawiska konsolidacji, to ujęto je schematycznie przez przypisanie największych zmierzonych wartości częściom warstw położonych pomiędzy dwoma prostymi przebiegającymi w połowie stoku (rys. 5).

Otrzymany współczynnik zniszczenia wynosi 0,81 i jasno wskazuje na niestaceczność nasypu. Linia słabości przedstawiona jest na rysunku za pomocą linii ciągłej. Widać, że biegnie ona w sąsiedztwie linii prawdopodobnego występowania pęknięcia zgodnie z definicją podaną w [9]. Ponadto uderzający jest fakt, że pomimo czysto matematycznego charakteru (por. punkt 2.4) warunku nałożonego na nieciągłość prędkości, otrzymany mechanizm zjawiska wydaje się dość dobrze opisywać zaobserwowane zjawisko fizyczne, a szczególnie przebieg linii prawdopodobnego występowania pęknięcia w korpusie nasypu: linia ta jest praktycznie prostą pionową i przypomina pęknięcie, wzdłuż którego tworzy się rozszczepienie.

6. PORÓWNANIE Z METODAMI TRADYCYJNYMI

6.1. Uwagi ogólne

Jak już podkreślano w punkcie 2, proponowana metoda opiera się wyłącznie na znajomości kryterium stanu granicznego gruntu stanowiącego tworzywo budowli. W szczególności takie własności gruntu, jak na przykład jego prawo odkształcenia, nie wchodzi do rozważań w żadnej fazie.

Zauważono przy tym, że dla gruntu, opisywanego przez kryterium stanu granicznego Coulomba — mechanizmy ruchu bloków sztywnych pociągają za sobą powstawanie nieciągłości prędkości wraz z przesuwaniem się bloków względem siebie.

Można by sobie wyobrazić badania stateczności takich budowli opierając się na teorii zachowania się gruntu typu teorii ROSCOE [10] czy ROWE'GO [11], lecz wydaje się, że zastosowania praktyczne takich teorii na razie nie wchodzi w rachubę.

Tradycyjne metody analizy stateczności nasypów utrzymane są w duchu kinematycznych rozważań podobnie jak metoda stanów granicznych, ale wykorzystują mechanizmy ruchu bloków sztywnych z kołową linią poślizgu w gruncie podstawy i w nasypie. Ten typ mechanizmu zjawiska bywa uważany za bardziej »fizyczny«, chociaż z trudem można przy jego wykorzystaniu wyznaczyć obserwowaną linię pęknięcia w korpusie nasypu. Przypomnienie głównych rezultatów metody stanów granicznych sformułowanej w punkcie 2 pozwoli natychmiast zrozumieć trudności napotymane przy zastosowaniu tych metod i wyjaśnić ich różne postaci.

Rzeczywiście, wzór (2.12) na $P(U)$ pokazuje, że moment »dysypujący« wzdłuż kołowej linii poślizgu w nasypie przy $\varphi \neq 0$ jest nieskończony. W ten sposób wszystkie metody wykorzystujące ten typ linii pęknięcia, przez przyjęcie odpowiednich hipotez na tym czy innym poziomie rozważań, zmierzają do otrzymania skończonej wartości na moment oporu sił tarcia wzdłuż linii pęknięcia. Jest oczywiście, że zna-

czenie współczynnika »bezpieczeństwa« otrzymanego takimi metodami nie jest tak jasne, jak znaczenie $F(\gamma, \gamma')$.

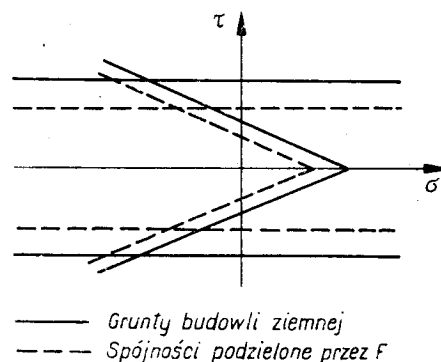
W metodach, które można określić jako globalne, w przeciwieństwie do metod warstw, w których blok będący w ruchu jest podzielony na paski (»dyskretyzowany«), próbuje się rozwiązać tę trudność przez przyjęcie mniej lub bardziej realistycznych hipotez dotyczących rozkładu naprężeń, które wytworzyłoby się wzdłuż linii potencjalnego pęknięcia. Jest to typ metod proponowanych przez TAYLORA [6], CAQUOTA i KERISELA [4] oraz BIAREZA [12]. W metodach określanymi jako metody pasków, hipotezy dotyczące tego rozkładu są bardziej ukryte, gdyż są one milcząco przyjęte przez wykorzystanie równań równowagi opartych na hipotezach dotyczących sił, które działają na poziomie warstw. Dobrym przykładem metody ostatniego typu z linią kołową czy dowolną jest praca [13].

Jeśli chodzi o wykorzystanie linii pęknięcia w kształcie spirali w problemach tego typu, to należy wspomnieć, że RENDULIC [5] zbadał tę klasę mechanizmów, DRUCKER i PRAGER [14] podali ich jasną interpretację, a CHEN [15] je usystematyzował; we wszystkich tych pracach rozpatrywano nasyp spoczywający na gruncie podstawy o tych samych charakterystykach (por. również prace HUANGA i AVERY'EGO [16]): metoda tutaj zaproponowana wychodzi poza te zbyt ograniczające ramy ze względów praktycznych i wykorzystuje mechanizmy złożone, podobnie jak to zaproponowano w [17].

6.2. Współczynniki spójności i wytrzymałości całkowitej

Jak już powiedziano, współczynnik $F(\gamma, \gamma')$ może być interpretowany jako współczynnik spójności gruntu podstawy; inaczej mówiąc, zniszczenie zachodzi dla gruntu podstawy wyczerpując cały kąt karcia wewnętrznego φ (i kąt $\varphi' = 0$) i tylko ułamek $1/F$ jego spójności (rys. 6).

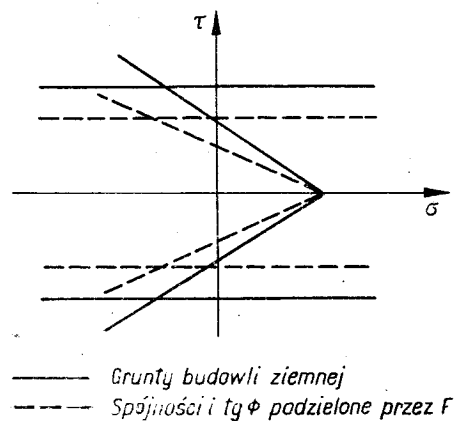
Ten typ współczynnika jest równoważny współczynnikowi określonego metodą koła φ Taylora.



Rys. 6. Współczynnik pewności ze względu na spójność

Zazwyczaj preferuje się wykorzystanie współczynnika określonego jako współczynnik »wytrzymałości całkowitej«: budowla, dla której występuje zniszczenie, otrzymywana jest z konstrukcji rzeczywistej przez pomnożenie przez $1/F$ spójności nasypu i gruntu podstawy oraz tangensa kąta tarcia wewnętrznego nasypu (rys. 7) ⁽³⁾.

Współczynnik tego typu otrzymuje się łatwo metodami warstw; trudniej go otrzymać metodami globalnymi, ponieważ wymaga to rachunku iteracyjnego [16]. Zgodnie z zaproponowaną tutaj metodą postępuje się w sposób następujący:



Rys. 7. Współczynnik wytrzymałości całkowitej

Ustala się *a priori* pewną wartość F_0 współczynnika wytrzymałości całkowitej i bada się stateczność budowli za pomocą charakterystyk C'/F_0 , C/F_0 i $\text{tg } \varphi/F_0$.

Jeśli $F(\gamma, \gamma') < 1$, to można stwierdzić, że współczynnik zniszczenia wytrzymałości całkowitej jest mniejszy niż F_0 .

Można więc będzie dla danej konstrukcji przyjąć za wartość współczynnika zniszczenia wytrzymałości całkowitej wartość F_0 taką, żeby dla konstrukcji scharakteryzowanej przez C'/F_0 , C/F_0 i $\text{tg } \varphi/F_0$ otrzymać $F(\gamma, \gamma') = 1$. Podobnie dla F_0^+ w odniesieniu do $F^+(\gamma, \gamma')$.

Określenie F_0^+ osiągnie się stosunkowo łatwo metodą dychotomii biorąc pod uwagę fakt, że obliczenie $F^+(\gamma, \gamma')$ jest bardzo szybkie.

6.3. Porównanie rezultatów otrzymanych różnymi metodami

TAYLOR [6], a później CHEN [15] porównali różne metody ⁽⁴⁾. Porównanie to wykonane zostało dla przypadku, w którym grunt podstawy miał te same charakterystyki co nasyp o nieskończonych B i D . Nie mając więc żadnych ograniczeń geo-

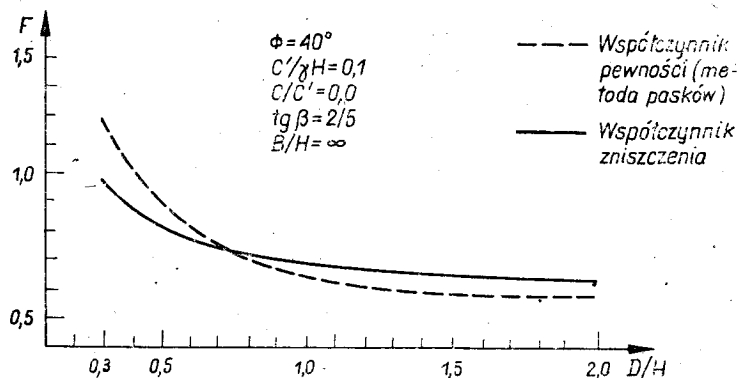
⁽³⁾ Inaczej mówiąc, ciśnienie spójności ($C \text{ ctg } \varphi$) każdego gruntu jest zachowane

⁽⁴⁾ W pracy [6] jako metodę warstw stosuje się metodę Felleniusa [12] i metodę spirali Rendulica. W pracy [15] metoda warstw nie jest bliżej określona, a stosowana metoda spirali to metoda Chena.

metrycznych obliczają oni krytyczny stability number $\gamma H/C$ taki, że jeśli parametr badanego nasypu jest od niego większy, to następuje pęknięcie. W obu przypadkach różnice pomiędzy rezultatami otrzymanymi za pomocą różnych metod są zbyt małe, aby mogły być znaczące.

Dla przykładu porównano rezultaty otrzymane metodą współczynnika pęknięcia z wartościami współczynnika bezpieczeństwa podanymi w nomogramach PILOTA i MOREAU [18], wykonanych przy zastosowaniu metody warstw BISHOPA [3].

Dla wartości parametru $C'/\gamma H > 0,1$ współczynnik zniszczenia i współczynnik bezpieczeństwa otrzymany z metody warstw nie są niezgodne: obydwa są większe od 1. Porównanie okazuje się szczególnie interesujące dla małych wartości parametru $C'/\gamma H$: na rys. 8 widać, że dla $0,3 < D/H < 0,4$, gdy $C'/\gamma H = 0,1$, metoda warstw daje współczynnik bezpieczeństwa większy od 1, podczas gdy oszacowanie F^+ współczynnika pęknięcia jest mniejsze od 1 i zniszczenie nasypu jest pewne. Ten typ porównań wydaje się odpowiadać doświadczeniom praktycznym, w których przypisuje się różne poziomy ufności współczynnikowi bezpieczeństwa, zależnie od wartości pewnych parametrów charakteryzujących grunt.



Rys. 8. Porównanie metod

W Dodatku 2 można znaleźć nomogramy majoranty F^+ jako funkcji stosunku D/H dla różnych wartości innych parametrów i dla wartości 0,1 współczynnika $C'/\gamma H$. Ze względu na liniowość F^+ jako funkcji tego ostatniego parametru, będzie można stąd określić F^+ dla jego dowolnej wartości przy niezmiennych wartościach wszystkich innych parametrów.

7. WNIOSKI

Metoda stanów granicznych, chociaż nie uwzględnia złożonego zachowania się gruntu, wydaje się być prostym i praktycznym narzędziem badania stateczności budowli ziemnych. Metoda tu przedstawiona jest dobrą ilustracją tego faktu. Po-

zwala ona zdefiniować współczynnik zniszczenia o jasno określonym znaczeniu, który można w przybliżeniu wyznaczyć łatwo i małym nakładem pracy: w istocie, dla każdego mechanizmu ruchu bloków sztywnych wyrażenie współczynnika zniszczenia dane jest w sposób jawny, a minimalizacja tej funkcji dwu zmiennych programuje się bardzo łatwo i wymaga niewiele czasu (2 do 3 sekund na IBM 370). Metoda daje się łatwo dostosować do różnych przypadków praktycznych. Ponadto wydaje się, że linie słabości pęknięcia otrzymane tą metodą opisują dobrze rodzaje pęknięć obserwowane w konkretnych przypadkach rzeczywistych. Otrzymano więc w ten sposób metodę zdolną co najmniej uzupełnić metody tradycyjne; jej łatwość stosowania i taniaść, ewentualnie za cenę pewnych uproszczeń geometrycznych, czynią ją użytecznym narzędziem kontroli.

DODATEK 1. METODA KINEMATYCZNA

Jeśli Ω wytrzymuje Q , to istnieje σ , które równoważy Q i spełnia (2.5). Stosując zasadę mocy wirtualnych do σ i Q otrzymuje się dla całego pola prędkości u kinematycznie dopuszczalnych

$$(1) \quad \forall u \quad Q \cdot \dot{q}(u) = \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma(x) \cdot d(x)) dV,$$

gdzie $d(x)$ jest tensorem odkształcenia indukowanego w punkcie x przez u .

Rozszerzając drugi wyraz w (1) na wszystkie pola σ^* spełniające (2.5), znajdziemy

$$\forall u \quad Q \cdot \dot{q}(u) \leq \sup_{\sigma^*(x)} \left\{ \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma^*(x) \cdot d(x)) dV \left| \begin{array}{l} \sigma^* \text{ równoważny } Q, \\ f(x; \sigma^*(x)) \leq 0 \quad \forall x \end{array} \right. \right\},$$

a stąd

$$\forall u \quad Q \cdot \dot{q}(u) \leq \int_{\Omega} \sup_{\sigma^*(x)} \{ \text{tr}(\sigma^*(x) \cdot d(x)) \mid f(x; \sigma^*(x)) \leq 0 \} dV.$$

Ta ostatnia nierówność pokazuje, że

$$(2) \quad \Omega \text{ wytrzymuje } Q \Rightarrow \forall u \quad Q \cdot \dot{q}(u) \leq P(u),$$

gdzie

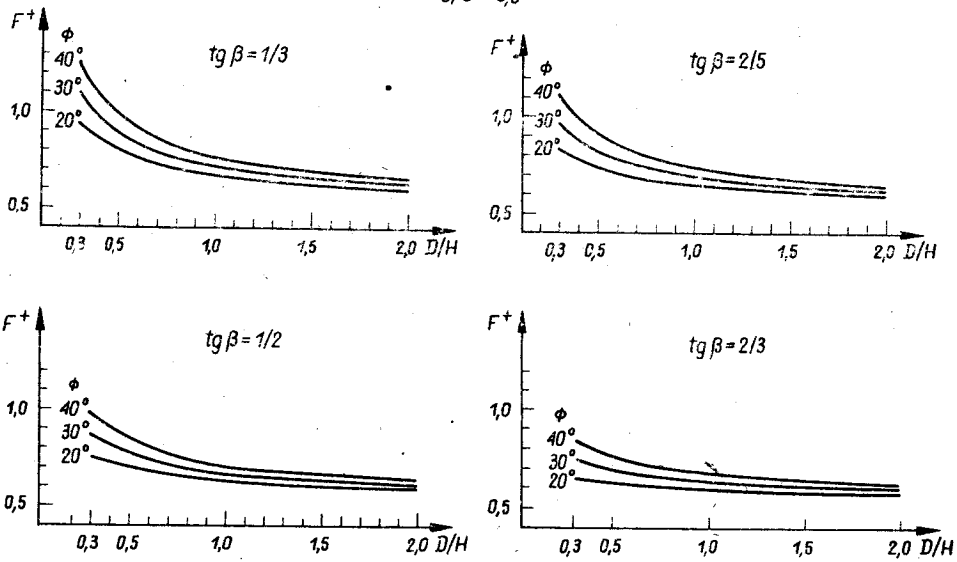
$$P(u) = \int_{\Omega} \pi(x; d(x)) d\Omega;$$

$\pi(x; d(x))$ dane jest wzorem (7).

Korzystając z zależności (2) wyprowadzamy twierdzenie kinematyczne: $\exists u$ kinematycznie dopuszczalne: $Q \cdot \dot{q}(u) > P(u) \Rightarrow \Omega$ nie wytrzymuje Q .

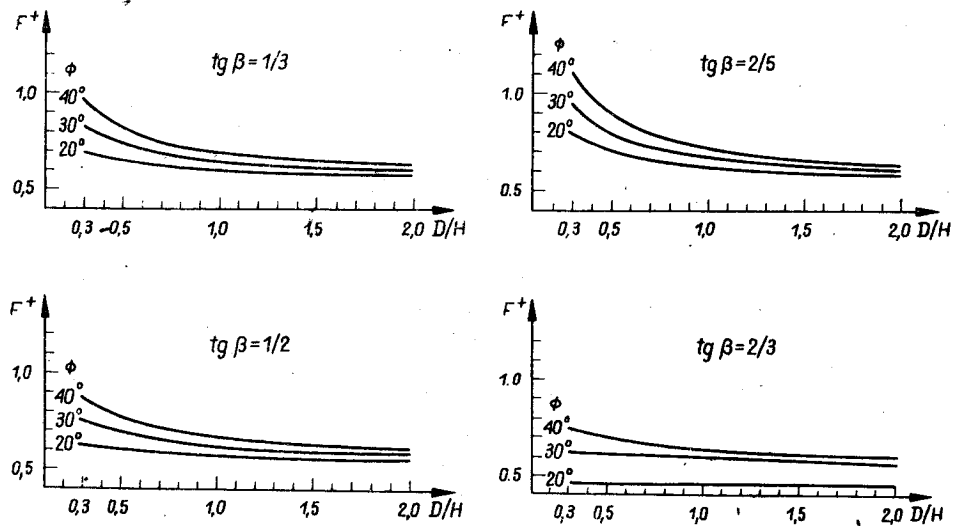
DODATEK 2. WYNIKI OBLICZEŃ

$B/H = +\infty$
 $C'/\gamma H = 0,1$
 $C/C' = 0,5$



Rys. 9

$B/H = +\infty$
 $C'/\gamma H = 0,1$
 $C/C' = 0$



Rys. 10

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. C. A. COULOMB, *Sur une application des règles de maximis and minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, Mémoires présentés à l'Académie des Sciences, 1773.
2. W. FELLENIUS, *Calculation of stability of earth dams*, Paper D-48, 2nd Congress on Large Dams, Washington 1936.
3. A. W. BISHOP, *The use of the slip circle in the stability analysis of slopes*, *Geotechn.*, **5**, 1, 7-17, 1954.
4. A. CAQUOT, J. KERISEL, *Traité de mécanique des sols*, 4ème édition, Gauthier-Villars, Paris 1966.
5. L. BENDULIC, *Ein Beitrag zur Bestimmung der Gleitsicherheit*, *Der Bauingenieur*, 19/20, 1935.
6. D. W. TAYLOR, *Stability of earth slopes*, *J. Boston Soc. Civil Engng.*, **24**, 3, 337-386, 1937.
7. J. SALENÇON, *Calcul à la rupture et plasticité*, E. N. P. C., Paris 1977.
8. D. C. DRUCKER, *Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems*, *J. Mech. Phys. Sol.*, **1**, 4, 217-226, 1953.
9. J. P. MAGNAN, G. PILOT, J. VAUTRAIN, *Traversée en remblai de la vallée de la Dives par l'auto route de Normandie*, *Bull. des liaisons des Ponts et Chaussées*, 81, L. C. P. C., Paris 1976.
10. K. H. ROSCOE, *The influence of strains in soils mechanics*, 10th Rankine lecture, *Géotechn.*, **20**, 2, 129-170, 1970.
11. P. W. ROWE, *Stress dilatancy, earth pressure and slopes*, *J. Soil Mech. Edns. Div. A. S. C. E.*, **89**, SM3, 37-61, 1963.
12. J. BIAREZ, *Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols et matériaux pulvérulents*, Th. Dr. es Sc., Grenoble 1968.
13. P. RAULIN, A. TOUBOL, G. ROUQUES, *Calcul de la stabilité des pentes en rupture non circulaire*, *Rapport de Recherche*, 36, L. C. P. C., Paris 1974.
14. D. C. DRUCKER, W. PRAGER, *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*, *Quart. Appl. Math.*, **10**, 157-165, 1952.
15. W. F. CHEN, *Limit analysis and soil plasticity*, *Development in Geotechnical Engng.*, **7**, Elsevier, 399-445, 1975.
16. Y. H. HUANG, C. M. AVERY, *Stability of slopes by logarithmic special method*, *J. of the Geotech. Engng. Div., A. S. C. E.*, **102**, GT1, 1976.
17. K. KARAL, *Energy method for soil stability analyses*, *J. Geotech. Engng. Div., A. S. C. E.*, **102**, GT1, 1977.
18. G. PILOT, M. MOREAU, *La stabilité des remblais sur sols mous. Abaques de calcul*, Eyrolles, Paris 1973.

SUMMARY

APPLICATION OF THE LIMIT STATE ANALYSIS TO THE EMBANKMENT STABILITY PROBLEM

Theory of limit state of a mechanical system is based upon the strength criterion of the material used. Starting from the kinematic theorem we may define the damage factor which has a simple meaning: if the factor is less than 1, failure of the system occurs under the action of the loads applied. The factor may easily be evaluated or estimated on the basis of the kinematic approach of the general theory.

In this paper a method is developed enabling to estimate that factor in a simple way (suitable for numerical calculations) in the case of embankment stability. The method is applied to a real case of embankment failure and the obtained description of the phenomenon seems to be highly.

Finally, on the basis of the exact analysis of strength, the necessity and applicability of the hypotheses introduced here is discussed. The results are compared with the traditional solutions.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИЗА ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НАСЫПЕЙ

Теория прочностного анализа механической системы опирается на знания только прочностного критерия определяющего материала. Исходя из кинематической теоремы, можно определить коэффициент разрушения, значение которого очень ясно; когда этот коэффициент меньше чем 1, тогда наступает разрушение системы под влиянием приложенных нагрузок. Этот коэффициент может быть легко поределен или оценен, опираясь на кинематический подход общей теории.

Для проблемы поведения насыпей развивается здесь метод, позволяющий оценить этот коэффициент простым и легким образом для применения при использовании численных методов: приведены тоже номограммы. Этот метод применен для реального случая разрушения насыпи и кажется, что получено очень хорошее описание наблюдаемого типа разрушения.

Наконец, опираясь на точную теорию прочностного расчета, анализируется и объясняется необходимость принятия введенных гипотез при использовании традиционных методов: проведено сравнение результатов обоих методов.

LABORATORIUM MECHANIKI GRUNTÓW, PALAISEAU, FRANCJA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 sierpnia 1977 r., ostateczna wersja — dnia 14 marca 1979 r.