41

ASSOCIATION UNIVERSITAIRE DE MECANIQUE

DEUXIÈME CONGRES FRANÇAIS DE MÉCANIQUE

15 - 19 SEPTEMBRE 1975

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
TOULOUSE

CONFERENCES GÉNÉRALES

Problèmes de Plasticite

J. SALENCON

1 - INTRODUCTION

Le comportement rigide-parfaitement plastique est certainement le modèle historique de la théorie de la Plasticité. C'est ainsi, pour reprendre des références souvent citées (cf. Prager (1972)), que Galilée (1638) fournit le premier exemple de ce que l'on appelle maintenant le calcul à la rupture d'une poutre, tandis que Coulomb (1773) fit les premiers calculs de poussée des terres, ressortissant eux aussi à l'approche du calcul à la rupture.

L'utilisation de modèles de comportement plus sophistiqués tels que l'élasto-plasticité avec ou sans écrouissage, la visco-plasticité, voire même la thermo-visco-plasticité, envisageable autrefois uniquement sur des problèmes très simples, a vu ses possibilités s'accroître en même temps que les progrès des méthodes de résolution numérique. Toutefois le modèle rigide-parfaitement plastique reste à ce jour celui qui a rendu les plus grands services aux ingénieurs et connu les plus grands développements. Outre les domaines évoqués plus haut, du calcul à la rupture des structures, et de la mécanique des sols pour la théorie de la poussée des terres et des capacités portantes, on a utilisé le modèle rigide-parfaitement plastique pour bien d'autres applications telles que l'étude des problèmes de formage des métaux, d'usinage, et même de taille des roches.

Les raisons essentielles qui ont contribué à ce succès sont les suivantes :

les théorèmes de l'analyse limite classique, fondements des méthodes variationnelles de résolution des problèmes pour le matériau rigide-parfaitement plastique, sont d'une formulation aisée et conforme à l'intuition ;

leur application peut se faire par des moyens rustiques plus simples par exemple que pour les principes de minimum en élasticité : c'est ainsi que dans le cas du milieu continu, on fera très souvent appel à des mécanismes de déformation par blocs avec discontinuités de vitesses, permises par les

équations constitutives de la plasticité ; dans le cas des problèmes plans, la résolution des équations de champs, conduit dans la plupart des cas à un système d'équations aux dérivées partielles hyperbolique, permettant une construction numérique, ou même géométrique, relativement simple des solutions, en utilisant la méthode des caractéristiques ; de plus, le réseau de lignes caractéristiques lui-même fournit en quelque sorte une visualisation de l'écoulement plastique dans le système qui peut être utilisée de diverses façons : c'est la méthode des lignes de glissement (cf. par ex. Salençon, 1975).

C'est en raison même de l'importance du modèle rigide-parfaitement plastique que nous avons choisi de consacrer cet exposé à l'examen de quelques problèmes qui se posent à l'occasion de son utilisation.

Pour les mécaniciens des sols, le problème majeur tient à l'utilisation des méthodes de l'analyse limite pour le matériau de Coulomb. Ce premier point sera abordé dans le cadre plus général de l'étude de la signification du modèle de comportement rigide-parfaitement plastique.

Nous verrons également à cette occasion quelques questions, de convergence notamment, qui se posent à propos de la façon dont on utilise le modèle rigide-parfaitement plastique pour l'étude des problèmes de formage.

Enfin, nous évoquerons l'utilisation, pour ce modèle de comportement, de la méthode des éléments finis.

2 - LA DEFINITION DU MODELE RIGIDE-PARFAITEMENT PLASTIQUE

Nous commencerons d'abord par la définition du comportement rigide-parfaitement plastique, et nous verrons que dès cet instant une démarche de pensée rigoureuse est nécessaire et permet dans la suite de poser les problèmes clairement et de les résoudre.

2.1 - *Le comportement parfaitement plastique*

2.1.1.

La définition classique du comportement parfaitement plastique introduit, on le sait, les deux notions de *critère de plasticité*, et de *règle d'écoulement* .

. *Critère de plasticité* : " QUAND ? "

cette fonction scalaire f du tenseur des contraintes définit le domaine d'élasticité du matériau, G. Considérant pour simplifier le cas du matériau isotrope où f n'est fonction que du tenseur des contraintes de Cauchy $\underset{=}{\sigma}$:

$f(\underset{=}{\sigma}) < o$: comportement purement élastique,

$f(\underset{=}{\sigma}) = o$: déformations plastiques possibles en plus des déformations élastiques.

. *Règle d'écoulement* : " COMMENT ? "

la loi de comportement est de type incrémental. La règle d'écoulement détermine à un facteur scalaire arbitraire près l'ensemble $H(\underset{=}{\sigma})$ des directions possibles de la vitesse de déformation plastique $\underset{=}{d}^p$, connaissant $\underset{=}{\sigma}$ tel que $f(\underset{=}{\sigma}) = o$, et on aura :

$$(2.1)\quad \begin{cases} \cdot\ \underline{\underline{d}}^p \in \lambda H(\underline{\underline{\sigma}}),\ \lambda \geq 0 & \text{si } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 \\ \cdot\ \underline{\underline{d}}^p = 0 & \text{si } f(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 \text{ et } \dot{f} < 0 \\ & \text{ou si } f(\underline{\underline{\sigma}}) < 0 \end{cases}$$

2.1.2.

La *convexité* du domaine d'élasticité G semble être une propriété quasi générale pour les matériaux usuels. Elle sera admise dans toute la suite. Dans ce cas, on prendra pour f (que les propriétés indiquées au § 2.1.1. ne suffisent pas à déterminer de manière unique), une fonction *convexe* de $\underline{\underline{\sigma}}$, finie pour tout $\underline{\underline{\sigma}}$ fini. On notera $\partial f(\underline{\underline{\sigma}})$ le sous-différentiel, et f intervenant dans (2.1) sera :

$$(2.2)\qquad \dot{f} = \sup_{y \in \partial f(\underline{\underline{\sigma}})} \left[tr(\underline{\underline{y}} \cdot \dot{\underline{\underline{\sigma}}}) \right]$$

2.1.3.

On fait souvent appel, pour compléter la définition du comportement plastique, au "principe du travail plastique maximal" (Hill, 1948, 1950) que l'on peut énoncer comme suit :

<u>soit</u> $\underline{\underline{\sigma}} \in G$ $(f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0)$ <u>et</u> $\underline{\underline{d}}^p$ <u>une vitesse de déformation plastique correspondante, alors on a</u> :

$$(2.3)\qquad tr(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{d}}^p) = \max_{\underline{\underline{\sigma}}^* \in G} \left[tr(\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{\underline{d}}^p) \right]$$

Cette hypothèse est compatible avec la règle générale (2.1). Elle implique de plus :

. la convexité de G ,

. la *"normalité"* de la règle d'écoulement, à savoir :

si $f(\underline{\underline{\sigma}}) = o$ et $\dot{f} = o$, $\underline{\underline{d}}^p(\underline{\underline{\sigma}}) \in \lambda\, \partial f(\underline{\underline{\sigma}})$ $\lambda \geqslant o$

On dit encore que la règle d'écoulement est *"associée"*.

Rappelons que la normalité de la règle d'écoulement semble valable pour les matériaux dont le comportement plastique ne dépend que du déviateur des contraintes : elle implique alors que :

$$\text{(2.4)} \qquad tr\,(\underline{\underline{d}}^p) = o \quad ;$$

par contre, elle n'est pas applicable en particulier aux sols d'angle de frottement interne non nul.

2.2 - *Matériau élastique-parfaitement plastique*

La loi de comportement du matériau élastique-parfaitement plastique est définie simplement par :

$$\text{(2.5)} \qquad \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{d}}^e + \underline{\underline{d}}^p$$

où $\underline{\underline{d}}$ est la vitesse de déformation totale,
$\underline{\underline{d}}^e$ la vitesse de déformation élastique,
et $\underline{\underline{d}}^p$ la vitesse de déformation plastique régie par (2.1).

2.3 - *Modèle rigide-parfaitement plastique*

On définira directement le matériau rigide-parfaitement plastique par

$$\text{(2.6)} \qquad \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{d}}^p \quad \text{régie par (2.1)}$$

matériau indéformable hormis plastiquement.

3 - LA SIGNIFICATION DU MODELE RIGIDE-PARFAITEMENT PLASTIQUE

Le comportement rigide-parfaitement plastique n'est evidemment qu'un modèle dont il est clair qu'il conduit nécessairement à des indéterminations, pour le champ de contraintes par exemple, par suite du caractère "indéformable" des zones non plastiques. Il va de soi que de telles indéterminations ne correspondent pas à la réalité physique.

L'idée intuitive qui préside à l'utilisation de ce modèle est que sous certaines hypothèses, et vis à vis de certaines applications, il est possible de faire abstraction de l'élasticité du matériau.

Quelles hypothèses ? Quels types de problèmes ? Vis à vis de quels résultats ? C'est celà que nous entendons par signification du modèle.

3.1 - Définition par passage à la limite

On peut aussi penser à définir le matériau rigide-parfaitement plastique par passage à la limite à partir du matériau élastique-parfaitement plastique, en faisant tendre les modules d'élasticité de celui-ci vers l'infini, et trouver par là la signification du modèle.

Plus précisément, en suivant la démarche de Mandel (1966), on procède de la façon suivante :

. on part d'un système (Σ_λ) élastique-parfaitement plastique de modules d'élasticité $\lambda(\underline{x})$ et de propriétés plastiques définies par son critère et sa règle d'écoulement,

. on fait l'hypothèse que les changements de géométrie sont négligeables jusqu'à, ou presque, l'apparition de l'écoulement plastique libre,

. on démontre, en multipliant les modules $\lambda(\underline{x})$ par un même facteur $\rho > o$ que l'on fait croître, que l'apparition de l'écoulement plastique

libre, si l'on suit le même trajet de charge, se produit au même instant pour (Σ_λ) et pour le système $(\Sigma_{\lambda,\rho})$ rendu de plus en plus rigide au fur et à mesure que $\rho \nearrow \infty$.

On démontre ainsi que, du point de vue de l'écoulement plastique libre commençant, il y a équivalence entre (Σ_λ) et le système $(\Sigma_{\lambda,\infty})$, rigide-parfaitement plastique, défini par ce passage à la limite.

Par contre, l'équivalence entre $(\Sigma_{\lambda,\infty})$ et (Σ_r) système rigide-parfaitement plastique défini à partir de la loi de comportement (2.6) n'est pas démontrée. Ces deux systèmes ne sont évidemment pas identiques puisque, en particulier, il n'apparaît pas d'indétermination du champ de contraintes pour $(\Sigma_{\lambda,\infty})$.

A ce stade, ce qui peut être affirmé est le résultat suivant :

désignons par $\underline{Q}$ le vecteur chargement du système étudié (*), alors :

- pour tout chargement $\underline{Q}$ correspondant à l'apparition de l'écoulement plastique libre dans (Σ_λ), (et dans $(\Sigma_{\lambda,\infty})$), la solution d'équilibre limite correspondante, formée par le couple de champs $(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{d}})$, est également valable pour (Σ_r), et donc :
- tout chargement limite pour $(\Sigma_{\lambda,\infty})$ est chargement limite pour (Σ_r).

Il reste à examiner la proposition réciproque.

3.2 - *Etude des chargements limites de* (Σ_r)

3.2.1. *Conséquences de la convexité de* G

G étant convexe, il en résulte de façon immédiate la convexité de l'ensemble H des champs de contraintes statiquement et plastiquement admissibles.

(*) Processus de chargement dépendant de n paramètres :
$\underline{Q} = (Q_1, \alpha_2, \ldots, Q_n)$

(3.1) $H = \{ \underline{\underline{\sigma}} \mid \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \quad , \quad \underline{\underline{\sigma}}$ en équilibre avec $\underline{Q} \}$

d'où par projection la convexité de l'ensemble K des chargements dits *"licites"*.

(3.2) $K = \{ \underline{Q} \mid \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad , \quad \underline{\underline{\sigma}} \in H \}$

Cet ensemble contient nécessairement tous les chargements que peut supporter le système. On peut, de façon analogue à G le définir au moyen d'un critère convexe φ :

(3.3) $$\varphi(\underline{Q}) = \operatorname*{In\,f}_{\underline{\underline{\sigma}} \,:\, \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{\underline{\sigma}})} \left\{ \operatorname*{Sup}_{\underline{x}} f(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})) \right\}$$

D'autre part, le convexe G peut de façon équivalente à sa définition par f, être défini par sa fonction d'appui que nous noterons

(3.4) $$\pi(\underline{\underline{d}}) = \operatorname*{Sup}_{\underline{\underline{\sigma}} \in G} \left[\operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}.\underline{\underline{d}}) \right]$$

Alors, si pour un champ de vitesse cinématiquement admissible $\underline{u}$ on désigne par $\dot{\underline{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, .. \dot{q}_n)$ le vecteur vitesse de déformation du système, variable duale de $\underline{Q}$ dans l'expression de la puissance, et en posant :

(3.5) $$P(\underline{u}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{\underline{d}}) \, . \, d\Omega$$

où $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} (\text{grad. } \underline{u} + \text{grad.}^t \underline{u})$

on montre que tout chargement de K vérifie :

(3.6) $$\underline{Q} \; \dot{\underline{q}}(\underline{u}) - P(\underline{u}) \leq 0$$

Si Π est la fonction d'appui de K on a :

$$\Pi(\dot{\underline{q}}) \leq \text{In f.P}(\underline{u}) \qquad \underline{u} : \dot{\underline{q}} = \dot{\underline{q}}(\underline{u}) \tag{3.7}$$

Ainsi, on dispose de deux approches du convexe K :

- approche statique, par l'intérieur, au moyen des champs de contraintes ; c'est (3.2) et (3.3);
- approche cinématique, par l'extérieur, au moyen des champs de vitesse ; c'est (3.6) et (3.7).

3.2.2. *Résultats supplémentaires dus à la normalité*

Dans le cas où de plus la règle d'écoulement du matériau est associée, on voit par comparaison de (2.3) et (3.4) que si $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{d}}$ sont associés par la règle d'écoulement on a :

$$\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{d}}) = \pi(\underline{\underline{d}}) \qquad \text{fini ;} \tag{3.8}$$

$\pi(\underline{\underline{d}}) = +\infty$, correspondant au cas où $\underline{\underline{d}}$ n'est pas "plastiquement admissible" , c'est-à-dire n'est pas normal à $f(\underline{\underline{\sigma}}) = o$ à distance finie.

On en déduit alors, par application du principe des puissances virtuelles, que le principe du travail maximal se transmet dans l'espace $\{\underline{Q}\}$:

soient $\underline{Q}$ un chargement, et $\dot{\underline{q}}$ la déformation du système associée, on a :

$$\underline{Q}\,\dot{\underline{q}} = \sup_{Q^* \in K} \left[\underline{Q}^* \cdot \dot{\underline{q}} \right] \tag{3.9}$$

ce dont il résulte que <u>les chargements limites</u> ($\dot{\underline{q}} \neq 0$) <u>sont nécessairement sur la frontière de K</u> .

Ainsi, sous cette hypothèse complémentaire de normalité, on affirme que :

. tous les chargements de K peuvent être supportés par (Σ_r),

. les seuls chargements limites de (Σ_r) sont sur la frontière du convexe K. Sur tout trajet de charge, il n'y a donc qu'un chargement limite pour (Σ_r) donc aussi pour $(\Sigma_{\lambda,\infty})$. C'est l'unicité des chargements limites,

. tous les $(\Sigma_{\lambda,\infty})$ sont équivalents entre eux et à (Σ_r) du point de vue des chargements limites.

On voit de plus que dans ce cas les deux approches du convexe K, statique représentée par (3.3), cinématique représentée par (3.7), ont chacune une signification mécanique, correspondant aux énoncés bien connus du calcul à la rupture:

- d'un côté on affirme qu'un chargement équilibré par un champ de contraintes qui ne viole pas le critère de plasticité sera certainement supporté par le système, (fig. 1),

- de l'autre, qu'un chargement dont la puissance dépasse la dissipation dans un mode de déformation plastiquement admissible, ne sera certainement pas supporté par la structure, (fig. 2) .

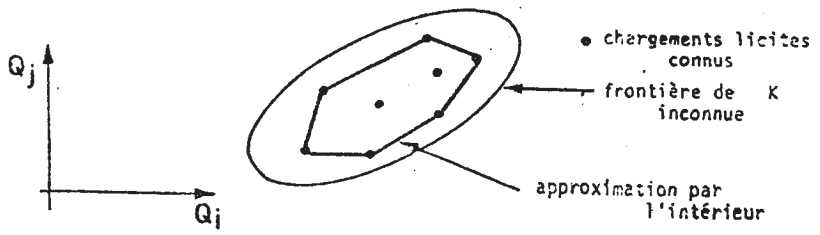

Figure 1 : METHODE STATIQUE

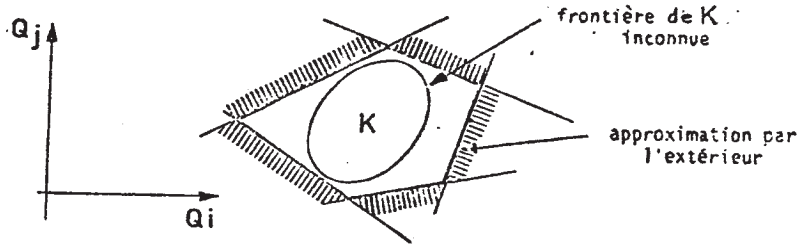

Figure 2 : METHODE CINEMATIQUE

3.3 - *Signification du modèle rigide-parfaitement plastique dans l'hypothèse du principe du travail maximal*

Il n'est pas inutile de rappeler que la conception même du matériau rigide-parfaitement plastique a, à une époque (1950-1953), été le sujet de discussions passionnées entre les plus grands spécialistes de la plasticité (voir les travaux de R. Hill, W. Prager, D.C. Drucker, E.H. Lee, à cette époque) . C'est bien qu'il y avait là une difficulté.

Les résultats du § 3.2 démontrent que sous les deux hypothèses de *convexité* et *normalité* , il y a équivalence entre les deux définitions du rigide-parfaitement plastique (Σ_r) et ($\Sigma_{\lambda,\infty}$) du point de vue des chargements limites, et que de plus, dans l'hypothèse des changements de géométrie négligeables, on obtient ainsi les chargements limites du système élastique-parfaitement plastique (Σ_λ).

En outre, sous ces deux même hypothèses, on démontre même des résultats relatifs aux champs : unicité (*) du champ de contraintes dans les zones déformées de (Σ_r), (Hill, 1951 - Mandel, 1965), et théorème d'association (Salençon, 1972b). Ainsi, si l'on possède une solution d'équilibre limite pour (Σ_r) le champ de contraintes dans la zone déformée est le champ exact. (*)

(*)
On se reportera aux références citées pour la signification précise de ces termes.

4 - EXEMPLES D'UTILISATION DU MODELE RIGIDE-PARFAITEMENT PLASTIQUE DANS L'HYPOTHESE DE CONVEXITE - NORMALITE

4.1 - *Un problème de mécanique des sols*

A titre de premier exemple illustratif, nous mentionnerons le problème de la capacité portante d'une fondation sur un sol d'angle de frottement interne nul et de cohésion fonction linéaire de la profondeur $C = g^{\circ} z = C_1 \frac{z}{a}$ (Salençon, 1974).

La figure 3 représente un champ de contraintes statiquement et plastiquement admissible pour le problème : les contraintes sont constantes dans chaque zone, et égales à :

région 1: $\sigma_{zz} = C_1 x/a, \quad \sigma_{xx} = C_1 x/a, \quad \sigma_{zx} = -C_1 z/a$

région 2: $\sigma_{zz} = C_1 \frac{2x+B/2}{a}, \sigma_{xx} = C_1 \frac{2z-B/2}{a}, \sigma_{zx} = 0$

région 3: $\sigma_{zz} = C_1 \frac{2x+B/2}{a}, \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{zx} = 0$

région 4: $\sigma_{zz} = C_1 2x/a, \quad \sigma_{xx} = -C_1 2z/a, \quad \sigma_{zx} = 0$

région 5: $\sigma_{zz} = C_1 2x/a, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{zx} = 0$

région 6: $\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xx} = -C_1 2z/a, \quad \sigma_{zx} = 0$

région 7: $\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{zx} = 0$

Le profil des contraintes normales sous la fondation est identique au profil de la cohésion avec la profondeur (Fig. 4).

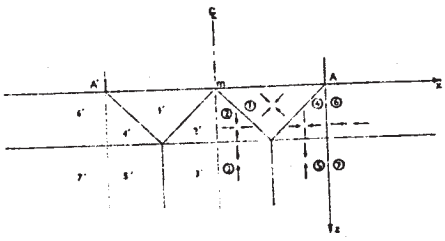

Figure 3 : CHAMP DE CONTRAINTES

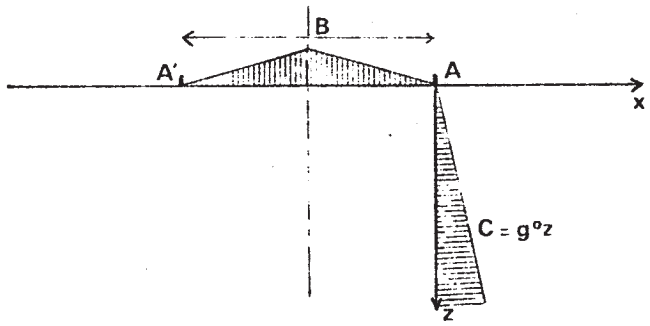

FIGURE 4 : CONTRAINTES SOUS LA FONDATION

Il conduit pour la capacité portante, unique paramètre de chargement du problème, à la minoration :

(4.1) $$p_{ult} \geqslant \frac{1}{4}\, g^{\circ} B$$

D'autre part, la figure 5 représente une classe de mécanismes de déformation cinématiquement et plastiquement admissibles dépendant du paramètre δ . La majoration de p_{ult} correspondante, fonction de δ , tend vers $\frac{1}{4}\, g^{\circ} B$ quand $\delta \searrow 0$.

D'où la majoration :

(4.2) $$p_{ult} \leqslant \frac{1}{4}\, g^{\circ} B$$

et par comparaison avec (4.1) :

(4.3) $$p_{ult} = \frac{1}{4}\, g^{\circ} B$$

Ainsi, pour cet exemple qui dans la pratique schématise certains problèmes de fondation sur sol marin, on obtient par l'application des deux méthodes la valeur exacte de la capacité portante et la distri-

bution des contraintes sous la fondation ; c'est-à-dire tous les renseignements utiles dans la pratique ; il est evidemment exclu d'atteindre à une connaissance quelconque du tassement de la fondation au moyen du modèle rigide-parfaitement plastique.

On remarquera de plus le caractère assez particulier de la solution d'écoulement libre composée du champ de contraintes de la fig. 3 et du champ de vitesse limite quand $\delta \searrow 0$ de celui de la fig. 5.

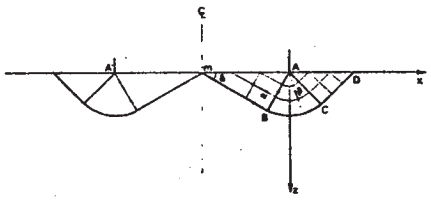

Figure 5 :
MECANISMES DE DEFORMATION

Les cas où l'utilisation des méthodes statique et cinématique de l'analyse limite conduit à une valeur exacte de chargement limite et à une solution d'écoulement libre sont très rares. Le plus souvent on n'obtient qu'un encadrement des chargements limites et même, puisque la méthode cinématique est, en règle générale, d'un emploi plus facile que la méthode statique, on a essentiellement une borne supérieure des chargements limites, la borne inférieure étant soit triviale soit simpliste.

Pour des problèmes tels que celui évoqué ci-dessus de la capacité portante d'une fondation, ou de la hauteur limite d'une fouille verticale non coffrée, cette absence de renseignements valables "du côté de la sécurité" est évidemment un gros inconvénient.

On s'efforce donc de faire en sorte que les résultats obtenus soient le plus significatif possible. Pour celà, utilisant l'intuition mécanique de l'ingénieur, on essaiera de construire des mécanismes de déformation qui représentent "bien" le phénomène physique, pour prendre parmi eux celui qui minimise la puissance dissipée. On peut aussi essayer d'appliquer la méthode, en minimisant la puissance dissipée $P(\underline{u})$ sur un sous espace des modes de déformation cinématiquement et plastiquement admissibles, dépendant d'un grand nombre de paramètres, d'où l'idée d'utiliser la méthode des éléments finis dont nous reparlerons au § 6 qui remplacerait l'intuition mécanique par un ordinateur !

4.2 - *Problèmes de mise en forme*

Pour les problèmes de formage, le problème se pose en général de façon un peu différente de ceux envisagés au § *4.1.*

En effet, on a affaire à un procédé industriel, dépendant d'un grand nombre de paramètres, que l'on cherche à améliorer en examinant tout ou partie des points suivants :

- coût énergétique,
- qualité des pièces produites, et fiabilité,
- simplicité du procédé,
- rendement, etc...

La démarche suivie habituellement pour l'étude de ce genre de problèmes consiste à essayer, en adoptant pour le matériau le modèle de comportement rigide-parfaitement plastique, d'imaginer un modèle pour le procédé de mise en forme lui même. Ce modèle sera alors utilisé pour comprendre le procédé :

- identifier les causes possibles de formation de défauts, et les conditions d'apparition de ceux-ci,
- examiner l'influence des divers paramètres du procédé et en particulier les sens de variation.

Pour la modélisation du procédé, on fait appel soit aux méthodes statique ou cinématique de l'analyse limite, soit à la "méthode des tranches" (cf. Baqué et col., 1973). Cette dernière ne peut en général pas s'interpréter par l'analyse limite et n'a donc alors aucune justification rigoureuse ; mais la modélisation obtenue est souvent satisfaisante tant du point de vue qualitatif que même quantitatif.

Pour ce qui est des méthodes de l'analyse limite, leur utilisation pour l'étude des problèmes de mise en forme, va elle aussi souvent au-delà de ce qui est acquis et justifié du point de vue théorique, et fait appel à des hypothèses heuristiques qui, alliées à l'intuition mécanique, conduisent à des résultats pratiques utilisables. Ainsi,

. pour l'approche cinématique, on s'appuiera sur l'idée intuitive que, parmi plusieurs mécanismes de déformation imaginés pour un même procédé, celui qui minimise la puissance dissipée $P(\underline{u})$ est celui qui est "le plus proche du mécanisme réel" (Baqué et al., 1973);

. pour l'approche statique, parmi plusieurs champs de contraintes statiquement et plastiquement admissibles, on considérera que celui qui maximise la charge donne la meilleure représentation du champ de contraintes réel;

. de plus même, si le meilleur mécanisme trouvé dans l'approche cinématique est obtenu par la méthode des lignes de glissement (pour un problème plan) et fait partie d'une solution "incomplète" au sens de Bishop (1953), on considérera que les contraintes correspondantes donnent aussi une bonne image des contraintes réelles.

On conçoit que du point de vue mathématique il serait peut être possible de démontrer des théorèmes de convergence pour les méthodes statique et cinématique, après avoir procédé à la définition des normes et des espaces appropriés (*) ; compte-tenu des exemples connus de solutions d'écoulement libre, où le champ de contraintes dans les zones rigides n'est pas unique, il semble que seul un théorème de convergence du champ

---

(*) A notre connaissance, le problème est ouvert, et pourrait être envisagé à l'occasion de l'emploi de la méthode des éléments finis pour le matériau rigide-parfaitement plastique.

de contraintes dans les zones déformées serait à rechercher. En tout état de cause, l'application d'un tel théorème à l'échelle du choix entre quelques mécanismes ou champ de contraintes, voire même entre des mécanismes dépendant de quelques paramètres, ne justifierait certainement pas les règles empiriques ci-dessus.

Ainsi, pour les problèmes de mise en forme, l'utilisation qui est faite des approches de l'analyse limite n'est souvent pas plus rigoureuse que la méthode des tranches.

Nous avons tenu à signaler cette absence de fondements théoriques, non pour jeter le discrédit sur les méthodes correspondantes qui ont fait la preuve de leur efficacité pratique (cf. par ex. Kobayashi (1965), Johnson et Kudo (1962), etc...), mais pour attirer l'attention sur le fait qu'elles doivent être employées avec bon sens. Ainsi, il paraît raisonnable de penser que la règle énoncée concernant l'emploi de la méthode cinématique doit être approximativement valable si l'on sait imaginer, pour procéder au choix parmi eux, des mécanismes de déformation appartenant à tous les types potentiels, c'est-à-dire faisant intervenir comme zones déformées toutes les zones potentiellement critiques telles que : coin chargé, interfaces et conditions de frottement, etc... (notion un peu analogue à celle de section potentiellement critique dans le calcul à la rupture des structures à barres).

A titre d'exemple illustratif de ce qui vient d'être dit, nous considérerons un problème simplifié d'extrusion avant (filage) en déformation plane : extrusion sans frottement , sans conteneur (à travers une filière d'angle α pour le rapport de réduction :
$\rho = (H - h)\ H = 2 \sin\alpha\ /\ (1 + 2 \sin\alpha\ )$.

La solution dont le réseau de lignes de glissement est représenté à la figure 6 fournit pour la pression moyenne d'extrusion la valeur :

$$p_m\ /\ 2k = \rho\ (1 + \alpha) \tag{4.4}$$

k désignant la cission limite du matériau de Tresca ou Mises, représentée par l'arc 1 sur la figure 9 (solution incomplète au sens de Bishop).

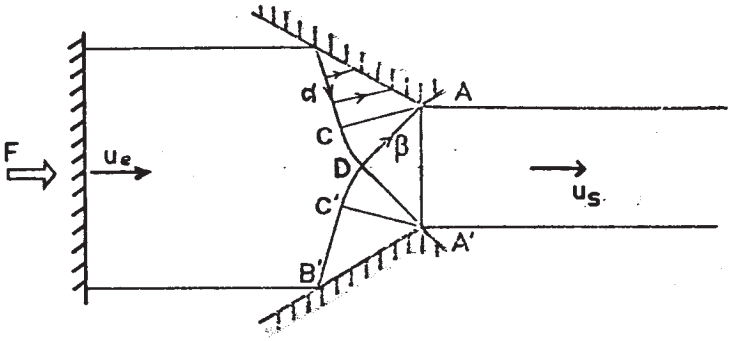

Figure 6 :
EXTRUSION SANS REFOULEMENT

Dans ce mécanisme, la zone potentiellement critique qui intervient est le coin chargé A .

Pour $\alpha > 42,3°$ la pression moyenne donnée par (4.4.) est supérieure à la résistance en compression en déformation plane ($p_m = 2k$) ce qui conduit à imaginer le mécanisme d'écrasement par blocs de la figure 8, valable tant que le culot a une longueur supérieure à 2H. On a alors :

(4.5) $$p_m / 2k = 1$$

représenté par le plateau 2 sur la figure 9.

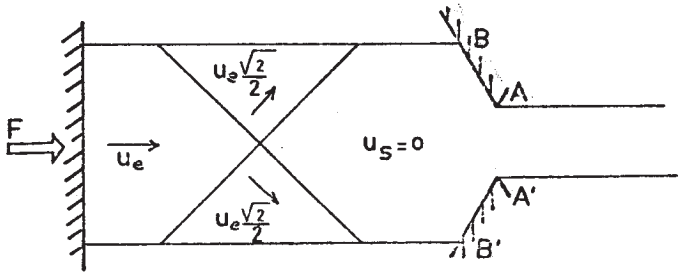

Figure 7 :
ECRASEMENT EN AMONT

Dans ce mécanisme, la zone potentiellement critique qui intervient est la partie amont du lopin soumise à une sollicitation du type "compression sans étreinte".

En ne comparant que les deux mécanismes ci-dessus, on serait tenté d'affirmer que pour les grands angles α il n'y aura pas d'extrusion, aucun débit vers l'aval, seulement un écrasement pur et simple du lopin en amont. Pourtant, un autre mécanisme faisant intervenir comme zone potentiellement critique le coin chargé B , peut être imaginé (fig. 8) ; il y a alors extrusion avec refoulement ; il fournit pour la pression d'extrusion la valeur :

$$p_m / 2k = \rho\,(1 + \pi/2 - \alpha)\ , \tag{4.6}$$

qui prend très rapidement le pas sur (4.4) : arc 3 sur la figure 9. Ce mécanisme donne d'ailleurs une solution complète d'écoulement libre pour $\alpha = \pi/2$.

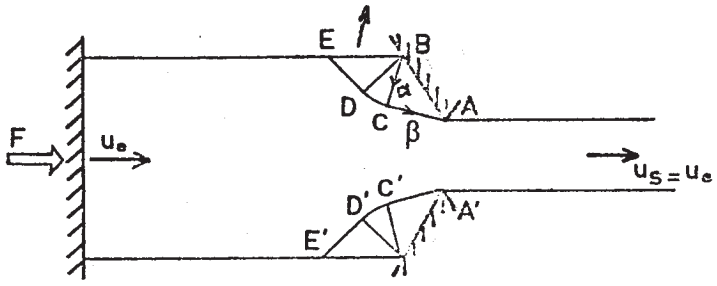

Figure 8 :

EXTRUSION AVEC REFOULEMENT

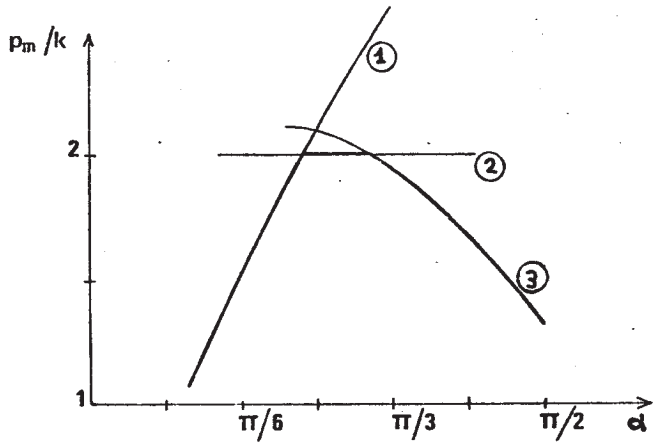

Figure 9 :

PRESSION D'EXTRUSION

Ces trois mécanismes de déformation sont bien insuffisants pour permettre de tirer des conclusions sur toute la gamme des valeurs de α :

- Il parait vraisemblable que celui de la figure 8 sera valable pour les grandes valeurs de α puisqu'il fournit une solution complète pour $\alpha = \pi/2$,

- pour obtenir des renseignements sur les faibles valeurs de α , il serait nécessaire de compléter la solution de la figure 6 du point de vue des ontraintes. L'utilisation d'une méthode apparentée à celle de Bishop (1953) ne paraît pas présenter de grandes difficultés, et le mécanisme de la figure 6 apparaîtrait comme valable tant que α n'est pas trop grand,

- dans la gamme des valeurs de α intermédiaires, le mécanisme d'écrasement pur, sorte de garde-fou, ne paraît malgré tout pas plausible.

D'une manière générale, on peut dire que dans l'application du modèle rigide-parfaitement plastique à l'étude des problèmes de mise en forme, il est essentiel que "l'imagination soit au pouvoir" pour concevoir la modélisation quelle que soit la méthode employée : défi exaltant pour un ingénieur de recherche !

5 - SIGNIFICATION DU MODELE RIGIDE-PARFAITEMENT PLASTIQUE DANS LE CAS D'UNE REGLE D'ECOULEMENT NON ASSOCIEE

5.1 - Les résultats acquis

Revenons maintenant à la question de la signification du modèle rigide-parfaitement plastique. Si l'hypothèse de normalité n'est pas satisfaite, et que l'on ne dispose que de la propriété de convexité du critère de plasticité, tous les résultats énoncés au § *3.2.1* concernant K et les deux manières duales de l'approcher demeurent, mais l' *unicité* des chargements limites N'EST PLUS DEMONTREE, (Melan (1938), DRUCKER (1956)).

Ainsi, le convexe K contient tous les chargement que pourrait supporter le système (Σ_λ) et la frontière de K représente en quelque sorte le "maximum de possibilités" du système ; mais seule l'hypothèse de normalité de la règle d'écoulement permet d'affirmer que quelles que soient les circonstances le système ira toujours jusqu'au bout de ses possibilités. Principe de travail maximal = principe de bienveillance du matériau.

Autrement dit, sur un même trajet de charge il n'est pas exclu qu'un même chargement soit ou ne soit pas limite pour (Σ_λ) suivant les propriétés élastiques de (Σ_λ) ; de même qu'il n'est pas exclu qu'un même chargement soit ou ne soit pas limite pour le même (Σ_λ), selon le trajet de charge suivi pour l'atteindre.

Les deux définitions du "rigide-parfaitement plastique (Σ_r) et ($\Sigma_{\lambda,\infty}$) ne sont plus équivalentes.

De plus, sans l'hypothèse de normalité, l'approche cinématique, représentée par (3.6) et (3.7), conserve son caractère d'approximation par excès, mais elle perd sa signification mécanique, car les champs $\underline{u}$ utilisés dans (3.6) et pour lesquels $P(\underline{u}) < +\infty$ ne correspondent pas à des modes de déformation réellement possibles pour le système (ils satisfont la règle de normalité et non la vraie règle d'écoulement). Par contre, l'approche statique, si elle conserve sa signification mécanique, perd son caractère "d'approximation par défaut" : on n'est plus certain qu'un chargement équilibré par un champ de contraintes plastiquement admissible sera toujours supporté par le système.

5.2 - *Conséquences en mécanique des sols*

Il convient peut être aussi d'insister sur le fait que les conditions de frottement aux interfaces entre elles aussi en ligne de compte au même titre que les propriétés plastiques des matériaux proprement dites. Ainsi, dès que l'on a affaire à une condition de frottement de Coulomb, la règle de normalité n'est plus satisfaite par le système. Il se trouve qu'un tel type de condition de frottement se rencontre rarement dans les problèmes de formage par exemple, où l'on adopte plutôt un modèle de frottement dit "*de couche*", qui satisfait la règle de normalité.

Aussi, ce sont surtout les mécaniciens des sols qui se sont trouvés confrontés aux problèmes liés à la non-normalité de la règle d'écoulement, tant du matériau (matériau de Coulomb) que des conditions de frottement.

5.2.1 *Paradoxes du calcul à la rupture*

Les théorèmes de l'analyse limite dans le cas où il y a normalité de la règle d'écoulement (§ 3.2.2), ont des énoncés qui paraissent conformes au bon sens et à l'intuition. Ce sont les énoncés usuels

du calcul à la rupture. Cet aspect intuitif peut conduire à les utiliser par inadvertance hors de leurs conditions de validité, c'est-à-dire essentiellement lorsque l'hypothèse de normalité n'est pas satisfaite.

Des contre exemples ont été donnés par Drucker (1954) et Salençon (1972a) dans des cas de non-normalité de conditions de frottement dans la deuxième référence, on a mis en évidence un champ de contraintes plastiquement admissible équilibrant un chargement dont la puissance dans un mécanisme de déformation cinématiquement et plastiquement admissible dépassait la puissance dissipée :

$\int_\Omega \mathrm{tr}\,(\underline{\underline{\sigma}}.\,\underline{\underline{d}})\,d\Omega$ ($\underline{\underline{\sigma}}$ tenseur des contraintes associé à $\underline{\underline{d}}$ par la règle d'écoulement)

qui se trouvait définie sans ambiguïté (fig. 10) ; ce chargement était-il stable ou instable ?

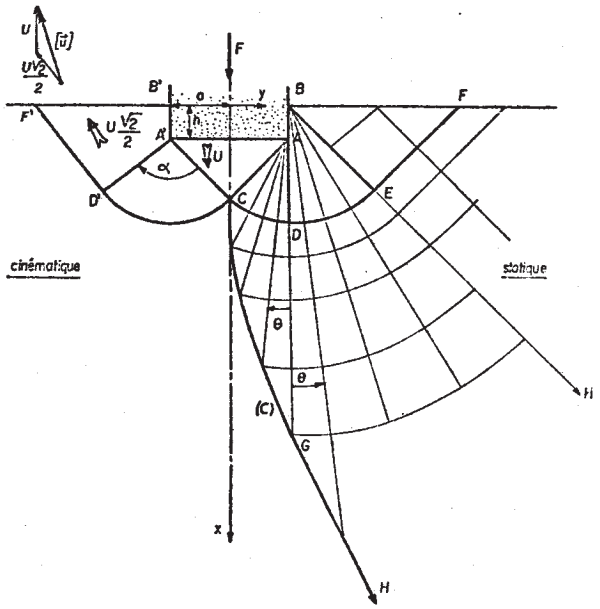

Figure 10 :

FONDATION PEU PROFONDE SUR MATERIAU DE TRESCA AVEC FORT FROTTEMENT DE COULOMB AUX INTERFACES

Un autre contre exemple s'appuyant sur la non normalité de la règle d'écoulement des matériaux eux mêmes peut être construit à partir de calculs effectués par Davis et Booker (1971).

Considérons le problème de la capacité portante d'une fondation (semelle filante) sur un sol pulvérulent pesant sans surcharge. Le sol obéissant au critère de Coulmb défini par un angle de frottement interne ϕ , on adopte pour règle d'écoulement celle proposée par Bent Hansen (1958) définie par un angle de dilatation ψ ($o \leqslant \psi \leqslant \phi$). Davis et Booker (1971), en utilisant la théorie des équilibres limites plans pour ce type de matériaux, ont construit des solutions d'écoulement libre complètes (fig. 11). Ainsi, pour $\phi = 30°$, les solutions ont été construites pour $\psi = 30°$ (c'est-à-dire $\psi = \phi$, l'hypothèse de normalité est satisfaite) $\psi = 20°$, 10°, 0° ; les valeurs suivantes ont été obtenues pour le coefficient N_γ intervenant dans la formule de capacité portante :

ψ	30°	20°	10°	0°
N_γ	14.96	14.94	14.92	14.80

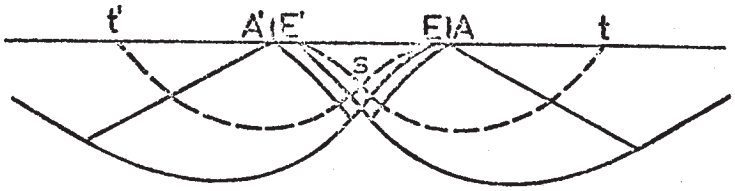

Figure 11 :

CARACTERISTIQUES DES CONTRAINTES ET DES VITESSES

($\phi = 30°$ $\psi = 0°$)

On remarque sur ces résultats que la valeur de N_γ pour $\nu = \phi = 30°$ est obtenue au moyen d'un champ de contraintes dont le caractère statiquement et plastiquement admissible est évidemment indépendant de la valeur de ν ; autrement dit, 14.96 est donc une valeur obtenue par la méthode statique, valable $\forall \nu$. Cette valeur est supérieure à celle fournie pour chaque valeur de ν par la solution d'écoulement libre complète construite.

Il est à noter, sans que l'on puisse en tirer de conclusion générale, que les solutions complètes d'écoulement libre construites pour $\nu \neq \phi$ ont conduit à des valeurs des chargements limites possibles peu inférieures à la charge limite du matériau à règle d'écoulement associée : 1% d'écart au maximum. (*)

Enfin, on insistera sur le fait que les deux exemples ci-dessus ne constituent des paradoxes que vis à vis des énoncés intuitifs du calcul à la rupture, mais sont evidemment en concordance avec le § *5.1*.

5.2.2 *Le matériau de Coulomb "standard"*

. Radenkovic (1961) a proposé de désigner par "standard" le matériau éventuellement fictif, de critère de plasticité convexe f , et dont la règle d'écoulement est NORMALE. Il a fait remarquer que l'utilisation de la méthode cinématique de l'analyse limite classique pour le système standard conduirait toujours à une approximation par excès des chargements limites pour le système à règle d'écoulement quelconque (cf. § *5.1)* L'utilisation ainsi proposée du matériau de Coulomb standard n'a pas toujours été très bien accueillie par certains mécaniciens des sols qui y voyaient une modélisation abusive. En fait, la présentation adoptée ici met bien en évidence qu'il ne s'agit que d'une tentative pour donner un aspect palpable à un procédé mathématique, à savoir la détermination du convexe K au moyen de sa fonction d'appui (cf. formules (3.6) et (3.7)).

(*) En fait, cet écart est d'autant moins significatif qu'il est de l'ordre de la précision que l'on peut attendre de ce genre de calculs : ainsi, d'autres auteurs ont trouvé, en appliquant la même méthode de calcul 14.77 pour N_γ ($\phi = \nu = 30°$) . C'est donc la position relative des divers N_γ trouvés que leurs valeurs absolues qui est intéressante dans ce résultat.

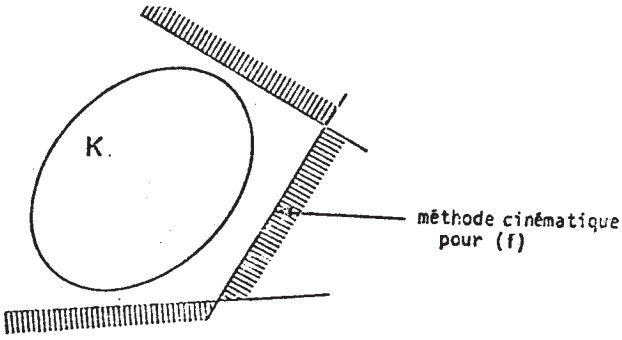

Figure 12 :

METHODE CINEMATIQUE POUR LE MATERIAU NON STANDARD

. Quant à l'utilisation de la méthode statique pour le matériau de Coulomb standard, non proposée par Radenkovic, et qui ne conserve plus, nous l'avons dit, le caractère d'approximation par défaut des chargements limites pour les systèmes non standards, elle peut être envisagée du simple point de vue de la détermination de la frontière K , dont l'intérêt pratique découle de ce qui a été dit au § *5.1* et *5.2.1*.

. Remarquons que certaines démonstrations classiques en mécanique des sols font, sans le dire, appel à la notion de matériau standard : ainsi, pour démontrer que la méthode de superposition utilisée par exemple pour les calculs de poussées des terres ou de capacités portantes va dans le sens de la sécurité, on montre que le champ de contraintes obtenu par cette méthode est en équilibre sans violer le critère de Coulomb du sol, ce dont on déduit le résultat énoncé. Ce faisant, on applique donc le théorème de l'approche statique, supposant ainsi implicitement que l'on a affaire à un matériau de Coulomb "standard" !

(*) A noter que malgré les apparences, il y a certains problèmes où cette approche va dans le sens de la sécurité : c'est le cas lorsque l'on cherche à déterminer la puissance d'un engin destiné à provoquer la ruine du système (coupe, broyage, etc...), cf. NGUYEN M.D., 1974).

5.2.3. *Equilibres limites plans ou à symétrie axiale*

On sait que les solutions obtenues en utilisant la théorie des équilibres limites plans ou à symétrie axiale (courbe intrinsèque + hypothèse de Haar-Karman) nécessitent pour leur interprétation le recours aux théorèmes de l'analyse limite. Dans le cas des matériaux de Mises ou de Tresca, on dispose des théorèmes des matériaux standards qui non seulement permettent une interprétation précise, mais servent de guides dans la construction des solutions.

L'étude de ces problèmes pour la mécanique des sols avec le matériau de Coulomb a fait l'objet de travaux de nombreux chercheurs. Sans prétendre à une liste exhaustive, on citera : Sokolovski, Mandel, Berezancew, Kravtchenko et l'équipe de recherche de l'Université de Grenoble avec Auriault, Biarez, Boehler, Nègre, Sibille, Stutz,..., Booker et Davis à Sydney, Olszak, Rychlewsky, Szczepinski, Ostrowska, Drescher, etc... à Varsovie, Meyerhof, etc...

En règle générale, s'agissant du matériau de Coulomb, le problème en vitesses n'est pas évoqué et la construction des solutions se fait par analogie avec les solutions valables pour le matériau de Tresca, de même que leur interprétation (on ne peut d'ailleurs dissocier l'une de l'autre). En fait, il paraît bien que cette façon de procéder revienne à supposer que le matériau satisfait la condition de normalité : on construit des solutions pour le matériau de Coulomb standard.

Plusieurs chercheurs (Bransby et James, 1971 ; Davis et Booker, 1971, Drescher, 1971, 1972 ; Szczepinski, 1971 ; Serrano, 1972 ; Stutz, 1963 Nègre, 1968) se sont récemment intéressés à la construction de solutions de problèmes plans d'équilibre limite dans le cas d'un sol défini par un angle de frottement interne ϕ et un angle de dilatation ν : il s'agit le plus souvent de solutions incomplètes dans lesquelles le champ de contraintes est en équilibre et à la limite d'écoulement dans une partie du système, tandis que le champ de vitesses associé par la règle d'écoulement non normale est connu partout ; la signification des résultats fournis par ce type de solutions resterait à préciser.

5.3 - *Théorème de Radenkovic*

Pour le matériau non standard on a cherché à obtenir une approximation par l'intérieur de la zone des chargements limites possibles.

C'est le but du théorème énoncé par Radenkovic (1961, 1962), Palmer (1966), pour certains matériaux, qui introduit un matériau standard fictif défini à partir de la règle d'écoulement du matériau non standard. Malheureusement, à part le cas où le caractère non standard du système provient uniquement des conditions de frottement, et où on retrouve un théorème de Drucker (1954), le théorème de Radenkovic conduit rarement dans la pratique à une frontière intérieure intéressante (c'est le cas en particulier pour le matériau de Coulomb dont la règle d'écoulement est définie par un angle de dilatation $\nu = o$). De Josselin de Jong (1964, 1973) a tenté de proposer un théorème allant dans le même esprit que le précédent, et tenant compte des conditions particulières du problème afin d'obtenir des résultats de portée plus grande.

5.4 - *Conclusions*

En résumé de ce qui a été dit ci-dessus, il apparaît que dans le cas où l'hypothèse de normalité n'est pas satisfaite, le modèle rigide-parfaitement plastique a une signification moins précise, car on ne démontre plus l'unicité des chargements limites.

Deux voies semblent intéressantes :

- d'une part l'utilisation du modèle rigide-parfaitement plastique standard; étant bien entendu qu'il ne s'agit que d'un outil mathématique auquel on ne prétend pas attribuer la moindre réalité physique ; celui-ci permettra en particulier l'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'approche cinématique de K pour le matériau de Coulomb.

- d'autre part, la construction de solutions d'écoulement libre pour le matériau non standard, en particulier pour le matériau de Coulomb défini par $\phi \neq o$ et $\nu = o$; quelques résultats relatifs à l'unicité pourraient peut être être obtenus par cette voie, notamment dans le cas des problèmes plans.

6 - METHODE DES ELEMENTS FINIS ET MODELE RIGIDE-PARFAITEMENT PLASTIQUE

Pour terminer cet exposé de quelques problèmes concernant le modèle rigide-parfaitement plastique, nous évoquerons l'utilisation directe de la méthode des éléments finis pour ce modèle.

L'idée fondamentale est d'approcher le convexe K par la méthode statique ou la méthode cinématique en utilisant la méthode des éléments finis pour construire des champs de contraintes ou de vitesses que l'on utilise dans *(3.2 , 3.3)* ou *(3.6 , 3.7)*.

Il n'est pas dans notre intention d'entrer ici dans les détails des travaux effectués par divers auteurs sur ce sujet, mais simplement d'indiquer à grands traits les caractéristiques des diverses méthodes employées, et les difficultés rencontrées.

L'approche statique a été utilisée entre autre par Anderheggen et Knöpfel (1972), Lysmer (1970), Maier et Al. (1972), Nguyen Dang Hung (1972), Zavelani-Rossi (1972). Elle nécessite de mailler la totalité du système étudié. Le champ de contraintes construit par la méthode des éléments finis doit être en équilibre, et de plus il ne doit violer le critère de plasticité en aucun point.

L'approche cinématique a été utilisée par Frémond et al. (1974). Elle laisse le choix de la zone à mailler qui peut ne pas recouvrir tout le système : on maille les parties du système où l'on suppose a priori à partir de l'intuition mécanique ou de constatations expérimentales, que la déformation va se produire, le reste du système est supposé indéformé. Le champ de vitesses construit par la méthode des éléments finis doit être cinématiquement admissible (conditions à la limite). Mais la difficulté essentielle provient de la fonctionnelle à minimiser :

en effet, revenant à (3.4 , 3.6, 3.7) on voit que l'on est conduit à un problème de point-selle qui traduit le fait que les seuls champs de vitesses conduisant à des résultats non triviaux sont ceux pour lesquels la vitesse de déformation est normale à G . Dans le cas du matériau de von Mises par exemple, celà signifie que le champ de vitesses doit être à divergence nulle, condition dont on sait le caractère très contreignant.

Il est à remarquer que dans cette utilisation de la méthode des éléments finis, aussi bien dans le cas de l'approche statique que dans celui de l'approche cinématique, il peut se faire :

- que les champs de contraintes utilisés ne soient pas rigoureusement plastiquement admissibles.
  Par exemple : critère pris en moyenne sur un élément, critère linéarisé en linéarisant par morceaux la fonction d'appui, ...

- que la fonctionnelle $P(\underline{u})$ utilisé dans (3.6) (3.7) ne soit qu'une approximation.
  Par exemple : dans (3.4) Sup pris sur un espace plus petit que G, ce qui est évidemment nécessairement le cas si G est infini dans une direction (matériau de von Mises par exemple ; dans (3.5), interversion des opérations $\int$ et Sup. au niveau de quelques éléments, ce qui revient à prendre la condition de normalité en moyenne sur ces éléments ; ...).

Ceci a pour conséquence que l'on n'est plus certain du caractère statique ou cinématique de la solution obtenue, ce qui pose donc un problème au niveau de l'interprétation des résultats : approche par l'intérieur ou par l'extérieur ?

En fait, il s'agit là d'inconvénients inhérents à tout traitement de problème par voie numérique, et dont il convient de ne pas éxagerer l'importance. La question se pose d'ailleurs déjà, on le sait, dès le stade "statiquement admissible" et "cinématiquement admissible", pour satisfaire les équations d'équilibre et les conditions aux limites indépendamment donc du comportement du matériau.

A notre connaissance, le problème de la convergence de ces méthodes du point de vue des champs est ouvert. Comme on l'a dit, on peut raisonnablement espérer en un théorème de convergence du champ de contraintes dans les zones déformées, dont l'importance pratique, pour les problèmes de mise en forme par exemple, est évidente.

Il convient peut être d'insister une dernière fois sur le fait que l'on doit voir dans la méthode des éléments finis en contraintes ou en vitesses, un moyen pour approcher par l'intérieur ou par l'extérieur le convexe K , indépendamment de la règle d'écoulement réelle du matériau. La signification de K suivant que cette règle d'écoulement est ou n'est pas normale a été examinée plus haut (§ 3 et 5).

7 - CONCLUSIONS

Le but de cet exposé n'était pas de chanter un hymne à la gloire unique du modèle rigide-parfaitement plastique. Nous avons voulu essentiellement en donner une présentation aussi claire que possible permettant d'en dégager la signification.

Au moment où, grâce à la méthode des éléments finis et aux moyens de calculs puissants, le modèle élastique-plastique devenu exploitable connaît une grande "popularité", il nous a aussi paru souhaitable de rappeler que le modèle rigide-parfaitement plastique constituait un outil de travail rustique pour l'ingénieur, utilisable avec des moyens de calcul modestes et de l'imagination.

Enfin, le domaine, encore assez peu exploré, de l'application de la méthode des éléments finis à ce modèle, nous paraît pouvoir fournir un champ de recherches intéressantes mais difficiles.

REFERENCES

ANDERHEGGEN E. & KNOPFEL M. (1972) - *Finite element limit analysis using linear programming*. Int. Jl. Solids Structures, vol.8, pp. 1413-1431.

BAQUE P., FELDER E., HYAFIL J. et d'ESCATHA Y. (1973) - *Mise en forme des métaux, calculs par la plasticité*. Dunod, Paris, 1973.

BENT HANSEN (1958) - *Line ruptures regarded as narrow rupture zones*... C.R. Conf. sur les Problèmes de poussées des terres, Bruxelles, vol. 1, pp. 39-49.

BISHOP J.F.W. (1953) - *On the complete solution to problem of deformations of a plastic rigid material*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 2, n°1, pp. 43-53.

BRANSBY P.L. & JAMES R.G. (1971) - *A velocity field for some passive earth pressure problems*. Géotechnique, vol. 21, n°1, pp. 61-83.

COULOMB Charles-Augustin (1773) - *Essai sur l'application des règles de Maximis & Minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'Architecture*.

DAVIS E.H. & BOOKER J.R. (1971) - *The bearing capacity of strip footings from the standpoint of plasticity theory*. Univ. Sydney, Civ. Engng. Lab. Res. Rept. R 170.

DRESCHER A. (1971) - *A note on plane flow of granular media*. Problèmes de la Rhéologie, Symp. Franco-Polonais, Varsovie 1971, pp. 135-144.

DRESCHER A. (1972) - *Some remarks on plane flow of granular media*. Arch. of Mechanics, vol. 24, n° 5-6, pp. 837-848.

DRUCKER D.C., GREENBERG H.J. & PRAGER W. (1951) - *The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain*. J. Appl. Mech. Trans. A.S.M.E, vol. 18, p. 371.

DRUCKER D.C., PRAGER W. & GREENBERG H.J. (1952) - *Extended limit design theorems for continuous media*. Quart. Appl. Math., vol. 9, p. 381.

DRUCKER D.C. (1954) - *Coulomb friction plasticity and limit loads*. J. Appl. Mech. Trans. A.S.M.E, vol. 21, n°1, pp. 71-74.

DRUCKER D.C. (1956) - *On uniqueness in the theory of Plasticity*. Quart. Appl. Math., vol.14, n°1, pp. 35-42.

FREMOND M., PECKER A. & SALENÇON J. (1974) - *Méthodes variationnelles pour le matériau rigide-plastique*. Symp. Franco-Polonais "Rhéologie et Mécanique des Sols", Nice, 1974.

GALILEE G. (1638) - *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze*. Leyden, 1638, p. 114.

HILL R. (1948) - *A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity*. Quart. J. Mech. & Appl. Math., vol.1, p. 18.

HILL R. (1950) - *The mathematical theory of Plasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1950.

HILL R. (1951) - *On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point*. Phil. Mag., vol. 42, pp. 868-875.

HILL R. (1952) - *Comment on Dr. Lee's paper*. Phil. Mag., vol. 43, n°7, pp. 560-561.

JOHNSON W. & KUDO H. (1962) - *The mechanics of metal extrusion*. Manchester University Press (G.B), 1962.

de JOSSELIN de JONG G. (1964) - *Lower bound collapse theorem and lack of normality of strain rate to yield surface for soils*. Proc. IUTAM Symp. on Rheology and Soil Mech., Grenoble, pp. 69-75.

de JOSSELIN de JONG G. (1973) - *A limit theorem for materials with internal friction*. Proc. Symp. on the Role of Plasticity in Soil Mechanics, Cambridge (G.B), pp. 12-21.

KOBAYASHI S. (1965) - *Mechanics of plastic deformation in metal processing*. Mc Millan, 1965.

LEE E.H. (1952) - *On the significance of the limit load theorems for an elasticplastic body*. Phil. Mag., vol. 43, n°7, pp. 549-560.

LYSMER J. (1970) - *Limit analysis of plane problems in Soil Mechanics*. Jl. of Soil Mech. & Foundation Div. ASCE, vol. 96, n° SM4, July 1970, pp. 1311-1334.

MAIER G., ZAVELANI-ROSSI A., BENEDETTI D. (1972) - *A finite element approach to optimal design in plane stress*. Int. J. Num. Meth. Engng., vol.4, 1972, pp. 455-473.

MANDEL J. (1965) - *Sur l'unicité du champ de contraintes lors de l'équilibre limite dans un milieu rigide-plastique*. C. R. Ac. Sc., Paris, t. 261, pp. 35-37.

MANDEL J. (1966) - *Cours de Mécanique des milieux continus, Annexe XX.* Gauthier-Villars, Paris, 1966.

MELAN E. (1938) - *Zur Plastizität der räumliches Kontinuums*. Ingenieur Archiv, vol. 9, pp. 116-126.

NEGRE R. (1968) - *Contribution à l'étude de l'équilibre limite des sols et des matériaux pulvérulents et cohérents*. Th. Doct. es Sc. Grenoble.

NGUYEN DANG HUNG (1972) - *Analyse limite rigide-plastique par une méthode quasi directe*. Plasticité et Viscoplasticité, Séminaire 1972 Ecole Polytechnique - Ediscience, Paris, 1974.

NGUYEN MINH DUC (1974) - *Contribution à l'étude de la taille des roches*. Th. Doct. es Sc., Univ. Paris VI, 1974.

PALMER A.C. (1966) - *A limit theorem for materials with non-associated flow laws*. J. Mécanique, vol. 5, n°2, pp. 217-222.

PRAGER W. (1972) - *Limit analysis : the development of a concept*. Proc. Symp. on the Foundations of Plasticity, Warsaw, (1972) - Nordhoff Int. Pub., Leyden, 1974, vol. II, pp. 3-24.

RADENKOVIC D. (1961) - *Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée*. C. R. Ac. Sc., Paris, t. 252, pp. 4103-4104.

RADENKOVIC D. (1962) - *Théorie des charges limites*. Séminaire Plasticité, Ecole Polytechnique 1961, ed. J. Mandel, 1962, pp. 129-142.

SALENÇON J. (1972a) - *Un exemple de non validité de la théorie classique des charges limites pour un système non standard*. Proc. Symp. on the Foundations of Plasticity, Warsaw, (1972) - Nordhoff Int. Pub., Leyden, 1974, vol.II, pp. 432-439.

SALENÇON J. (1972b) - *Théorie des charges limites*. Plasticité et Viscoplasticité, Séminaire Ecole Polytechnique, 1972 - Ediscience, Paris, 1974.

SALENÇON J. (1974) - *Bearing capacity of a footing on a $\phi = 0$ soil with linearly varying shear strength*. Géotechnique, vol. 24, n°3, pp. 443-446.

SALENÇON J. (1975) - *La méthode des lignes de glissement*. Ecole d'été "Mise en forme des métaux et alliages", Villars sur Ollon, C.H., 1975.

SERRANO A.A. (1972) - *El metodo de los campos associados*. C. R. 5ème Congr. Eur. Mec. Sols, pp. 77-84.

STUTZ P. (1963) - *Contribution à l'étude de la loi de déformation plastique des sols*. Th. Doct. Spec. Grenoble.

SZCZEPINSKI W. (1971) - *Some slip-line solutions for earth moving processes*. Arch. of Mechanics, vol. 23, n°6, pp. 885-896.

ZAVELANI-ROSSI A. (1972) - *A new linear programming approach to limit analysis*. Int. Symp. Variational Methods in Engineering. Southampton 1972. Vol. II, Brebbia and Tottenham ed., Southampton Univ. Press, 1973.