

COLLECTION UTI-CISCO

---

# LES MÉTHODES D'OPTIMISATION DANS LA CONSTRUCTION

COLLÈGE INTERNATIONAL DES SCIENCES DE LA CONSTRUCTION  
**Séminaire tenu à Saint-Rémy-lès-Chevreuse (France)**  
du 6 au 9 novembre 1973

Les « Collections UTI » sont réalisées sous la direction de l'Union  
Technique Interprofessionnelle des Fédérations Nationales du  
Bâtiment et des Travaux Publics

ÉDITIONS EYROLLES  
61, boulevard Saint-Germain, PARIS 5<sup>e</sup>  
1975

## 7

**OPTIMISATION DES STRUCTURES  
PAR LE CALCUL AUX ÉTATS LIMITES**

Jean SALENÇON

*Maître de Conférences, École Polytechnique, Paris***1 - INTRODUCTION**

Le but de cette note est d'exposer quelques idées simples à propos du calcul optimal plastique des structures. Nous partirons d'exemples élémentaires, pour aboutir ensuite à une formulation plus générale exposant les résultats fondamentaux qui sont à la base des méthodes d'optimisation plastique des structures. Aucun détail sur ces méthodes ne sera donné. Pour cela, ainsi que pour les références bibliographiques, nous renvoyons le lecteur aux contributions de Messieurs les Professeurs Brousse, Cohn, Heyman et Massonnet au présent séminaire.

**2 - EXEMPLES SIMPLES****2.1.**

Nous considérons d'abord une structure qui est soumise à un processus de chargement dépendant d'un paramètre  $P$  (c'est-à-dire que toutes les charges appliquées varient proportionnellement à  $P$ ).

Nous supposons que la « résistance de la structure » dépend d'un seul paramètre de résistance  $m$  positif, le critère de plasticité étant de la forme :

$$f(\sigma, m) = g(\sigma) - m \leq 0 \quad (1)$$

convexe en  $\sigma$  (contraintes ou contraintes généralisées), et  $g(\sigma)$  positivement homogène de degré 1 en  $\sigma$ .

Ce sera par exemple le cas d'une structure composée de barres identiques, soumise à un chargement tel que celui représenté à la figure 1, le critère de plasticité identique pour toutes les barres étant :

$$|M| \leq m \quad (2)$$

où  $M$  désigne le moment fléchissant,  $m$  étant le moment limite.

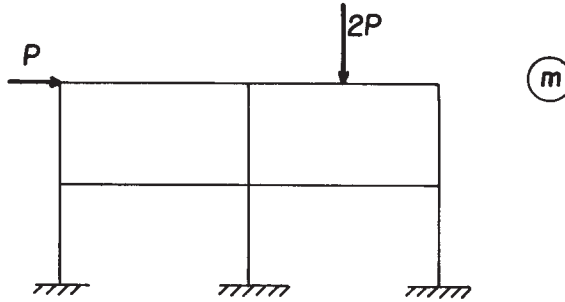


FIG. 1.

L'analyse limite nous indique que, étant supposée connue la valeur du paramètre de résistance  $m$ , il existe pour  $P$  un domaine des chargements admissibles, le convexe  $K(m)$  des chargements licites, qui est un segment dont les extrémités  $P_{lim}^-(m)$  et  $P_{lim}^+(m)$  sont les chargements limites (\*) (fig. 2 a).

La détermination de ces chargements limites s'effectue par les méthodes statique et cinématique classiques. Ils sont évidemment proportionnels à  $m$ , par suite de la forme (1) du critère de plasticité.

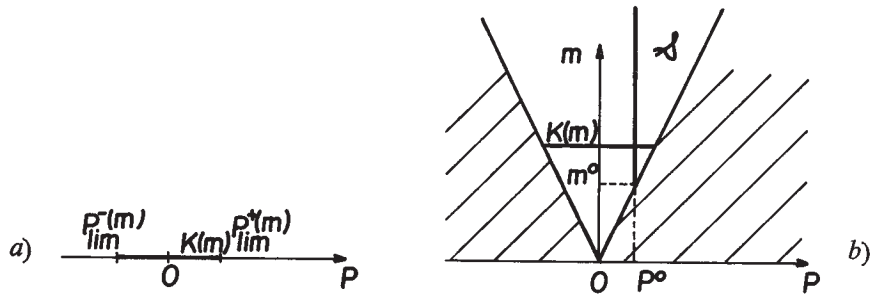


FIG. 2.

(\*) Nous nous plaçons, pour toute la suite, dans l'hypothèse de la règle d'écoulement associée au critère de plasticité (c'est le cas, par exemple, de la ruine par rotule plastique pour la structure de la fig. 1).

En se plaçant dans l'espace à deux dimensions  $\{P\} \times \{m\}$ , on peut définir le domaine  $\mathcal{S}$  engendré par les segments  $K(m)$ ; c'est un angle de sommet 0, contenant la direction  $(P = 0, m \geq 0)$  (fig. 2 b). Tout point  $(P, m)$  à l'intérieur de  $\mathcal{S}$  correspond au fait qu'une structure dimensionnée avec la valeur  $m$  du paramètre de résistance peut soutenir la charge  $P$ . La frontière de  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des chargements limites pour les diverses valeurs de  $m$ .

L'optimisation de la structure consiste, une valeur de  $P$  étant donnée, soit  $P^0$  (par exemple, charge réglementaire munie de son coefficient de sécurité) à choisir la valeur du paramètre de résistance telle que la structure supporte la charge  $P^0$  et qui corresponde au coût minimal ou au poids minimal.

Dans le cas de la structure de la figure 1 ces deux critères sont équivalents et reviennent à minimiser  $m$ .

D'après les propriétés de  $\mathcal{S}$ , l'ensemble des valeurs de  $m$  telles que la structure supporte la charge  $P^0$  est la projection sur l'axe  $m$  de l'intersection de  $\mathcal{S}$  et de la droite  $P = P^0$ , c'est-à-dire le convexe non borné  $\mathcal{C}$  :  $m \geq m^0$  (fig. 2 b).

Le dimensionnement optimal correspond donc à  $m = m^0$ , et on voit que  $P^0$  est alors *chargement limite*.

## 2.2.

Considérant maintenant le cas d'une structure soumise à un processus de chargement dépendant de  $n$  paramètres  $P_1, \dots, P_i, \dots, P_n$  (vecteur  $P$  dans l'espace des chargements  $\mathbb{R}^n$ ) et dont la résistance dépend du seul paramètre  $m \geq 0$ , comme au § 2.1 — par ex. la structure de la figure 3 —, les résultats de l'analyse limite indiquent que,  $m$  étant fixé, il existe un domaine convexe  $K(m)$  des chargements admissibles dans l'espace des chargements,  $\mathbb{R}^n$  (fig. 4 a). La frontière de  $K(m)$  est l'ensemble des chargements limites de la structure. Ce convexe est homothétique de centre 0 proportionnellement à  $m$ . Si l'on se place dans l'espace  $\{P\} \times \{m\}$  à  $n + 1$  dimensions, les convexes  $K(m)$  engendrent le domaine  $\mathcal{S}$ , cône convexe de sommet 0, conte-

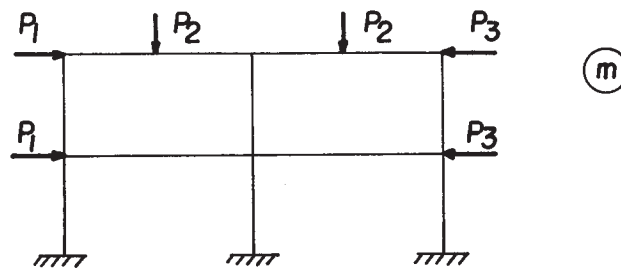


FIG. 3.

nant la direction ( $\underline{P} = 0, m \geq 0$ ) (fig. 4 b). Les propriétés des points ( $\underline{P}, m$ ) intérieurs à  $\mathcal{S}$  et des points ( $\underline{P}, m$ ) situés sur la frontière de  $\mathcal{S}$  sont identiques à celles indiquées au § 2.1; nous dirons que  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des *dimensionnements stables de la structure*, l'intérieur de  $\mathcal{S}$  correspondant aux *dimensionnements surabondants*, et la frontière de  $\mathcal{S}$  aux *dimensionnements limites*.

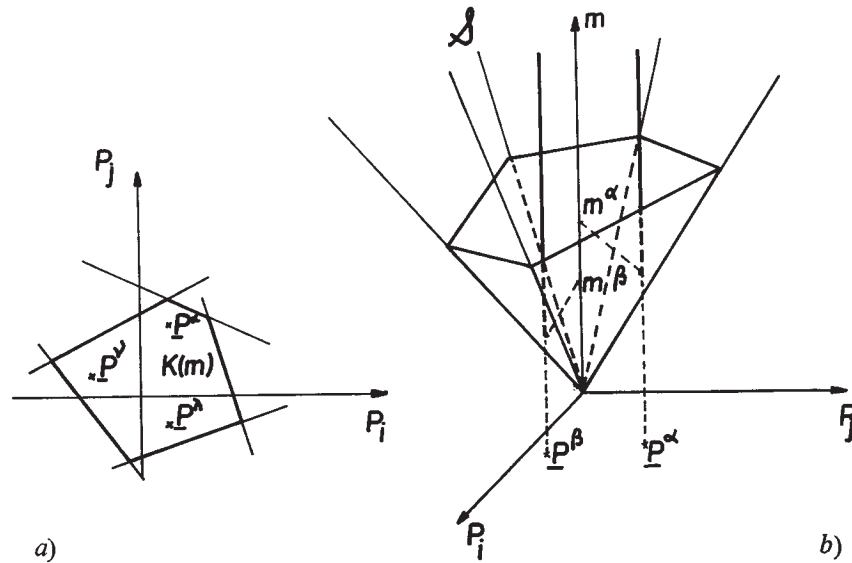


FIG. 4(\*).

L'optimisation de la structure pour divers chargements  $\underline{P}^\alpha, \dots, \underline{P}^\lambda, \dots, \underline{P}^\nu$ , c'est-à-dire pour diverses combinaisons des charges indépendantes (par ex.: cas de charges réglementaires avec pondérations différentes des charges), revient à prendre pour  $m$  la valeur minimale telle que tous les chargements  $\underline{P}^\lambda, \lambda = \alpha, \dots, \nu$ , soient à l'intérieur ou sur la frontière de  $K(m)$ : l'un des chargements  $\underline{P}^\lambda$  au moins sera donc évidemment chargement limite.

Cela correspond aussi à la démarche suivante: l'intersection de  $\mathcal{S}$  et de la droite  $\underline{P} = \underline{P}^\lambda$ , fournit par projection sur l'axe  $m$  le convexe non borné  $\mathcal{C}^\lambda, m \geq m^\lambda$ , ensemble des valeurs de  $m$  telles que la structure supporte  $\underline{P}^\lambda$ . Le dimensionnement optimal est  $m = \max m^\lambda, \lambda = \alpha, \dots, \nu$ , c'est-à-dire que l'on minimise  $m$  sur l'intersection

$$\mathcal{C} = \bigcap_{\lambda = \alpha, \dots, \nu} \{m > m^\lambda\} = \bigcap_{\lambda = \alpha, \dots, \nu} \mathcal{C}^\lambda$$

(\*) Sur la figure 4 le domaine convexe  $K$  est un polyèdre ce qui correspond au cas où le critère de plasticité est linéaire en  $\sigma$ .

### 2.3.

Il convient, pour la suite, de rappeler que les résultats concernant la convexité de  $K$  se démontrent en considérant l'ensemble  $H$  des champs de contraintes statiquement et plastiquement admissibles pour la structure, dont la convexité se déduit de façon immédiate de la convexité du critère, et dont la projection sur l'espace des chargements est  $K$ . Par exemple dans le cas de la structure de la figure 3, 12 fois hyperstatique, on considère l'ensemble des distributions de contraintes généralisées (moment fléchissant  $M$ , effort normal  $N$ , effort tranchant  $T$ ) statiquement et plastiquement admissibles; toute telle distribution est représentée par un point d'un espace à 15 dimensions (3 paramètres de chargement  $P_i + 12$  inconnues hyperstatiques  $X_k$ ), qui doit se trouver à l'intérieur d'un polyèdre convexe  $H$  par suite de la condition (2);  $K$  est la projection de  $H$  sur l'espace des paramètres de chargement  $P_i$  ( $\mathbb{R}^3$ ) parallèlement à la direction ( $P_1 = C^{te}$ ,  $P_2 = C^{te}$ ,  $P_3 = C^{te}$ ).

## 3 - STRUCTURE DONT LA « RÉSISTANCE » DÉPEND DE PLUSIEURS PARAMÈTRES

### 3.1.

Reprenant maintenant le cas d'une structure soumise à un processus de chargement dépendant d'un paramètre  $P$ , nous supposons que la « résistance » de cette structure dépende de  $N$  paramètres positifs  $m_I$  (vecteur  $\underline{m}$ ) :

Le critère de plasticité de chaque élément de la structure est de la forme :

$$f(\sigma, \underline{m}) = g(\sigma) - \sum \alpha_I m_I, \quad \alpha_I > 0, I = 1, \dots, N \quad (3)$$

où  $g$  est une fonction convexe, positivement homogène de degré 1 des contraintes (ou contraintes généralisées).

Par exemple, dans le cas de la structure de la figure 1 le critère de chaque barre sera :

$$|M| \leq m_I \quad (4)$$

les barres n'ayant *a priori* pas toutes le même moment limite.

Nous plaçant dans l'espace  $\{P\} \times \{\underline{m}\}$  à  $N + 1$  dimensions, nous définissons de façon analogue au § 2.1, le domaine  $\mathcal{S}$  engendré par le seg-

ment  $K(\underline{m})$  des chargements licites lorsque  $\underline{m}$  parcourt le domaine  $\underline{m} \geq 0$ . Tout point  $(P, \underline{m})$  à l'intérieur de  $\mathcal{S}$  correspond à un dimensionnement surabondant, et les points sur la frontière de  $\mathcal{S}$  correspondent aux dimensionnements limites (\*).

Par suite de la forme (3) du critère de plasticité,  $\mathcal{S}$  est un cône de sommet  $O$ .

$\mathcal{S}$  est convexe. La démonstration de cette propriété se fait en passant, comme au § 2.3 pour l'analyse limite, par l'intermédiaire des champs de contraintes statiquement et plastiquement admissibles (S.P.A.). On se place dans l'espace (champs de contraintes S.A.  $\times$  paramètres de résistance) et on considère l'ensemble des couples  $(\sigma, \underline{m})$  tels que le champ  $\sigma$  soit S.P.A. avec la valeur  $\underline{m}$  des paramètres de résistance; on voit aisément que par suite de la forme (3) du critère de plasticité, cet ensemble est un cône convexe de sommet  $O$  contenant les directions correspondant à  $P = 0, \underline{m} \geq 0$ .  $\mathcal{S}$  n'est autre que la projection de cet ensemble sur l'espace  $\{P\} \times \{\underline{m}\}$  à  $(N + 1)$  dimensions parallèlement à la direction  $P = C^{te}, \underline{m} = C^{te}$  (\*\*), et est donc un cône convexe de sommet  $O$  contenant les directions  $(0, \underline{m} \geq 0)$ .

On déduit de ces résultats la propriété suivante :

$$\text{si } (P, \underline{m}) \in \mathcal{S} \quad \text{alors, } \forall \underline{m}' \geq \underline{m}, \quad (P, \underline{m}') \in \mathcal{S}. \quad (5)$$

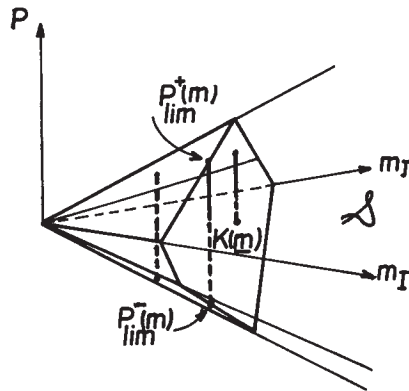


FIG. 5.

Dans le cas de la structure de la figure 1, si l'on suppose les 10 barres de caractéristiques différentes la structure étant 12 fois hypersta-

(\*) C'est-à-dire que la charge  $P$  est limitée pour la structure dimensionnée avec la valeur  $\underline{m}$  des paramètres.

(\*\*) En effet, l'espace des champs de contraintes statiquement admissibles  $\sigma$  est le produit de l'espace des charges  $P$  par l'espace des champs d'autocontraintes pour la structure.

tique, soumise à un processus de chargement à 1 paramètre, l'espace des couples  $(\sigma, \underline{m})$  est de dimension 23, et  $\mathcal{S}$  est une pyramide convexe de sommet  $O$  dans l'espace à 11 dimensions des couples  $(P, \underline{m})$ .

L'optimisation de la structure pour une charge donnée  $P^0$  et relativement à une certaine fonction économique  $\chi$  définie, éventuellement au prix d'approximations, comme une fonction des paramètres de résistance,

$$\chi(\underline{m}) \quad (6)$$

consiste à chercher la valeur de  $\underline{m}$  fournissant avec  $P^0$  un dimensionnement stable (surabondant ou limite), et minimisant  $\chi$ .

$P^0$  étant donné, l'ensemble des  $\underline{m}$  fournissant avec  $P^0$  des dimensionnements stables est évidemment la projection sur l'espace  $\underline{m}$  parallèlement à la direction  $\underline{m} = C^te$ , de l'intersection de  $\mathcal{S}$  et du plan  $P = P^0$ . C'est un convexe non borné  $\mathcal{C}$  du domaine  $\underline{m} \geq 0$  d'après la propriété (5).

Dans le cas de la structure de la figure 1 on obtient pour  $\mathcal{C}$  un polyèdre convexe du type de celui schématisé à la figure 6.

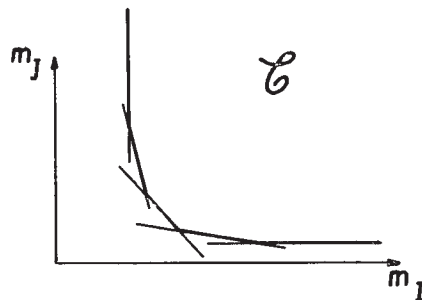


FIG. 6.

On sait d'après les propriétés de  $\mathcal{S}$  que la frontière de ce convexe  $\mathcal{C}$  correspond aux dimensionnements limites pour  $P^0$ . On conçoit donc, sans entrer dans les détails, que la détermination de cette frontière pourra se faire au moyen de deux approches : statique et cinématique.

Dans le cas général le problème d'optimisation apparaît comme la minimisation d'une fonction *légèrement* concave sur un convexe.

Si l'on suppose, comme on le fait le plus souvent, que la fonction  $\chi$  est linéaire en  $\underline{m}$  et si  $g(\sigma)$  dans (3) est linéaire (cas en particulier des structures à barres (4)), on est alors ramené à un problème de programmation linéaire (\*) dont les formulations primale et duale s'interprètent comme les approches statique et cinématique. On en déduit le théorème de Foulkes et autres résultats énoncés par ailleurs.

(\*) Ceci est rigoureux dans le cas de structures à barres soumises à des charges concentrées, et approché (par discrétisation) dans les autres cas.



### 3.2.

Il n'y a aucune difficulté à généraliser ce qui vient d'être dit au cas d'une structure soumise à un processus de chargement dépendant de plusieurs paramètres, comme celle de la figure 3.

Les résultats se transposent intégralement :

$S$  est défini dans l'espace  $\{P\} \times \{m\}$  à  $(n + N)$  dimensions. C'est un cône convexe de sommet  $O$ , contenant les directions  $(0, \underline{m} \geq 0)$ .

Le dimensionnement optimal de la structure pour divers cas de charges imposés  $\underline{P}^1, \dots, \underline{P}^n$ , correspond à trouver  $m$  tel que la structure supporte les charges imposées, et minimisant  $\chi$ .

On est donc amené à prendre dans l'espace  $\{m\}$  l'intersection des convexes  $C^\lambda$  correspondant aux dimensionnements stables pour chaque  $P^\lambda$  (\*) et à minimiser  $\chi$  sur cette intersection.

Ainsi par exemple dans le cas de la figure 3 où  $\underline{P}_1$  et  $\underline{P}_3$  peuvent représenter des surcharges de vent qui ne peuvent être simultanées, on sera amené à optimiser sur le chargement

$$\underline{P}^1 : p_1^1 = a, p_2^1 = b, p_3^1 = 0$$

et sur le chargement

$$\underline{P}^2 : p_1^2 = 0, p_2^2 = b, p_3^2 = 0$$

d'où les deux convexes  $C^1$  et  $C^2$ , la recherche du minimum de  $\chi$  se faisant sur l'intersection  $C = C_1 \cap C_2$ .

## 4 - CONCLUSIONS

Nous n'entrerons pas dans les détails de formulation des problèmes ou même d'autres généralisations possibles. Nous avons simplement voulu dégager quelques idées maîtresses qui interviennent dans le calcul optimal plastique des structures.

Il est intéressant de remarquer pour terminer que, alors que le problème de l'analyse limite d'une structure devient, dans le cas de plusieurs paramètres de chargement, un problème de programmation paramétrique, le problème du dimensionnement demeure évidemment, lui, un problème de programmation simple.

(\*) Chacun de ces convexes  $C^\lambda$  est la projection sur  $\{m\}$  parallèlement à  $\underline{m} = \text{Cte}$ , de l'intersection de  $S$  avec l'hyperplan à  $N$  dimension  $\underline{P} = \underline{P}^\lambda$ .