43

Mise en forme des métaux et alliages

•

Ecole d'Eté de Métallurgie Physique
de Villars-sur-Ollon
(Suisse)

Septembre 1975

organisée par :

P. AVENAS, B. BAUDELET, P. PARNIÈRE, G. SERTOUR et A. ZAOUI

•

Textes rassemblés par Bernard BAUDELET

Préface de Charles CRUSSARD

Extrait

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

CHAPITRE XII

MÉTHODE DES LIGNES DE GLISSEMENT

J. SALENCON
Ecole Polytechnique
Laboratoire de Mécanique
91120 Palaiseau

Ce chapitre est consacré à l'exposé de la méthode dite des lignes de glissement dans le cas de la déformation plane, pour ses applications aux problèmes de mise en forme des métaux. On étudie le cas des matériaux obéissant aux critères de plasticité de von Mises ou de Tresca (équivalents dans ce cas).

On traite d'abord le problème pour les contraintes dans les zones plastiques, aboutissant aux équations de Hencky et aux procédés pratiques de construction de solutions soit par voie numérique, soit par voie graphique. On résout ensuite le problème pour les vitesses au moyen des équations de Geiringer ou en construisant l'hodographe.

Un exemple d'application sur le problème de l'extrusion est donné, à propos duquel la question de la signification des solutions ainsi construites est introduite, et le rôle des hypothèses initiales sur la zone déformée, mis en évidence.

On donne enfin l'interprétation de la méthode au moyen des théorèmes de l'analyse limite.

Abstract

This chapter is devoted to a presentation of the slip-line field method in the case of plane strain. As the scope of the book is the study of problems related to metal forming processes, only Tresca's or von Mises' materials will be considered.

Firstly it is dealt with the determination of the stress-field in the plastic regions. Hencky's equations are obtained making it possible to construct the solution either by numerical or graphical means. Then the velocity field is considered and it is shown that it may be determined by using Geiringer's equations or by constructing the hodograph graphically.

As an example, the study of an extrusion process is made using the slip-line field method and it induces the question of the significance of the solutions so-obtained, pointing out the importance of the hypotheses made when starting the resolution of the problem, as concerns the plastic regions themselves.

The interpretation of the method through the use of the theorems of limit analysis is finally given.

XII.1 – Présentation

On regroupe sous le nom de méthode des lignes de glissement l'application, à l'étude des procédés de mise en forme dans le cas présent, de la théorie des équilibres limites pour le matériau rigide parfaitement plastique, en déformation plane (ou en symétrie axiale dans certaines hypothèses), sous tous ses aspects.

Le trait fondamental de cette méthode est qu'elle fait intervenir la construction géométrique, soit par voie graphique, soit par voie numérique, d'un réseau de lignes, souvent appelées lignes de glissement, qui permettent d'obtenir contraintes et vitesses dans les zones plastiques. Outre la commodité du point de vue du calcul, ces lignes présentent aussi l'avantage de visualiser en quelque sorte l'écoulement plastique, ce qui permet, lorsque l'on a à imaginer la solution d'un problème, de faire appel à l'intuition mécanique ou aux constatations expérimentales.

La méthode des lignes de glissement apparaît comme une méthode puissante d'étude des problèmes de formage, mais relativement difficile : une bonne pratique est nécessaire avant de se sentir réellement à l'aide dans son utilisation.

S'agissant d'une méthode d'étude qui traite du matériau rigide parfaitement plastique, l'interprétation des résultats obtenus se fait en se référant aux deux théorèmes fondamentaux de l'analyse limite, théorème statique, et

théorème cinématique, fondements des méthodes extrémales.

La méthode des lignes de glissement est un moyen de construire des champs de vitesses ou des champs de contraintes convenables pour l'utilisation de ces théorèmes. Le plus couramment, les solutions ainsi proposées ressortissent à l'approche cinématique de la théorie des charges limites, c'est-à-dire à la méthode de la borne supérieure.

Dans le présent chapitre, on se bornera, pour la simplicité, à exposer la méthode des lignes de glissement dans le cas de la déformation plane et pour le matériau rigide parfaitement plastique de Tresca ou de von Mises. Des présentations plus générales se trouvent dans de nombreux ouvrages classiques [par exemple : 7, 9, 10, 11, 12, 13].

XII.2 – Fondements de la théorie des équilibres limites plans.

La théorie des équilibres limites en déformation plane repose sur la constatation suivante :

– pour un problème d'écoulement plastique libre en déformation plane, pour un matériau rigide parfaitement plastique de Tresca ou de von Mises, le champ de contraintes dans les zones déformées peut être déterminé indépendamment du champ des vitesses.

XII.2.1 – Propriétés du tenseur des contraintes dans les zones déformées.

En effet, s'agissant du matériau rigide parfaitement plastique, les zones déformées sont nécessairement plastiques ; le critère de plasticité de Tresca ou de von Mises y est satisfait.

$$f([\sigma]) = 0 \tag{2.1}$$

avec

$$\begin{cases} f([\sigma]) = \text{Max}\,(\sigma_i - \sigma_j - \sigma_0) \\ i = \text{I}, \text{II}, \text{III} \\ j = \text{I}, \text{II}, \text{III} \end{cases} \tag{2.2}$$

pour le matériau de Tresca,

$$f([\sigma]) = \frac{1}{2}\, tr\, [s]^2 - \frac{\sigma_0^2}{3} \tag{2.3}$$

pour le matériau de von Mises ;

σ_0 est le seuil de plasticité en traction simple, les σ_i sont les contraintes principales, $[s]$ est le déviateur de $[\sigma]$

$$[s] = [\sigma] - \frac{1}{3}(tr\,[\sigma]) \,.\, [\delta]$$

L'hypothèse de la déformation plane parallèle à $0xy$ signifie que les composantes u, v, w de la vitesse sont de la forme :

$$u = u(x,y)\,,\; v = v(x,y)\,,\; w = 0. \tag{2.4}$$

Il s'ensuit que le tenseur vitesse de déformation $[\dot{\epsilon}]$ est plan.

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}\,,\; \dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),\; \dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial z} \tag{2.5}$$

autres $\qquad \dot{\epsilon}_{ij} = 0\,.$

Pour les matériaux considérés, la règle d'écoulement plastique satisfait le principe du travail maximal (règle de normalité)

$$[\dot{\epsilon}] = \lambda \frac{\partial f}{\partial [\sigma]} \qquad \lambda \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Pour le matériau de Tresca :

$[\dot{\epsilon}]$ a mêmes directions principales que $[\sigma]$ et, en ordonnant les contraintes principales suivant $\sigma_{\text{I}} \geqslant \sigma_{\text{III}} \geqslant \sigma_{\text{II}}$ on a :

$$\dot{\epsilon}_{\text{I}} = \lambda\,,\; \dot{\epsilon}_{\text{II}} = -\lambda\,,\; \dot{\epsilon}_{\text{III}} = 0 \quad,\quad \lambda \geqslant 0 \tag{2.7}$$

dans le cas $\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}} = +\sigma_0$ et $\sigma_{\text{I}} > \sigma_{\text{III}} > \sigma_{\text{II}}$ et on a :

$$\dot{\epsilon}_{\text{I}} = \lambda + \mu\,,\; \dot{\epsilon}_{\text{II}} = -\lambda\,,\; \dot{\epsilon}_{\text{III}} = -\mu \quad,\quad \lambda\,,\mu \geqslant 0 \tag{2.8}$$

dans le cas $\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}} = \sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{III}} = \sigma_0$,

$$\dot{\epsilon}_{\text{I}} = \lambda \quad \dot{\epsilon}_{\text{II}} = -\lambda - \mu\,,\; \dot{\epsilon}_{\text{III}} = \mu \quad,\quad \lambda\,,\mu \geqslant 0 \tag{2.9}$$

si

$$\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}} = \sigma_{\text{III}} - \sigma_{\text{II}} = \sigma_0$$

Il résulte alors de cette règle et de (2.5) que l'hypothèse de la déformation plane impose que $0z$ est direction principale pour $[\sigma]$ si $[\dot{\epsilon}] \neq 0$ et alors, nécessairement, σ_{zz} est contrainte principale intermédiaire : $\sigma_{zz} = \sigma_{\text{III}}$. Autrement dit, les contraintes principales dans le plan sont contraintes principales extrêmes $\sigma_{\text{I}} > \sigma_{\text{II}}$, et le critère de plasticité (2.2) est à écrire entre les contraintes principales dans le plan $0xy$

$$f([\sigma]) = \sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}} - \sigma_0$$

ou encore, en introduisant les composantes de $[\sigma]$ dans le plan $0xy$:

$$\left[\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \sigma_{xy}^2\right]^{1/2} - \frac{\sigma_0}{2} \tag{2.10}$$

Pour le matériau de von Mises :

(2.6) donne alors :

$$[\dot{\epsilon}] = \lambda\,[s] \qquad \lambda \geqslant 0 \tag{2.11}$$

Avec cette règle, l'hypothèse de la déformation plane implique, si $[\dot{\epsilon}] \neq 0$, que $0z$ est direction principale pour les contraintes et que $s_z = 0$ soit :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

et :

$$\frac{2}{3}\sigma_{zz} - \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_{zz} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \tag{2.12}$$

Le critère de plasticité (2.3) pourra donc s'écrire en fonction des trois composantes de $[\sigma]$ dans le plan $0xy$, par substitution de (2.12), d'où :

$$f([\sigma]) = \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \sigma_{xy}^2 - \frac{\sigma_0^2}{3} \qquad (2.13)$$

ou encore de façon équivalente :

$$f([\sigma]) = \left[\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \sigma_{xy}^2\right]^{1/2} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \qquad (2.13b)$$

– En introduisant k, limite d'élasticité en cission simple, (2.10) et (2.13b), prennent la même forme:

$$f([\sigma]) = \left[\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \sigma_{xy}^2\right]^{1/2} - k \qquad (2.14)$$

qui exprime que le rayon du cercle de Mohr des contraintes dans le plan $0xy$ doit être inférieur à la *limite d'élasticité en cission simple.* On a donc toujours dans le plan un critère de Tresca (fig. XII.1).

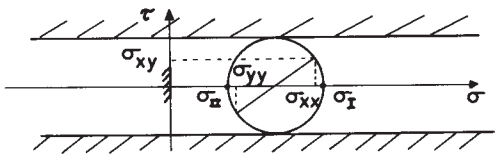


Fig. XII.1. – Critère de Tresca dans le plan

NB : Ce résultat est général pour les problèmes de déformation plane dans le cas de matériaux isotropes dont le critère de plasticité est indépendant de la contrainte hydrostatique $[\delta]\frac{tr\,[\sigma]}{3}$, et qui obéissent au principe du travail maximal.

XII.2.2 – Equations pour les contraintes dans les zones déformées

Comme on l'a vu, dans les zones déformées on a :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$$

(conséquence de l'isotropie du matériau) ; il s'ensuit que *les équations* dynamiques du problèmes se réduisent à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho X = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho Y = 0 \end{cases} \qquad (2.15)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho Z = 0 \qquad (2.16)$$

où X , Y , Z désignent les composantes des forces de masse.

Dans le cas des problèmes de mise en forme des métaux qui nous intéressent ici, celle-ci sont, en règle générale, négligeables : on fera : X = Y = Z = 0.

Dans les zones déformées, *le critère de plasticité* sous la forme (2.14) est atteint :

$$\left[\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \sigma_{xy}^2\right]^{1/2} - k = 0\,. \qquad (2.17)$$

On voit ainsi que, dans les zones déformées, on dispose des trois équations (2.15) et (2.17) pour la détermination des trois fonctions inconnues σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} · A partir de conditions aux limites sur σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} , fonctions uniquement de x et y on pourra déterminer :

$$\sigma_{xx}(x, y)\,,\ \sigma_{xy}(x, y)\,,\ \sigma_{yy}(x, y)$$

et $\sigma_{zz}(x, y)$ par (2.12) dans le cas du critère de Mises, qui satisfait bien (2.16).

XII.2.3 – Equations pour les vitesses dans les zones déformées

La détermination du champ de vitesses dans la solution du problème d'équilibre limite, ne présente ensuite pas de difficulté.

Dans les zones non déformées, on a affaire à un mouvement rigidifiant qui est déterminé par les conditions aux limites.

Dans les zones déformées, où le champ de contraintes est déterminé indépendamment, l'application de la règle d'écoulement fournit :

Pour le matériau de Tresca :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{\mathrm{I}} = \lambda \\ \dot{\epsilon}_{\mathrm{II}} = -\lambda \end{cases}, \quad \lambda \geqslant 0 \qquad (2.18)$$

valeurs principales de $[\dot{\epsilon}]$ dans le plan.

Pour le matériau de von Mises :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{\mathrm{I}} = \lambda\, s_{\mathrm{I}} \\ \dot{\epsilon}_{\mathrm{II}} = \lambda\, s_{\mathrm{II}} \end{cases} \quad \lambda \geqslant 0 \qquad (2.19)$$

soit compte tenu de $s_z = s_{\mathrm{III}} = 0$ et de $\sigma_{\mathrm{I}} > \sigma_{\mathrm{II}}$.

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{\mathrm{I}} = \lambda \\ \dot{\epsilon}_{\mathrm{II}} = -\lambda \end{cases} \quad \lambda \geqslant 0 \qquad (2.18)$$

mêmes équations que pour le matériau de Tresca.

Ainsi, le tenseur plan $[\dot{\epsilon}]$ dont les composantes dans les axes $0xy$ sont :

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}\,,\ \dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),\ \dot{\epsilon}_{yy} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

(2.20)
- a mêmes directions principales que $[\sigma]$
- est de trace nulle,
- admet pour direction d'extension maximale, la direction de traction maximale.

Ces conditions fournissent un système de deux équations aux dérivées partielles permettant de déterminer

$u(x, y)$ et $v(x, y)$, et une condition de positivité que doit vérifier la solution.

NB : Les résultats ci-dessus sont valables pour les problèmes de déformation plane dans le cas de matériaux isotropes dont le critère de plasticité est indépendant de la contrainte hydrostatique $[\delta]\dfrac{tr[\sigma]}{3}$, et qui obéissent au principe du travail maximal. On remarque que (2.18) ou (2.20) expriment que dans le plan $(0xy)$, la vitesse de déformation $[\dot{\epsilon}]$ satisfait la règle de normalité avec le critère de Tresca.

XII.2.4 – Application de ces résultats

Les résultats énoncés ci-dessus concernent la solution du problème d'écoulement libre. Ils intéressent le champ de contraintes dans la zone déformée. Leur application à la recherche de cette solution présente la difficulté évidente que *la* (ou les) *zone déformée n'est pas connue à l'avance.*

Aussi, la méthode des lignes de glissement consiste à :

– se donner a priori la localisation de la zone déformée (intuition mécanique, constatations expérimentales).

– y calculer le champ de contraintes par (2.15) et (2.17) à partir des conditions aux limites en contraintes : la frontière de la zone déformée comporte toujours une partie de la frontière du système où les contraintes sont prescrites, et grâce à une propriété mathématique (caractère hyperbolique) du système (2.15), (2,17), ceci détermine les contraintes dans tout un domaine.

– calculer le champ de vitesse.

Puisque *une hypothèse est faite a priori* sur la localisation de la zone déformée, il va de soi qu'elle *doit être testée a posteriori,* c'est-à-dire que l'on doit pouvoir choisir entre les résultats obtenus à partir d'hypothèses initiales différentes. On sait, d'autre part, que le matériau rigide parfaitement plastique n'a de signification rigoureuse que du point de vue des théorèmes de l'analyse limite. Ces deux remarques sont convergentes : l'interprétation des solutions fournies par la méthode des lignes de glissement est à faire au moyen des théorèmes de l'analyse limite.

XII.3 – Equilibres limites plans : Problèmes pour les contraintes dans les zones déformées

XII.3.1 – Transformation des équations

Pour les contraintes dans le plan $0xy$, les équations du problème sont les équations (2.15) et (2.17) soit dans le cas de forces de masse nulles :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \qquad (3.2)$$

$$\left[\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \sigma_{xy}^2\right]^{1/2} - k = 0 \qquad (3.3)$$

Le matériau est, dans toute la suite, supposé homogène. Les formules sont modifiées, mais la méthode demeure, en cas de non-homogénéité.

On transforme ces équations en utilisant la substitution de Maurice Lévy. Posant :

$$-p = (\sigma_{\mathrm{I}} + \sigma_{\mathrm{II}})/2 = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 \qquad (3.4)$$

(abscisse du centre du cercle de Mohr) (fig. XII.2)

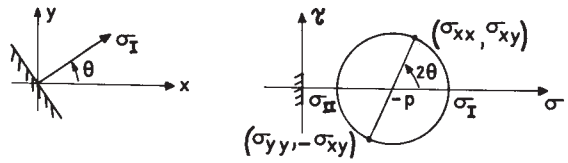


Fig. XII.2. – Notations.

$$\mathrm{R} = (\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{II}})/2 = \left[\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2}{4} + \sigma_{xy}^2\right]^{1/2} \qquad (3.5)$$

(rayon du cercle de Mohr),

$$\theta = (0x\ ,\ \sigma_{\mathrm{I}}) \qquad (3.6)$$

(angle de la direction de traction maximale avec $0x$), on a :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -p + \mathrm{R}\cos 2\theta \\ \sigma_{yy} = -p - \mathrm{R}\cos 2\theta \\ \sigma_{xy} = \mathrm{R}\sin 2\theta \end{cases} \qquad (3.7)$$

Avec ces nouvelles fonctions inconnues, (3.3) s'écrit simplement :

$$\mathrm{R} = k \qquad (3.8)$$

et en substituant les expressions (3.7), compte tenu de (3.3), dans (3.1), (3.2) on n'a plus à traiter qu'un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre pour les deux fonctions inconnues p et θ de x et y :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} - 2k\sin 2\theta\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + 2k\cos 2\theta\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial y} + 2k\cos 2\theta\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + 2k\sin 2\theta\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad (3.9)$$

La détermination du champ de contraintes dans la zone déformée est donc ramenée à la résolution de (3.9), à partir de conditions aux limites sur les contraintes, donc sur p et θ.

XII.3.2 – Relations de Hencky

Considérons alors, pour un champ de contraintes solution de (3.8) et (3.9), au point courant M de la zone déformée, les directions Mα et Mβ des facettes sur lesquelles s'exerce la cission maximale. D'après la théorie du cercle de Mohr (cf. formule (3.7)), cette cission maximale est égale à k (compte tenu de (3.8)), et s'exerce sur les facettes inclinées à $\mp\pi/4$ sur σ_{I} (fig. XII.3). Nous adopterons la convention d'orientation

$$(M\alpha\,,\,M\beta) = +\,\pi/2 \qquad (3.10)$$

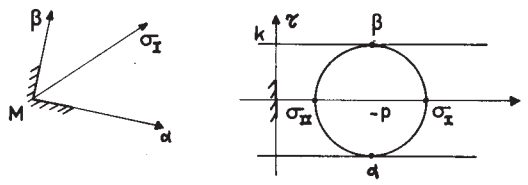


Fig. XII.3. – Facettes de cission maximale.

En effectuant sur les équations de (3.9) les deux combinaisons linéaires indépendantes définies par les coefficients $-\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ et $-\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ d'une part, $-\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ d'autre part, on obtient le système équivalent :

$$\left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right](p + 2k\theta) = 0$$

$$\left[-\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right](p - 2k\theta) = 0$$

En désignant par $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ et $\frac{\partial}{\partial x^\beta}$ les dérivées selon les directions α et β, ce système s'écrit simplement :

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(p + 2k\theta) = 0 \qquad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}(p - 2k\theta) = 0 \qquad (3.12)$$

D'où l'énoncé :

le système (3.9) est équivalent à la propriété suivante : le long des lignes de cission maximale, lignes α et β dont la pente est en chaque point

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta \mp \pi/4)$$

le champ de contraintes satisfait les relations différentielles.

$$\begin{cases} dp + 2k\,d\theta = 0 & \text{lignes } \alpha \\ dp - 2k\,d\theta = 0 & \text{lignes } \beta \end{cases} \qquad (3.13)$$

Les relations (3.13) sont appelées *relations de Hencky.* Elles s'intègrent de façon évidente en :

$$\begin{cases} p + 2k\theta = C^{te} & \text{le long d'une ligne } \alpha \\ p - 2k\theta = C^{te} & \text{le long d'une ligne } \beta \end{cases} \qquad (3.14)$$

NB : En suivant la signification mécanique du raisonnement ci-dessus, on voit que les relations de Hencky expriment les équations d'équilibre en zone plastique dans le système de coordonnées curvilignes défini par les lignes de cission maximale. On retrouve d'ailleurs (3.11) et (3.12) par un raisonnement élémentaire en écrivant l'équilibre du petit élément représenté à la figure XII.4.

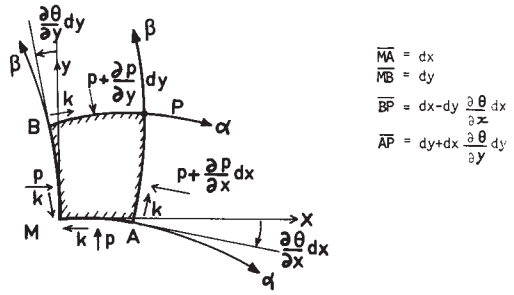


Fig. XII.4. – Equilibre d'un petit élément limité par des lignes de cission maximale

XII.3.3 – Utilisation des relations de Hencky

On a mis en évidence l'existence de deux familles de lignes géométriques réelles qui dépendent de la solution du problème, et le long desquelles est satisfaite une relation différentielle pour les contraintes.

Du point de vue mathématique, cela correspond au fait que le problème pour les contraintes dans les zones plastiques est *hyperbolique quasi-linéaire ;* les lignes α et β sont appelées *lignes caractéristiques pour les contraintes.*

Cette propriété se revèle très avantageuse en ce qui concerne la construction et le calcul numérique de la solution $(p\,,\,\theta)$ à partir de données au contour.

En effet, supposons connus p et θ sur un arc de courbe AB (fig. XII.5) (Problème de Cauchy)

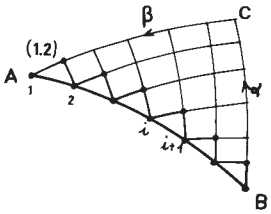


Fig. XII.5. – Problème de Cauchy.

θ étant connu, on connaît en chaque point de AB les directions des caractéristiques α et β. Le calcul de la solution se fera alors en général de façon approchée en discrétisant l'arc AB, découpé en n intervalles. Les caractéristiques issues des points $1\,,\,2\,..\,i\,,\,..\,,\,n+1$ sont assimilées à leurs tangentes, d'où une première détermination approchée des nœuds $(1,2)\,(2,3)\,,\,...\,(i\,,\,i+1)\,,\,...\,(n\,,\,n+1)$ du réseau de caractéristiques. Passant aux différences finies pour les relations de Hencky, on détermine les valeurs de p et θ en ces nœuds. Une ou plusieurs itérations éventuelles permettent d'améliorer la construction géométrique et les valeurs de p et θ. Le résultat obtenu est d'autant meilleur que le maillage est plus serré.

Le processus indiqué est valable dans la mesure ou AB n'est pas lui-même un arc cractéristique, i.e , le long de AB

$$\frac{dy}{dx} \neq \operatorname{tg}\left(\theta \mp \frac{\pi}{4}\right)$$

S'il en est bien ainsi, la construction précédente, sans constituer une démonstration rigoureuse, montre que les données de p et θ sur AB déterminent la solution dans

tout le triangle ABC limité par les caractéristiques intérieures issues de A et B : c'est le théorème de Cauchy.

Dans le cas où AB est un arc caractéristique, les données p et θ doivent satisfaire la relation de Hencky correspondante. La solution du problème pour les contraintes à partir de ces données est alors indéterminée.

Outre le problème de Cauchy, on rencontre dans la construction des solutions les deux problèmes représentés aux figures XII.6 et XII.7.

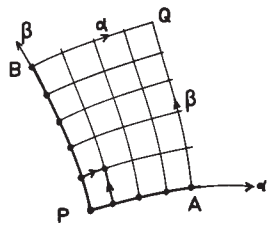


Fig. XII.6. – Problème de Riemann.

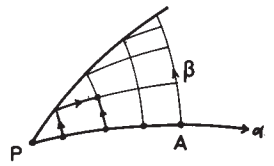


Fig. XII.7. – Problème de Goursat.

Dans le problème de Riemann, p et θ sont connus sur deux arcs de caractéristiques orthogonaux PA et PB, et satisfont les relations de Hencky sur ces arcs : la solution est déterminée dans le quadrilatère limité par les arcs donnés PA et PB, et les caractéristiques AQ et BQ issues des extrêmités A et B. Le procédé de calcul par discrétisation est schématisé sur la figure XII.6.

On peut d'ailleurs remarquer que, pour ce problème, puisque les données sur PA et PB doivent satisfaire les relations de Hencky, il suffit en fait de se donner les arcs géométriques PA et PB, et la valeur de p en un point, P par exemple. Ainsi que cela apparaîtra encore plus clairement au XII.3.4 (théorème de Hencky), la construction du réseau de caractéristiques est alors un problème *purement géométrique.*

Dans le problème de Goursat, p et θ sont connus sur un arc de caractéristique PA et satisfont la relation de Hencky correspondante, et une relation entre p et θ est imposée le long d'une courbe non caractéristique issue de P. La solution est déterminée dans le domaine triangulaire limité par la courbe donnée, PA, et l'autre caractéristique issue de A.

Il résulte de ce qui précède que la construction de la solution (p, θ) du problème pour les contraintes, s'identifie à la construction du réseau de lignes caractéristiques pour les contraintes. Une fois le réseau construit, p est déterminé par (3.14) à une constante additive près fixée par les conditions aux limites.

Pour des raisons qui apparaîtront au § XII.5.1, les lignes caractéristiques pour les contraintes (lignes de cission maximale) sont aussi appelées lignes de glissement.

XII.3.4 – Quelques champs simples

Les solutions le plus souvent rencontrées dans les problèmes de formage, sont construites à partir de quelques réseaux de caractéristiques simples que nous allons présenter :

* – *Champ homogène*

Le couple :

$$p = \text{constante} \quad , \quad \theta = \text{constante}$$

constitue évidemment une solution des équations de Hencky (3.14).

Le champ de contraintes est alors homogène. Le réseau de lignes caractéristiques est formé, dans le domaine correspondant, de deux familles de droites orthogonales. (fig. XII.8).

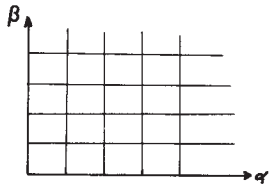
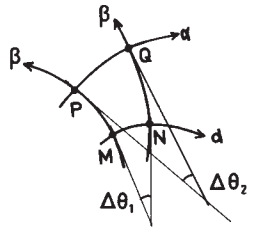


Fig. XII.8. – Champ homogène.

* – *Théorème de Hencky*

Les relations de Hencky sous la forme (3.14) permettent de démontrer la propriété géométrique suivante, connue sous le nom de premier *théorème de Hencky* (fig. XII.9).



$$\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2$$

Fig. XII.9. – Théorème de Hencky.

Considérons deux caractéristiques fixes de la famille β (resp. α) et soit une caractéristique α(resp. β) variable ; alors, la variation de θ entre les points d'intersection de cette caractéristique α avec les deux caractéristiques β est indépendante de la caractéristique α choisie.

En effet, avec les notations de la figure XII.9, et en appliquant (3.14) on a :

$$P_M + 2\,k\,\theta_M = P_N + 2\,k\,\theta_N \qquad (+)$$

$$P_Q + 2\,k\,\theta_Q = P_P + 2\,k\,\theta_P \qquad (+)$$

$$P_M - 2\,k\,\theta_M = P_P - 2\,k\,\theta_P \qquad (-)$$

$$P_Q - 2\,k\,\theta_Q = P_N - 2\,k\,\theta_N \qquad (-)$$

dont on tire, en effectuant la combinaison linéaire indiquée entre parenthèses :

$$\theta_M + \theta_Q = \theta_N + \theta_P$$

soit :

$$\Delta\theta_1 = \theta_N - \theta_M = \theta_Q - \theta_P = \Delta\theta_2 \qquad (3.15)$$

Un réseau de courbes orthogonales possédant cette propriété est appelé *réseau de Hencky*.

Le théorème de Hencky a en particulier pour conséquence que si une caractéristique α est rectiligne dans sa portion comprise entre deux caractéristiques β, toutes les caractéristiques α sont rectilignes dans le domaine limité par ces deux caractéristiques β. (resp. β , α).

D'une façon générale, le théorème de Hencky montre que la résolution du problème de Riemann, qui revient à construire un réseau de Hencky à partir des deux caractéristiques données PA et PB, est un problème purement géométrique, dont la résolution ne dépend pas de la valeur de p prescrite au point P. La donnée de PA et PB détermine totalement le réseau de Hencky PAQB.

* – *Champ semi-homogène*

On appelle champ de contraintes *semi-homogène* un champ dans lequel *une des familles de caractéristiques* est formée de lignes droites.

Le fait qu'un tel champ puisse être une solution du problème pour les contraintes découle du théorème de Hencky : ce sera, par exemple, le champ obtenu dans la résolution du problème de Riemann à partir d'un arc de caractéristique α rectiligne, PA.

Par application de (3.14), p sera constant le long de chacune des droites. De plus, si l'on suppose par exemple que les caractéristiques α sont rectilignes, alors

$$p - 2\,k\,\theta = C^{te}$$

dans tout le champ semi-homogène (resp. β et $p + 2\,k\,\theta = C^{te}$).

Du point de vue géométrique, on a affaire à une famille de droites à un paramètre (par exemple, l'abscisse curviligne de leur point d'intersection avec une caractéristique fixe de l'autre famille), qui ont donc une enveloppe (fig. XII.10). Un cas particulier est celui où l'enveloppe se

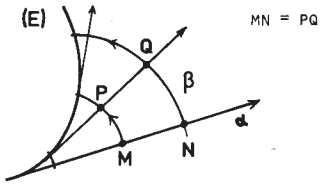


Fig. XII.10. – Champ semi-homogène.

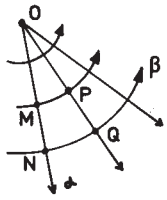


Fig. XII.11. – Eventail de Prandtl.

réduit à un point (droites passant par un point fixe), soit 0, les caractéristiques de l'autre famille sont des cercles centrés en 0 , 0 apparaissant lui-même comme une caractéristique dégénérée de la deuxième famille : on a alors affaire à la singularité de Prandtl ou *éventail de Prandtl :* on remarque qu'au point 0 , p et θ ont une détermination multiple (fig. XII.11).

XII.3.5 – Raccordement continu de champs de contraintes

On a vu au § XII.3.3, en traitant des trois problèmes aux limites fondamentaux, que les domaines de détermination de la solution continue sont limités par les arcs de données et par les caractéristiques issus des extrémités de ces arcs.

Il s'ensuit que si dans la construction d'une solution il se révèle nécessaire (c'est en fait toujours le cas) de raccorder, en respectant la continuité de p et θ, des champs définis par des problèmes aux limites différentes, *cela ne peut se faire que le long de caractéristiques.* On réalise alors la continuité des fonctions p et θ, mais il peut y avoir discontinuité des dérivées normales.

Dans le cas d'un champ homogène, le raccord continu avec un autre champ s'effectuera le long d'une caractéristique rectiligne, ce dont il résulte par application du théorème de Hencky que ce deuxième champ sera nécessairement semi-homogène : si le raccord s'effectue le long d'une caractéristique α par exemple, le champ semi-homogène sera à caractéristiques α rectilignes. De même, un champ semi-homogène ne peut se raccorder le long d'une caractéristique rectiligne, qu'à un champ semi-homogène.

XII.3.6 – Remarque sur la signification mécanique des équations de Hencky

On a indiqué au § XII.3.2, que les relations de Hencky expriment l'équilibre en zone plastique en utilisant un système de coordonnées curvilignes particulier.

On peut énoncer, concernant ces relations, une propriété beaucoup plus puissante, souvent connue sous le nom de théorème de Bonneau.

Soit (C) une ligne de cission maximale à l'intérieur du solide plan étudié. Alors, sans faire l'hypothèse que (C) se trouve à l'intérieur d'une zone plastique, on démontre que pour qu'un champ de contraintes puisse exister, en équilibre et respectant le critère de plasticité de part et d'autre de (C) et qui satisfasse la continuité de la contrainte sur (C), il est nécessaire que le long de (C) l'équation de Hencky correspondante (c'est-à-dire α ou β suivant le signe de la cission) soit satisfaite.

Il en résulte en particulier que, dans les mêmes conditions, une enveloppe de lignes caractéristiques (par exemple rectilignes) ne peut pas se trouver à l'intérieur du solide.

XII.4 – Equilibres limites plans : Problèmes pour les vitesses dans les zones déformées

XII.4.1 – Equations de Geiringer

Le problème en contraintes dans les zones déformées étant résolu, on se propose de passer à la détermination du champ de vitesses.

Les équations pour les vitesses ont été données de façon générale au § XII.2.3.

$$\begin{cases} [\dot{\epsilon}] \text{ et } [\sigma] \text{ ont mêmes directions principales,} \\ \dot{\epsilon}_{\mathrm{I}} = -\dot{\epsilon}_{\mathrm{II}} = \lambda \geqslant 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Comme pour le problème en contraintes, il est commode d'écrire la règle d'écoulement (4.1) en utilisant le système de coordonnées curvilignes défini par les lignes caractéristiques des contraintes, qui sont connues puisque le champ de contraintes est connu (fig. XII.12).

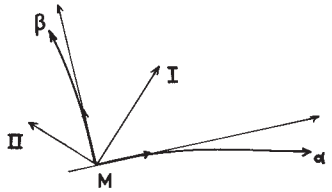


Fig. XII.12. – Coordonnées curvilignes en M

On obtient immédiatement :

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} = 0 \tag{4.2}$$

$$\dot{\epsilon}_{\beta\beta} = 0 \tag{4.3}$$

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \dot{\epsilon}_{\beta\alpha} = \lambda \geqslant 0 \tag{4.4}$$

Autrement dit, *les directions α et β sont directions d'extension nulle, et la distorsion $\epsilon_{\alpha\beta}$ est non négative.*

Il est d'usage d'introduire les coordonnées v_α, v_β, de la vitesse $\vec{u}$ suivant la base normée tangente aux lignes caractéristiques.

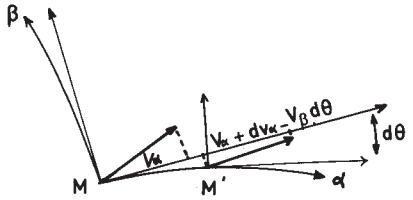


Fig. XII.13. – Obtention des équations de Geiringer.

Pour écrire (4.2) en utilisant ces coordonnées, il est commode de remarquer que (4.2) signifie que les projections sur $\vec{e_\alpha}$ vecteur tangent en M à Mα, de la vitesse en M et de la vitesse en M' infiniment voisin de M sur Mα, sont égales. On procède de façon analogue pour (4.3), et on obtient les relations différentielles :

$$dv_\alpha - v_\beta \; d\theta = 0 \quad \text{le long d'une ligne } \alpha \tag{4.5}$$

$$dv_\beta + v_\alpha \; d\theta = 0 \quad \text{le long d'une ligne } \beta \tag{4.6}$$

Ces relations sont connues sous le nom de *relations de Geiringer.* La condition de positivité (4.4) s'écrit :

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} - v_\beta \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} = 2\,\lambda \geqslant 0 \tag{4.7}$$

XII.4.2 – Remarques sur la signification des équations de Geiringer

Les équations de Geiringer expriment que le champ de vitesse $\vec{u}$ est à divergence nulle, c'est-à-dire qu'il y a invariance du volume, et qu'il admet pour directions orthogonales d'extension nulle, les directions de cission maximale du champ de contraintes.

La condition (4.7) impose de plus que la direction d'extension maximale, coïncide avec la direction de la plus grande traction (et non avec celle de la plus grande compression). Il s'ensuit que la puissance du champ de contraintes, dans le champ de vitesse, est non négative en tout point.

D'autre part, les lignes α et β apparaissent comme des lignes géométriques réelles le long desquelles les composantes de la vitesse satisfont une relation différentielle. A la différence de ce qui se produisait pour les contraintes, ces lignes sont indépendantes de la solution en vitesse. Ceci traduit le fait qu'une fois le problème pour les contraintes résolu, le problème pour les vitesses est hyperbolique linéaire, et admet pour lignes caractéristiques les mêmes courbes que le problème pour les contraintes.

Enfin, il est intéressant de remarquer que pour tout problème plan de plasticité pour le matériau rigide parfaitement plastique, lorsque le problème pour les contraintes peut être résolu indépendamment, le problème pour les vitesses apparaît ensuite, même si la règle d'écoulement ne vérifie pas le principe du travail maximal, comme un système de deux équations aux dérivées partielles linéaires pour les deux fonctions inconnues u et v des deux variables x et y. Les caractéristiques de ce problème ne peuvent être, si le potentiel plastique bidimensionnel est régulier, que les directions d'extension nulle : en effet, $[\dot{\epsilon}]$ étant définie par la règle d'écoulement en chaque point à un facteur $\lambda \geqslant 0$ près, ces directions sont les seules à être indépendantes de λ et le long desquelles une relation différentielle (à savoir $\dot{\epsilon} = 0$) est satisfaite. Il s'ensuit que la nature hyperbolique, parabolique ou elliptique du problème pour les vitesses dépend du caractère réel ou imaginaire des directions d'extension nulle. (cf. [8]).

XII.4.3 – Utilisation des équations de Geiringer. Hodographe

Les équations de Geiringer permettent de déterminer le champ des vitesses dans la zone déformée. On procède à l'intégration, le plus souvent numérique, de ces équations à partir des conditions aux limites sur les vitesses en suivant les caractéristiques α et β, qui, à ce stade, sont connues.

Il est à remarquer que, en général, on est amené, pour cette intégration, à cheminer sur le réseau de caractéristiques à l'inverse du sens dans lequel il a été construit.

Une fois la détermination des vitesses effectuée, on doit vérifier si la condition de positivité de λ, (4.7) est satisfaite.

Comme dans de nombreuses autres circonstances en Mécanique, il est commode d'introduire, outre le plan physique (x, y), le plan de l'hodographe (u, v) où chaque point M du plan physique est représenté par son image m, extrémité du vecteur vitesse $\vec{u}$(M) porté à partir d'une origine fixe dans le plan (u, v) :

$$\vec{O}m = \vec{u}(\mathrm{M}) \quad \text{(fig. XII.14)} \tag{4.8}$$

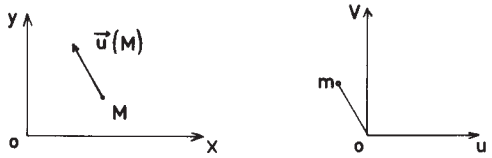


Fig. XII.14. – Hodographe.

Le réseau des lignes caractéristiques (α, β) dans le plan (x, y) a alors pour image un réseau de lignes que nous noterons (a, b).

Les lignes (α, β) étant lignes d'extension nulle (ce qu'expriment, rappelons le, les équations de Geiringer), si M et $M + d\vec{M}$ sont deux points infiniment voisins sur une ligne α (par exemple), $\vec{u}$ et $\vec{u} + d\vec{u}$ les vitesses correspondantes, on a :

$$d\vec{M} \cdot d\vec{u} = 0 , \tag{4.9}$$

soit, d'après la définition de m :

$$d\vec{M} \cdot d\vec{m} = 0 . \tag{4.10}$$

D'où la propriété géométrique :

la direction d'une caractéristique α (resp. β) au point M et la direction de son image a (resp. b) au point m sont orthogonales.

En conséquenc, le réseau image (a, b) vérifie comme le réseau (α, β), le théorème de Hencky.

L'intégration des équations de Geiringer pour la détermination du champ des vitesses est donc ramenée dans le plan de l'hodographe, à la construction d'un réseau de Hencky, en règle générale à partir de la donnée de deux arcs orthogonaux : problème purement géométrique.

De plus, la vérification de la condition de positivité peut, dans certains cas, se faire à vue, en comparant les orientations des réseaux :

$$(\alpha, \beta) \quad \text{et} \quad (a, b) \qquad \text{(cf. 4.12).}$$

XII.5 – Equilibres limites plans : Solutions discontinues

Jusqu'à présent, aussi bien en ce qui concerne les contraintes que les vitesses, il n'a été question que de champs continus. Dans ce paragraphe, nous étudierons d'abord le problème des discontinuités de la vitesse pour une solution continue en contrainte, qui se rencontre dans pratiquement tous les problèmes de formage. Le cas des discontinuités de contraintes, plus rare, sera ensuite évoqué.

XII.5.1 – Discontinuité de vitesse

L'utilisation de champs de vitesses présentant des discontinuités se révèle nécessaire dans l'étude de la plupart des problèmes plans de formage.

Du point de vue physique, le recours à de telles solutions est suggéré par les constatations expérimentales, où l'on voit souvent la déformation se concentrer dans de minces zones qui peuvent être idéalisées comme des lignes de discontinuité de la vitesse.

Du point de vue mathématique, cette idéalisation est permise par la structure des équations du problème pour les vitesses, qui peuvent être interprétées en termes de discontinuité.

Ainsi :

$$\dot{\epsilon}_I = - \dot{\epsilon}_{II}$$

signifie qu'il y a invariance du volume ce qui implique que :

La discontinuité de vitesse est tangente à la ligne de discontinuité.

• La coïncidence des directions principales de $[\dot{\epsilon}]$ et de $[\sigma]$ implique que :

La ligne de discontinuité de vitesse est nécessairement une ligne de cission maximale, α ou β, car d'après le point précédent elle correspond à une déformation de glissement, et représente une direction de cisaillement maximal.

• La ligne de discontinuité étant une ligne de cission maximale, α (par exemple), il s'ensuit que de part et d'autre l'évolution de la vitesse est régie par l'équation de Geiringer correspondante,

$$dv_\alpha - v_\beta \; d\theta = 0 ;$$

v_β étant continue, on obtient par différence pour la discontinuité de vitesse : $[\![v_\alpha]\!] = (v_\alpha)_2 - (v_\alpha)_1$

$$d\,[\![v_\alpha]\!] = 0 \tag{5.1}$$

le long de la ligne de discontinuité ; autrement dit :

La discontinuité de vitesse est constante le long de la ligne.

• La condition de positivité de λ oriente $[\dot{\epsilon}]$ suivant $[\sigma]$; ici, elle fixe l'orientation de la discontinuité :

la discontinuité de vitesse, comptée dans le sens de la ligne de discontinuité α ou β, doit être positive lorsque l'on franchit la ligne de discontinuité en suivant l'autre ligne de cission maximale β ou α :

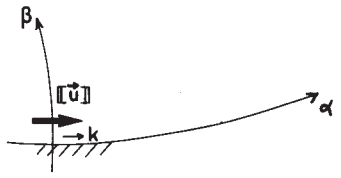


Fig. XII.15. – Discontinuité de vitesse.

Du point de vue physique, cela signifie que la discontinuité de vitesse tangentielle $[\![\vec{u}]\!]$ est orientée comme la cission qu'elle engendre, sur la facette initiale (c'est-à-dire que le frottement est bien résistant).

Sur l'hodographe, la discontinuité de vitesse se traduit par le fait que chaque point M de la ligne a deux images m_1 et m_2 , $\overrightarrow{m_1 m_2}$ est dirigé suivant la tangente à la ligne de discontinuité en M, et est de longueur constante $\forall$M sur la ligne de discontinuité.

Remarque :

Les lignes α et β sont d'abord apparues dans l'étude du problème pour les contraintes, en tant que lignes de cission maximale, et possédant la propriété d'être les caractéristiques du problème pour les contraintes. L'étude du problème pour les vitesses a ensuite montré que ces lignes étaient aussi lignes d'extension nulle, caractéristiques pour les vitesses. Enfin, l'étude ci-dessus a mis en évidence que les lignes α et β étaient les lignes de discontinuité possibles pour la vitesse. C'est cette dernière propriété qui justifie, à proprement parler, le nom de *lignes de glissement (slip-lines* en anglais) utilisé couramment pour qualifier les lignes α et β. Cette dénomination usuelle peut conduire à certaines confusions, notamment du point de vue de l'interprétation des solutions construites (§ XII.7), et certains auteurs lui préfèrent les dénominations spécifiques qui font

bien ressortir, dans chaque cas, à quelles propriétés des lignes α et β il est fait appel.

XII.5.2 – Discontinuité de contrainte

L'utilisation de champs de contraintes discontinus dans la zone déformée se révèle parfois nécessaire pour la construction de la solution de certains problèmes.

A la différence des discontinuités de vitesses, l'introduction de cette notion de discontinuité de contraintes est assez délicate. Nous n'entrerons pas dans le détail de cette question, renvoyant le lecteur à [6, 7, 12] pour une étude plus approfondie. Il en résulte que la ligne de discontinuité doit être considérée comme une zone non plastique, infiniment mince ; ce dont il résulte que du point de vue des déformations, la ligne de discontinuité est inextensible.

Du point de vue mathématique, la structure des équations du problème pour les contraintes permet leur interprétation en termes de discontinuité.

Ainsi :

– le critère de plasticité doit être vérifié par le champ de contraintes, de chaque côté de la ligne de discontinuité.

– la contrainte s'exerçant sur la ligne de discontinuité doit être continue.

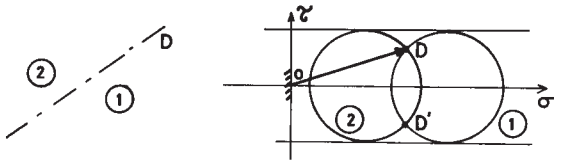


Fig. XII.16. – Discontinuité de contrainte.

En utilisant la représentation de Mohr pour les contraintes, on voit que les états de contraintes de part et d'autre de la ligne de discontinuité sont représentés par deux cercles de rayon k sécants ; la contrainte continue sur la ligne de discontinuité, est représentée par OD ou OD', ce qui fixe la direction de la ligne de discontinuité par rapport aux directions principales.

On voit qu'*il peut y avoir discontinuité du champ de contraintes au franchissement d'une ligne d'orientation quelconque, exceptées les lignes de cission maximale, c'est-à-dire les caractéristiques pour les contraintes.*

Ce résultat est dû au caractère hyperbolique quasi-linéaire du problème pour les contraintes.

Du point de vue des vitesses on démontre que la vitesse $\vec{u}$ est nécessairement continue au franchissement d'une ligne de discontinuité de contraintes. De plus même, la ligne est inextensible et il y a continuité du champ de vitesse de déformation $[\dot{\epsilon}]$ (cf. [6, 12]).

XII.6 – Exemple : Etude d'un problème d'extrusion

A titre d'exemple illustrant la mise en œuvre des résultats présentés jusqu'ici, nous étudierons, dans une géométrie permettant des calculs simples, le problème "d'école" suivant :

Extrusion sans frottement en déformation plane, à travers une filière plane, d'ouverture 2α, le rapport de réduction étant :

$$\rho = \frac{2 \sin \alpha}{1 + 2 \sin \alpha} = \frac{H - h}{H} \qquad (6.1)$$

Les notations du problème sont indiquées sur la figure XII.17. L'extrusion se fait sans conteneur, sous l'action

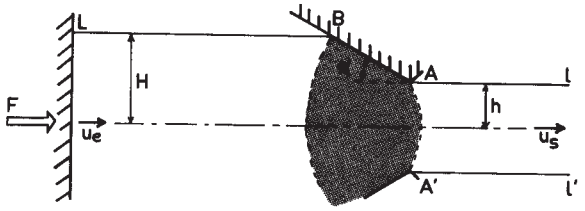


Fig. XII.17. – Extrusion.

d'une force de poussée F, inconnue, et que l'on cherche à déterminer. Le lopin de diamètre 2H à l'entrée a un diamètre 2h à la sortie. Le lopin est animé à l'amont d'une vitesse d'ensemble horizontale $\vec{u}_e$; à l'aval la vitesse de translation horizontale est $\vec{u}_s$. Si la géométrie de la figure XII.17 représente l'écoulement permanent, c'est-à-dire s'il n'y a pas d'écrasement du lopin sur la filière ou de formation "d'écailles" à la surface en sortie, on a évidemment par suite de l'incompressibilité :

$$Hu_e = hu_s \; ; \qquad (6.2)$$

nous nous placerons d'abord dans cette hypothèse.

Comme indiqué au § XII.2.4, on va faire au départ une hypothèse, plus ou moins précise, sur la localisation de la zone déformée. Il paraît conforme au bon sens de supposer que la zone déformée aboutit sous la filière AB. D'autre part, d'après (6.2), il est nécessaire que la zone déformée traverse toute la section du lopin.

Une zone déformée telle que représentée en "grisé" sur la fig. XII.17, paraît alors plausible.

XII.6.1 – Résolution en contraintes

Aucune force n'étant appliquée à la partie aval du lopin All'A', l'équilibre exige que les efforts sur la frontière AA' soient équivalents à zéro.

On fera pour la construction de la solution l'hypothèse complémentaire que les contraintes s'exerçant sur la verticale AA' sont uniformément nulles. Cela est compatible par exemple avec un état de contraintes uniformément nul dans le lopin en aval de AA'.

La construction de la solution du problème pour les contraintes peut alors s'effectuer à partir de la donnée sur AA'.

p et θ sont connus sur AA', et on a à résoudre un problème de Cauchy (fig. XII.18).

En effet, le long de AA' avec les notations de la figure XII.18, $0x$ est nécessairement direction principale pour les

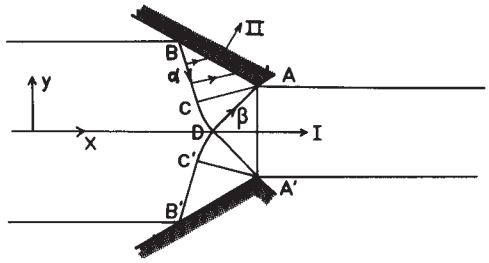


Fig. XII.18. – Réseau de lignes de glissement.

contraintes ; l'ambiguïté entre les directions I et II est levée, soit par l'intuition mécanique, soit en se référant aux vitesses : $0x$ est certainement la direction d'extension maximale ! donc, $0x$ est la direction I et on a :

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \sigma_{\mathrm{I}} = 0 \Rightarrow p = k \end{cases} \quad \text{sur AA}' \tag{6.3}$$

On vérifie sans difficulté que la solution continue unique du problème de Cauchy ainsi posé est le champ homogène ADA' où les caractéristiques α et β sont inclinées à $\mp \pi/4$ sur $0x$.

La construction de la solution au-delà de ce domaine ADA' nécessite de faire intervenir des conditions au contour supplémentaires.

Considérant, par raison de symétrie, le demi lopin supérieur, on fait intervenir la condition de frottement nul sur la filière. Ceci implique que AB est direction principale pour les contraintes. Il paraît conforme au bon sens de supposer que la contrainte principale s'exerçant sur AB est la pression maximale σ_{II} (hypothèse à vérifier a posteriori).

Le réseau de caractéristiques aboutissant sous la filière qui se raccorde au réseau homogène ADA' le long de la caractéristique rectiligne AD, sera à caractéristiques β rectilignes, inclinées sur AB à $+ \pi/4$. Il en résulte, toutes les caractéristiques β aboutissant sur AB étant parallèles, que ce réseau ABC est lui aussi homogène, où :

$$\theta = -\alpha \tag{6.4}$$

On voit qu'au point A, par suite des conditions aux limites à droite et à gauche, θ a deux déterminations. On se trouve en présence de deux champs homogènes différents qui doivent être raccordés. L'utilisation d'un éventail de Prandtl centré en A, et d'ouveture α, permet d'effectuer ce raccordement de façon continue.

Avec le rapport de réduction choisi le champ ainsi construit permet bien, à partir de AA', de couvrir AB entièrement.

Pour le demi lopin inférieur, le réseau de caractéristiques est le symétrique de celui-ci.

Le calcul des contraintes dans la zone déformée s'effectue alors en appliquant les relations de Hencky. En particulier pour le calcul de la force de poussée F, on a à connaître σ_{II} sur AB.

Par application de (3.14), on a :

$$p_{\mathrm{AB}} = p_{\mathrm{AA}'} + 2k\alpha = k + 2k\alpha, \tag{6.5}$$

d'où :

$$(\sigma_{\mathrm{II}})_{\mathrm{AB}} = -2k(1+\alpha) \tag{6.6}$$

Par raison de symétrie, on a :

$$(\sigma_{\mathrm{II}})_{\mathrm{A'B'}} = -2k(1+\alpha),$$

et

$$\mathrm{F} = 2(\mathrm{H} - h) \times 2k(1+\alpha) = 8kh \sin\alpha(1+\alpha)$$

$$\frac{\mathrm{F}}{2\mathrm{H}} = p_{\mathrm{m}} = \rho \times 2k(1+\alpha) = \frac{4k\sin\alpha(1+\alpha)}{1+2\sin\alpha} \tag{6.7}$$

XII.6.2 – Résolution en vitesses

La résolution pour les vitesses part du lopin amont dont la vitesse est connue, horizontale $\vec{u}_e$, représenté sur l'hodographe par b_1, c_1, d_1, c'_1, b'_1.

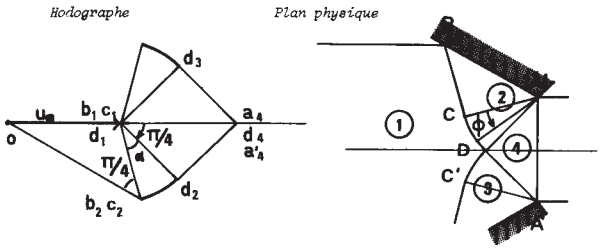


Fig. XII.19. – Champ de vitesses.

Une discontinuité de vitesse est possible au franchissement de BCDA' (et de B'C'DA). L'amplitude de cette discontinuité est fixée par la condition que la vitesse en B doit être tangente à AB ($0b_2$ // AB), et elle est constante le long de BCDA' : $[\![v_\alpha]\!] = u_e\sqrt{2}\sin\alpha$.

La vitesse est alors déterminée dans BCDA : elle est constante égale à celle de B. En effet, on a par (4.6) $dv_\beta = 0$ le long des lignes β d'où :

$$v_\beta = (v_\beta)_{\mathrm{BC}} = u_e \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \tag{6.8}$$

sur AB : $v_\alpha = v_\beta$

et par (4.5) $dv_\alpha = 0$ le long des lignes α, donc :

$$v_\alpha = u_e \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

C'est d'ailleurs bien ce qu'indique la construction de l'hodographe, où $0b_2 = u_e\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

Dans l'éventail ACD, v_β est constant sur chaque rayon vecteur (par (4.6)), égal à sa valeur au point correspondant sur CD :

$$v_\beta = u_e \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha + \phi\right).$$

Par (4.5) on voit que v_α, constant sur AC, demeure constant sur chaque rayon vecteur :

$$v_\alpha = u_e \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \int_0^\phi u_e \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha + \phi\right) d\phi$$

$$v_\alpha = u_e \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha + \phi\right) + u_e\sqrt{2}\sin\alpha$$

Les vitesses dans ACD sont représentées sur l'hodographe par l'arc de cercle $c_2 d_2$. On remarquera que la vitesse en A est multiplement définie.

Enfin, pour ADA', v_α et v_β y sont constantes égales à leur valeur sur AD et A'D, d'où :

$$v_\alpha = v_\beta = u_e \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + 2 \sin \alpha)$$

et ADA' se déplace horizontalement en bloc à la vitesse :

$$u_s = u_e \ (1 + 2 \sin \alpha)$$

(représentée sur l'hodographe par $\overrightarrow{0a_4}$), qui vérifie bien (6.2).

On vérifie immédiatement la condition de positivité : orientation des discontinuités de vitesse selon les lignes α et β : (4.7) vérifiée avec $\lambda = 0$ dans les blocs ABC, A'B'C', ADA'

Le calcul est nécessaire pour ACD : désignant par r le rayon vecteur, on aboutit à :

$$- u_e \frac{\sin \phi}{r} + (u_e \sqrt{2} \sin \alpha + u_e \sin \phi) \frac{1}{r} > 0$$

qui est vraie.

XII.6.3 – Conclusions

Avec les hypothèses faites (localisation de la zone plastique, et hypothèses complémentaires), compatibles entre elles, il a été possible de mettre en évidence un champ de contraintes dans la zone plastique de la figure 18, et un champ de vitesses associé, complété par des mouvements rigidifiants (translation $\vec{u_e}$ et $\vec{u_s}$) dans les zones non plastiques. Une valeur de la force d'extrusion F a été ainsi obtenue.

XII.7 – Interprétation des solutions obtenues par la méthode des lignes de glissement

XII.7.1 – L'exemple du problème de l'extrusion

La solution obtenue pour le problème de l'extrusion s'appuie sur un certain nombre d'hypothèses initiales relatives à la zone déformée.

D'autre part, cette solution elle même demeure incomplète en ce sens que, si le champ de vitesses a été mis en évidence dans tout le lopin, le champ de contraintes lui n'a été déterminé que dans la zone déformée ; dans la partie située en aval de la filière on peut, comme on l'a dit, prendre le champ de contraintes uniformément nul, mais rien n'a été fait concernant la partie amont.

Il est donc naturel alors de s'interroger sur la signification de cette solution, et en particulier de la valeur de F trouvée. Comment choisir par rapport à une autre solution du même type construite à partir d'autres hypothèses ? Que peut-on dire, bien que la solution ne soit pas complète ?

Le tableau XII.1 rapporte les valeurs numériques de p_m = F/2H données par (6.7) pour diverses valeurs de α.

Tableau XII.1
Pression d'extrusion donnée par la formule (6.7)

α	ρ	p_m/k = F/2kH
20°	0.41	1.096
30°	0.50	1.524
40°	0.56	1.91
42°3	0.57	2.00
45°	0.59	2.092
50°	0.61	2.266
60°	0.63	2.596

On y remarque que pour $\alpha > 42°3$, la pression moyenne de poussée à exercer sur le lopin est supérieure à la limite de plasticité en compression simple en déformation plane, égale à $2k$.

Ceci incite à se demander si, pour $\alpha > 42°3$, et peut-être même avant, il n'y aurait pas lieu d'envisager des solutions dans lesquelles, plutôt que de s'écouler à travers la filière, ou tout en s'écoulant à travers la filière, le matériau s'écraserait en amont.

On voit là le rôle, et des hypothèses de départ sur la zone déformée, et aussi de la non mise en évidence des contraintes dans la zone déformée (on ne sait pas si, pour $\alpha > 42°3$, on peut trouver un champ de contraintes en équilibre et respectant le critère de plasticité dans la zone amont, correspondant à la solution de la figure XII.18).

La figure XII.20 représente une autre solution dans laquelle, les zones déformées allant de la filière à la surface libre amont, il y a extrusion avec écrasement.

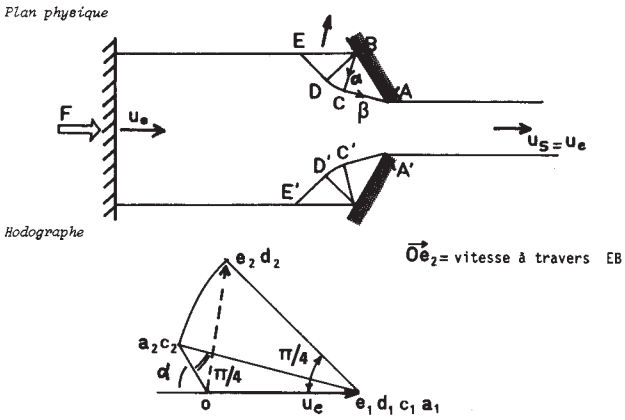


Fig. XII.20. – Extrusion avec écrasement.

Cette solution dont nous ne détaillons pas le calcul est valable pour $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi/2$ quel que soit le rapport de réduction ρ. Le calcul des contraintes dans la zone déformée est aisé et conduit, dans ABC, à :

$$p = k \ (1 + \pi - 2 \ \alpha) \ ; \qquad (7.1)$$

d'où

$$p_m = \frac{F}{2H} = \rho \ \ 2k \left(1 + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad (7.2)$$

Il est évident en comparant cette formule à (6.7) que, pour le même rapport de réduction donné par (6.1), la pression moyenne d'extrusion est plus faible dans la nouvelle solution que dans celle du § XII.6, puisque $\alpha > \pi/4$. Le tableau XII.2 donne quelques valeurs numériques.

Tableau XII.2
Pression d'extrusion donnée par la formule (7.2)

α	ρ	p_m/k
45°	.59	2.092
50°	.61	2.055
60°	.63	1.932

D'autre part, la figure XII.21 représente un mécanisme d'écrasement total en amont par blocs, qui fournit $\forall\alpha, \forall\rho$, *la borne supérieure*

$$p_m/k = 2\,, \tag{7.3}$$

et est valable si en amont de B le lopin a une longueur supérieure à 2H.

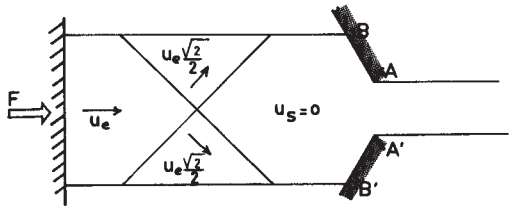


Fig. XII.21. – Ecrasement total en amont ; borne supérieure

Il ressort de tout celà que :

- par un changement des hypothèses de départ sur la zone déformée, on peut construire une autre solution pour le problème, et qui conduit à une poussée plus faible ;
- il est certain que ni l'une ni l'autre de ces solutions ne sont exactes lorsqu'elles fournissent une pression d'extrusion supérieure à la résistance en compression simple en déformation plane.

XII.7.2 – Interprétation des solutions

Dans chacune des deux solutions proposées pour l'exemple de l'extrusion, par la méthode des lignes de glissement, il a été mis en évidence dans *tout* le système un champ de vitesses respectant les conditions aux limites, et la condition d'incompressibilité de la déformation plastique pour le matériau considéré. On peut donc penser à utiliser ces champs de vitesses pour appliquer *la méthode cinématique* de la théorie des charges limites, et déterminer ainsi des bornes supérieures pour la pression d'extrusion.

Pour cela, on doit calculer la puissance dissipée dans les zones déformées pour chacun de ces champs de vitesses, soit $\dot{W}_d(u)$ et écrire que :

$$p_m = \dot{W}_d(u)/2\,\mathrm{H}\,u_e \tag{7.4}$$

est une borne supérieure de la pression d'extrusion.

Le calcul direct de la puissance dissipée conduit, compte tenu de (4.2) et (4.3), pour la partie continue, et du § XII.5.1 pour les discontinuités, à la formule :

$$\dot{W}_d(u) = 2k \int_{\mathcal{D}} |\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}|\, dS + k \int_{\Sigma} |[\![\vec{u}]\!]|\, ds \tag{7.5}$$

soit encore :

$$\dot{W}_d(u) = k \int_{\mathcal{D}} \left| \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} - v_\beta \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} \right| dS + $$
$$+ k \int_{\Sigma} (|[\![v_\alpha]\!]| + |[\![v_\beta]\!]|)\, ds \tag{7.6}$$

où les intégrales de surface portent sur la surface déformée $\mathcal{D}$, et les intégrales curvilignes sur les lignes de discontinuité de $\vec{u}$. Le champ de vitesses vérifiant la condition de positivité, on peut faire disparaître les signes | | dans (7.6).

On peut aussi, pour calculer $\dot{W}_d(u)$ revenir à la définition et remarquer que les équations de Geiringer et la condition de positivité, ainsi que les conditions homologues sur la discontinuité de vitesse, assurent que en tout point de la zone déformée et des lignes de discontinuité, le champ $[\sigma]$ et le champ $[\dot{\epsilon}]$ (y compris $[\![\vec{u}]\!]$) sont associés par la règle d'écoulement. Autrement dit, on aura aussi :

$$\dot{W}_d(u) = \int_{\mathcal{D}} tr\,([\sigma]\,.\,[\dot{\epsilon}])\, dS + \int_{\Sigma} [\![\vec{u}]\!]\,.\,[\sigma]\,\vec{n}\, ds \tag{7.7}$$

où $\vec{n}$ désigne la normale à la surface de discontinuité.

Le second membre de cette formule se transforme par application du principe des puissances virtuelles, puisque le champ est en équilibre, et qu'il n'y a pas de déformation en dehors de $\mathcal{D}$ et Σ. Il en résulte en désignant par $p_m([\sigma])$ la valeur de p_m calculée par le champ $[\sigma]$ (formule (6.7) ou (7.2) dans les deux solutions précédentes) que :

$$\dot{W}_d(u) = p_m([\sigma])\,.\,2\mathrm{H}\,u_e \tag{7.8}$$

Autrement dit $p_m([\sigma])$ est précisément la borne supérieure (7.4) que fournit le champ $\vec{u}$.

L'interprétation des solutions est donc la suivante, parfaitement cohérente avec les remarques faites au § XII.7.1 :

Les valeurs de p_m obtenues au moyen des deux solutions proposées, par la méthode des lignes de glissement, sont des bornes supérieures pour la pression d'extrusion. Il convient donc de ne retenir que la plus faible, sans évidemment être assuré que c'est la valeur exacte.

XII.7.3 – Solutions incomplètes, solutions complètes

Le raisonnement fait dans le cas particulier ci-dessus est général. *Une solution construite par la méthode des lignes de glissement en respectant toutes les conditions indiquées (en particulier la condition de positivité sous ses diverses formes) ressortit à la méthode cinématique*, et fournit donc :

- dans le cas d'un paramètre de chargement unique, une borne supérieure de l'effort à appliquer ;
- dans le cas d'un chargement à n paramètres Q_n (sou-

vent $n = 2$ ou $n = 3$) un plan non sécant à la frontière d'écoulement du système étudié.

Il est évident que *si de plus on sait compléter le champ de contraintes hors des zones déformées, en respectant le critère de plasticité la solution ressortit aussi à la méthode statique et la valeur obtenue est donc la valeur exacte* de l'effort à appliquer.

On dit que l'on a alors affaire à une solution *complète*. Les solutions précédentes, où le champ de contraintes n'est connu que dans les zones déformées, sont appelées solutions *incomplètes*.

XII.7.4 – Autres types de solutions

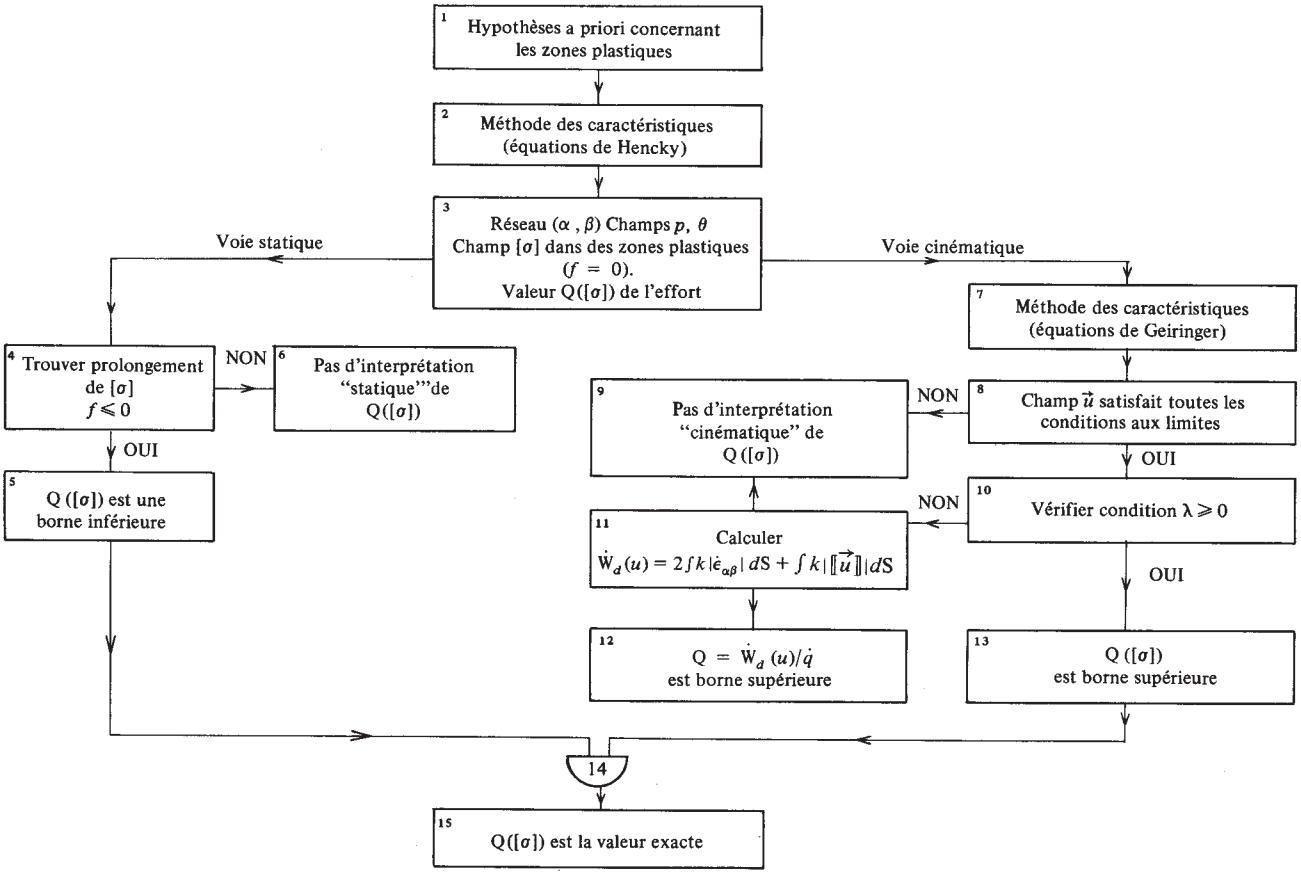
Il arrive dans certains cas qu'en utilisant uniquement les résultats énoncés au § XII.3, concernant les contraintes, on parvienne à construire des solutions dans lesquelles un champ de contraintes en équilibre et respectant le critère est connu dans tout le solide (zones plastiques et non plastiques).

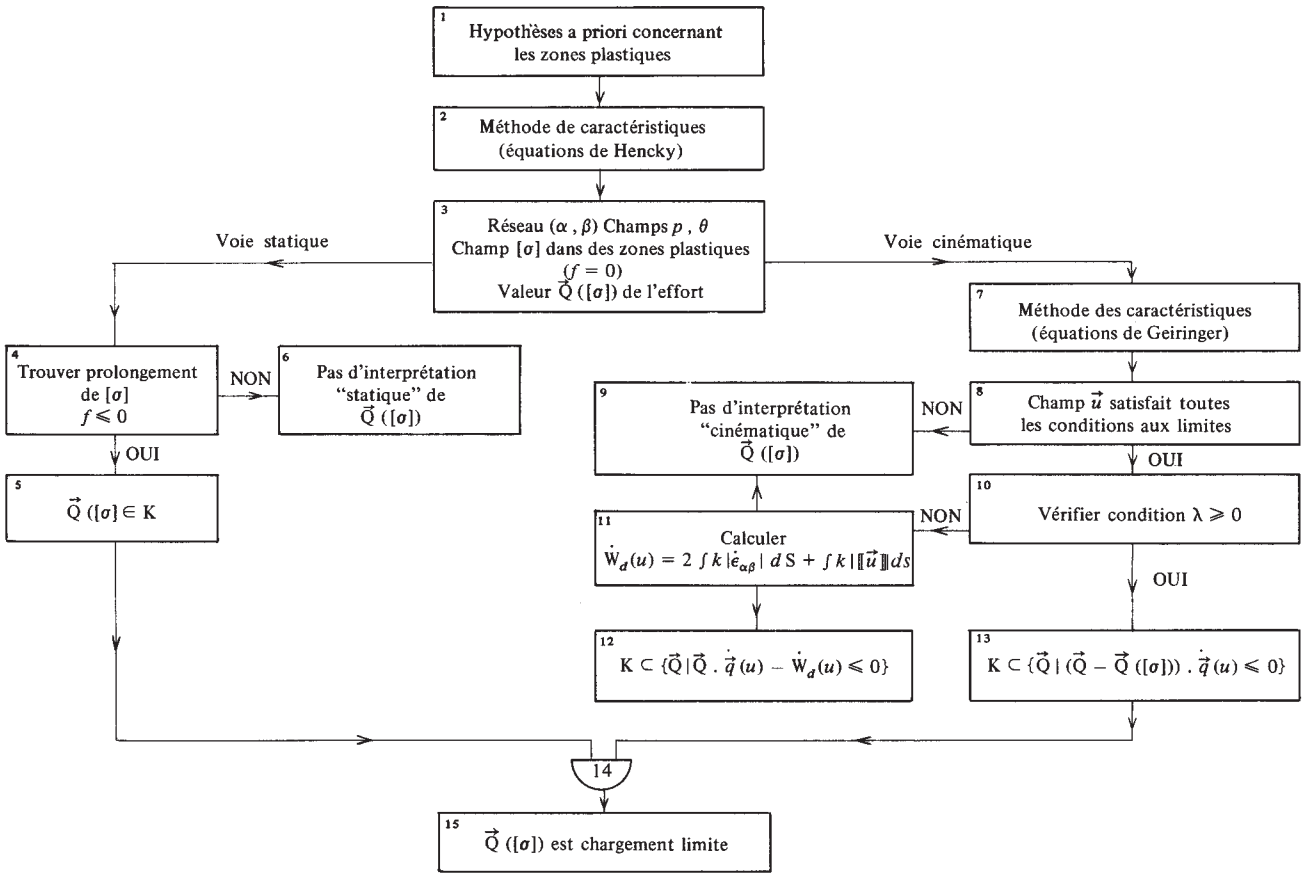
On a alors affaire à une *solution statique* fournissant donc une *borne inférieure*.

D'autre part, suivant la remarque faite au § XII.4.2 on voit que l'utilisation des équations de Geiringer sur *tout* réseau de lignes orthogonales conduit à un champ de vitesses à divergence nulle. D'où une solution cinématique où on calcule la puissance dissipée par (7.6) et qui fournit une borne supérieure. C'est en particulier le cas que se produit lorsque on utilise comme réseau orthogonal un réseau de Hencky, sans que le champ $[\dot{\varepsilon}]$ puisse être associé à un champ $[\sigma]$ construit sur ce réseau (par exemple : condition de positivité impossible à satisfaire simultanément partout).

XII.8 – Organigramme de l'utilisation courante de la méthode des lignes de glissement :

Pour terminer, nous résumons sous forme d'organigrammes l'utilisation courante de la méthode des lignes de glissement.





Le premier organigramme traite du cas où l'on a affaire à un chargement dépendant d'un paramètre scalaire unique :

Q est ce paramètre, représentant l'effort ; $\dot{q}$ est le paramètre représentant la vitesse, associé à Q dans l'expression de la puissance.

Le deuxième organigramme traite du cas général où le chargement dépend d'un nombre fini n de paramètre Q_i représentés par un vecteur $\vec{Q}$ dans un espace à n dimensions. $\dot{\vec{q}}$ est le vecteur à n composantes $\dot{q}_i$, représentant les paramètres de vitesses, associé à $\vec{Q}$ dans l'expression de la puissance. K est, dans l'espace des chargements $\vec{Q}$ l'ensemble convexe des chargements qui ne produisent pas l'écoulement plastique du système ; sa frontière est le lieu des chargements limites.

Bibliographie sommaire

[1] J.M. ALEXANDER. – On complete solutions for frictionless extrusion in plane strain. *Quart. Appl. Math.*, (1961), **19**, n° 1, 31-37.

[2] P. BAQUE, E. FELDER, J. HYAFIL et Y. d'ESCATHA – Mise en forme des métaux, Calculs par la plasticité, Dunod, Paris (1963).

[3] J.F.W. BISHOP – On the complete solutions to problem of deformations of a plastic rigid material. *J. Mech. Phys. Solids,* (1953). 2, n° 1, 43-53.

[4] D.J.F. EWING et R. HILL – The plastic constraint of V-notched tension bars. *J. Mech. Phys. Solids,* (1967), **15**, n° 2, 115-124.

[5] H. GEIRINGER – Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes. *Mémorial Sc. Maths.* n° 86, Gauthier-Villars, Paris, (1937).

[6] H. GEIRINGER – Some recent results in the theory of an ideal plastic body. Advances in applied mechanics, Ac. Press, New York (USA). (1953).

[7] R. HILL – The mathematical theory of plasticity. Clarendon Press, Oxford, (1950).

[8] R. HILL – On discontinuous plastic states with special reference to localized necking in thin sheets. *J. Mech. Phys. Solids,* (1952), **1**, n° 1, 19-30.

[9] J. MANDEL – Equilibres par tranches planes des solides à la limite d'écoulement, Thèse (1938), *Travaux,* juin, juillet et décembre 1942.

[10] J. MANDEL – Problemes de déformation plane (et de contrainte plane) pour les corps parfaitement plastiques. Séminaire de plasticité, Ecole Polytechnique, 1961, 67-103.

[11] J. MANDEL – Cours de Science des Matériaux. Ecole Nationale Supérieure des Mines, Paris (1969).

[12] J. SALENÇON – Théorie de la plasticité pour les applications à la Mécanique des sols. Eyrolles, Paris, (1974).

[13] V.V. SOKOLOVSKI – Statics of Soil Media. Butterworths Sc. Publ., (1960).

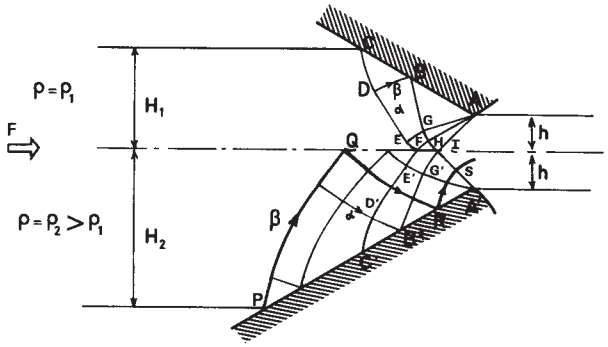
EXERCICES

1 – Extrusion avant

On reprend le problème de l'extrusion avant, sans conteneur, à travers une filière d'angle α, sans frottement. On suppose que le rapport de réduction est :

$$\rho > 2 \sin \alpha/(1 + 2 \sin \alpha)$$

Le réseau de lignes de glissement qui fait suite à celui proposé au paragraphe 6 est représenté sur la figure (on a tracé deux demi-figures pour deux valeurs de ρ).



1) Expliquer sa construction,

2) Comment varie la valeur de p_m donnée par cette solution quand $\rho \nearrow (p_m \approx F/2H)$

3) Construire l'hodographe dans le cas $\rho = \rho_1$

4) Est-il possible de construire un champ de vitesses à partir de ce réseau de lignes de glissement dans le cas $\rho = \rho_2$?

Eléments de réponse

1) On fait la même hypothèse sur AA′ que dans le cas où $\rho = 2 \sin \alpha/(1 + 2 \sin \alpha)$. Les réseaux sont identiques au précédent jusqu'aux caractéristiques A′IHGB et AIG′B′. Ensuite, la construction est poursuivie en utilisant :

– la condition de frottement nul sur la filière (donc angle d'incidence des caractéristiques $= \pi/4$),

– la symétrie par rapport à l'axe (donc caractéristiques inclinées à $\pi/4$ sur l'axe).

Certains champs sont semi-homogènes ou homogènes par application du théorème de Hencky (BDEG par exemple).

2) On a :

$$p_m = \frac{F}{2H} = \frac{\langle \sigma_{II} \rangle (H - h)}{H} = \rho \langle \sigma_{II} \rangle$$

en désignant par $\langle \sigma_{II} \rangle$ la valeur moyenne de σ_{II} sur la filière.

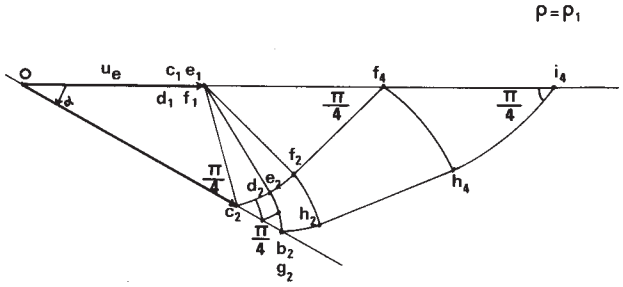
A h fixé si $H \nearrow$, $\rho \nearrow$ et aussi $\langle \sigma_{II} \rangle$; en effet : $\langle \sigma_{II} \rangle$ est non décroissant sur AC (appliquer les équations de Hencky en partant de AA′).

Donc $p_m \nearrow$ si $\rho \nearrow$.

3) Hodographe pour $\rho = \rho_1$:

4) Dans le cas $\rho = \rho_2$:

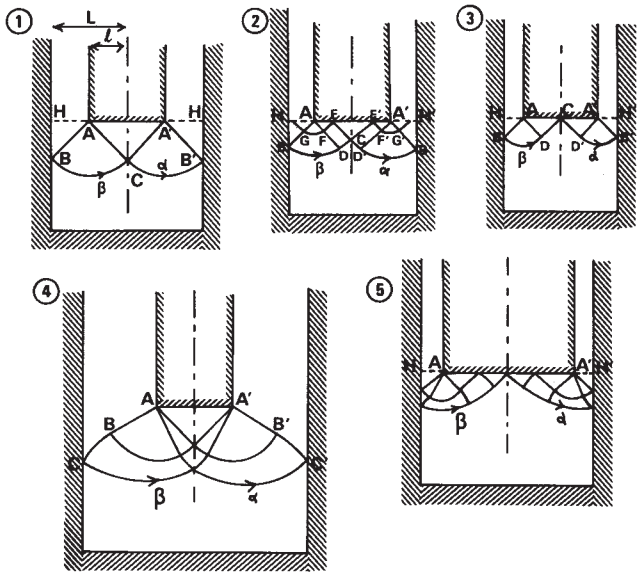
Impossibilité de construire un champ de vitesses admissible. PQ est ligne de discontinuité de vitesses, QR et RS aussi ; RS ne débouchant pas sur AA′ en A ou en A′, ceci est incompatible avec une translation en bloc à droite de AA′.



2 – Extrusion arrière

On étudie l'extrusion arrière symétrique dans un conteneur sans frottement par un poinçon rectangulaire sans frottement.

1) Commenter les réseaux de lignes de glissement représentés sur la figure.



2) Comment varie la pression d'extrusion en fonction du rapport de réduction ?

3) Montrer que 1 et 5 sont également valables s'il y a frottement, quel qu'il soit, *sous* le poinçon.

Eléments de réponse

1)

Réseau 1 : $\rho = \dfrac{L - l}{L} = \dfrac{1}{2}$

construit à partir de l'hypothèse "contrainte verticale uniformément nulle sur AH et A′H′" ; et des conditions aux limites "frottement nul". Champs homogènes, éventails de Prandtl, champ homogène sous AA′. Appliquer les équations de Hencky à partir de AH : pression uniforme sous AA′ : $p_m = (\pi + 2)k$.

champ de vitesses avec discontinuité le long de ACB′, A′CB, BA, B′A′. Pas de glissement sous AA′.

Réseau 3 : $\rho = \dfrac{L - l}{L} = \dfrac{1}{3}$

construit à partir des mêmes hypothèses.

⇒ pression uniforme $p_m = (\pi + 2)\,k$.

champ de vitesses : discontinuité le long de CDB, CD'B', BA et B'A'. Il y a glissement sous AA'.

Réseau 5 : $\rho < \dfrac{1}{3}$

construction analogue à 2. Pression uniforme sous AA'. Appliquer les équations de Hencky : p non décroissant sous AA' lorsqu'on va de A (ou A') vers le centre, $p_m \nearrow$ si $\rho \nearrow$.

champ de vitesses, avec glissement sous AA' et lignes de discontinuité, compatible avec le mouvement de translation uniforme au-dessus de AH (et A'H') si les lignes de glissement aboutissent en A et A'. (l'hodographe est semblable au réseau de lignes de glissement).

Réseau 2 : $\dfrac{1}{3} < \rho < \dfrac{1}{2}$

Construit à partir des mêmes hypothèses que 1 et 3.

Pression uniforme sous AA' : $p_m = (\pi + 2)\,k$.

Pas de champ de vitesse compatible : lignes de discontinuité AB, A'B', BDCE', B'D'C'E, et EFG, E'F'G' qui n'aboutissent pas en A et A'.

Réseau 4 : $1 > \rho > \dfrac{1}{2}$

Contruit à partir de l'hypothèse de pression uniforme sous AA'.

Contraintes déterminées en écrivant la nullité de la composante verticale sur ABC.

Champ de vitesses : construire l'hodographe semblable au réseau de lignes de glissement. Il n'y a pas de glissement sous AA'.

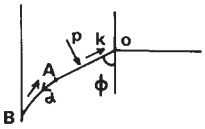
2) La variation de p_m donnée par cette solution en fonction de ρ :

$$p_m = \text{cte si } \frac{1}{3} < \rho < \frac{1}{2}$$

$$p_m \nearrow \text{ si } \rho \searrow \quad \rho < \frac{1}{3}$$

pour $\rho > \dfrac{1}{2}$:

Il faut déterminer les valeurs de p sur OA.



$p \searrow$ de A vers B et la cission k se redresse.

p est déterminé par : résultante verticale nulle.

Donc p sur OA > la valeur déterminée en supposant OAB rectiligne parallèle à OA :

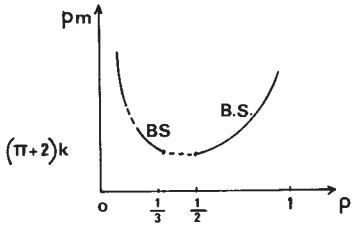
$$p > k \operatorname{cotg} \phi.$$

Donc sous le poinçon :

$$|\sigma_{II}| > k\left(1 + \operatorname{cotg}\phi + \frac{\pi}{2} + 2\phi\right)$$

qui est croissant pour $\phi > \dfrac{\pi}{4}$

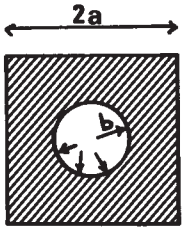
Donc $\qquad p_m \nearrow$ si $\rho \nearrow > \dfrac{1}{2}$



3) Pour les réseaux 1 et 4, il n'y a pas de glissement sous AA' ce qui est compatible avec la cission nulle, même s'il y a frottement.

3 – Enveloppe cylindrique épaisse sous pression interne.

On se propose de déterminer la pression limite d'une pièce cylindrique (problème de déformation plane) de section carrée de côté 2a, percée axialement d'un trou cylindrique de rayon b.

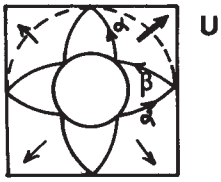


1) On considère d'abord le cas d'un tube cylindrique de rayons extérieur et intérieur a et b, soumis à une pression interne, la pression externe étant nulle. On suppose le tube entièrement plastique.

Quelles sont les lignes caractéristiques α et β ? Quelle est la valeur de la pression interne ? Signification de ce résultat ?

Peut-on aussi associer un champ de vitesses plastique à ce champ de contraintes (champ de vitesses radial, par exemple). Conséquences ?

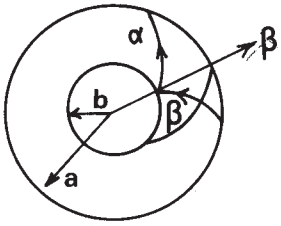
2) Utiliser la solution ci-dessus pour la construction d'une solution statique pour la pièce carrée.



Commenter le champ de vitesses esquissé ci-dessus. Conséquences ?

Eléments de réponse

1) Directions principales des contraintes r et θ.



Caractéristiques à $\frac{\pi}{4}$ sur les rayons vecteurs : ce sont des spirales logarithmiques.

σ_r plus grande pression $= \sigma_{II}$

Lignes α : $\frac{dr}{r} = d\theta$

Lignes β : $\frac{dr}{r} = -d\theta$

le long de la ligne α : $dp + 2k\,d\theta = dp + 2k\frac{dr}{r} = 0$

pour $r = a$ $\quad \sigma_{II} = 0$, $p = -k$

pour $r = b$ $\quad \sigma_{II} = -2k \operatorname{Log} \frac{a}{b}$

Champ connu partout, donc c'est une B.I. de la pression limite :

$$p_{\lim} \geqslant 2k \log \frac{a}{b}$$

Champ de vitesses radial :

$$v_\alpha(r) = -v_\beta(r) = v(r)\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Les deux équations de Geiringer donnent :

$$\frac{dv}{v} = \frac{-dr}{r} \Rightarrow v = \alpha/r$$

(évident par l'incompressibilité).

Et la condition de positivité :

vérifier que : $\quad \dot{\epsilon}_{rr} = \dot{\epsilon}_{II} < 0$

et : $\quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = \dot{\epsilon}_{I} > 0$

or $\quad \dot{\epsilon}_{rr} = \frac{dv}{dr} = \frac{-\alpha}{r^2} < 0$

Donc c'est aussi une B.S. $\boxed{p_{\lim} = 2\,k \log \frac{a}{b}}$

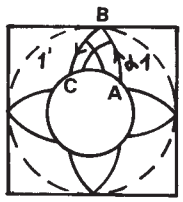
2) Champ de contraintes : le même à l'intérieur du pointillé, complété par le champ nul au dehors. $\Rightarrow p_{\lim} \geqslant 2k \log \frac{a}{b}$

Champ de vitesse selon l'hodographe.

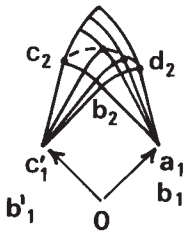
La condition de positivité se vérifie graphiquement par le théorème du 5.

$$\boxed{p_{\lim} = 2\,k \log \frac{a}{b}}$$

la matière supplémentaire ne sert à rien.



Hodographe



La ligne pointillée représente les vitesses le long de AC.

Elle est définie par la différence (algébrique) des variations d'angles = constante.

4 – Vérification graphique de la condition de positivité

On considère dans le plan physique deux points infiniment voisins M et M + $d\vec{M}$, où les vitesses sont $\vec{u}$ et $\vec{u} + d\vec{u}$. On suppose que $d\vec{M}$ est situé dans l'angle $(\alpha, \beta) = +\frac{\pi}{4}$

Montrer que la condition de positivité est équivalente à la condition

$$d\vec{M} \,.\, d\vec{u} \geqslant 0 \qquad d\vec{M} \text{ dans l'angle } (\alpha, \beta)$$

Conséquences de cette propriété si l'on compare les orientations des lignes α et β dans le plan (x, y) et de leurs images a et b dans le plan de l'hodographe ?

Eléments de réponse

Condition de positivité : $\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \geqslant 0$

Equations de Geiringer : $\dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} = \dot{\epsilon}_{\beta\beta} = 0$

en M $\quad : \vec{u}$

en M + $d\vec{M}$: $\vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\alpha}\,dx^\alpha + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^\beta}\,dx^\beta$

$$d\vec{M} \,.\, d\vec{u} = dx^\alpha \,.\, \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha}\,dx^\alpha + \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\beta} - v_\beta \frac{\partial \theta}{\partial x^\beta}\right) dx^\beta$$

$$+ dx^\beta\,\dot{\epsilon}_{\beta\beta}\,dx^\beta \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial x^\alpha} + v_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x^\beta}\right) dx^\alpha$$

$$d\vec{M} \,.\, d\vec{u} = 2\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$$

En fait, plus rapidement :

$$d\vec{M} \,.\, d\vec{u} = d\vec{M} \,.\, \operatorname{grad} \vec{u} \,.\, d\vec{M}$$

$$= d\vec{M} \,.\, [\dot{\epsilon}]\, d\vec{M}$$

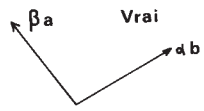
$$d\vec{M} \,.\, d\vec{u} = 2\epsilon_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$$

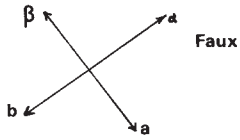
car $\dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} = \dot{\epsilon}_{\beta\beta} = 0$

Condition de positivité équivalente à

$$d\vec{M} \,.\, d\vec{u} \geqslant 0 \;\; \forall dx^\alpha, dx^\beta \geqslant 0$$

D'où graphiquement :





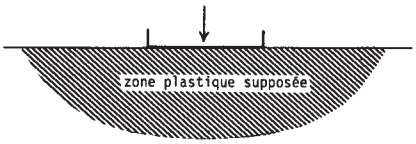
5 – Poinçonnement d'un demi-espace.

On poinçonne un demi-espace (déformation plane) par un poinçon rectangulaire indéformable soumis à une force axiale. On suppose que la zone plastique part de sous le poinçon pour déboucher à la surface libre de part et d'autre de celui-ci. Il y a frottement maximal ($m = 1$) au contact.

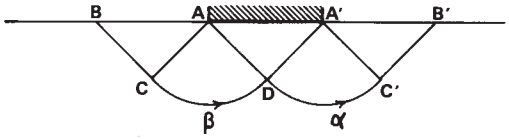
Construire le réseau de lignes de glissement.

Champs de vitesse ?

Valeur de la pression moyenne de poinçonnement ?



Eléments de réponse



Le champ déterminé par la condition de surface libre sur AB est homogène : ABC (de même pour A'B'C'). Poursuite par éventails de Prandtl et champ homogène (analogue à l'extrusion avant). Pression uniforme sous : AA' : $-\sigma_{II} = (\pi + 2)\,k$ (équations de Hencky).

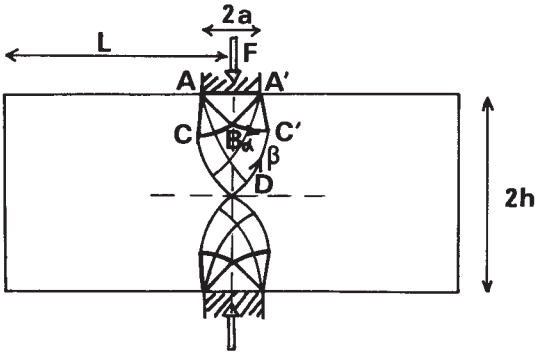
Champ de vitesses : hodographe semblable au réseau de lignes de glissement. A'B'C', ABC, AA'D se déplacent en bloc. $v_\beta = 0$, $v_\alpha =$ cte dans A'DC' ; $v_\alpha = 0$, $v_\beta =$ cte dans ADC. Condition de positivité vérifiée.

Il n'y a pas de glissement sous AA'.

6 – Poinçonnement symétrique d'un bloc.

Un bloc de largeur 2L, de hauteur $2h$, est poinçonné symétriquement et axialement par deux poinçons rectangulaires indéformables de largeur : $2a < \frac{2}{3}$ L.

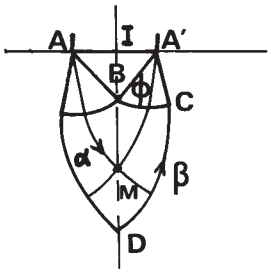
Une première solution évidente utilise les résultats de 5. Commenter et expliquer l'autre solution dont le réseau de lignes de glissement est représenté sur la figure.



Eléments de réponse

Le réseau de lignes de glissement est construit à partir de l'hypothèse d'une pression normale uniforme sous les poinçons : champ homogène AA'B. On poursuit par deux éventails de Prandtl ABC et A'BC' symétriques. On construit ensuite le réseau de Hencky défini par BC' et BC : BC'DC. L'ouverture des éventails est telle que D soit au centre du bloc.

La pression est déterminée par la condition : composante horizontale de la résultante des contraintes sur A'C'D = 0 ou, de façon équivalente, sur l'axe ID.



Si $\sigma_{II} = -P$ sous AA', on a, par les équations de Hencky :

$$p_M = P - k - 4k\phi$$

On voit que p décroît sur l'axe quand on descend de B vers D. On atteint même des valeurs négatives (contraintes hydrostatiques de traction) pour des valeurs suffisantes de h/a.

Le champ de vitesses correspond à des mouvements de translation symétriques des deux zones non déformées. Les vitesses sont déterminées dans AA'C'DC, (et symétrique). L'hodographe facile à construire, est semblable au réseau de lignes de glissement. Il y a enfoncement vertical des poinçons et du bloc AA'B (et symétrique) : il n'y a pas de glissement sous AA'. La condition de positivité se vérifie graphiquement.

Conclusion

pour chaque valeur de h/a cette solution fournit une B.S. pour la pression de bipoinçonnement.

D'autre part, la solution tirée du poinçonnement simple, fournit pour $h/a > \sqrt{2}$ la B.S. constante $(\pi + 2)\,k$.

On retiendra la plus faible des deux valeurs.