

METHODE VARIATIONNELLE POUR LE MATERIAU RIGIDE-PLASTIQUE

M. FREMOND*, A. PECKER** et J. SALENÇON** (PARIS)

1. Introduction

L'application de la méthode des éléments finis pour la recherche des charges limites a fait l'objet de plusieurs études au cours des dernières années.

Ainsi LYSMER [3] s'appuyant sur le théorème statique de la théorie des charges limites, a traité le cas du matériau de Coulomb et a abouti à un problème de programmation linéaire; ANDERHEGGEN et KNÖPFEL [1], toujours à partir du théorème statique donnent une formulation de l'analyse limite à l'aide de la programmation linéaire; MAIER et al [5] ont appliqué la méthode des éléments finis à des problèmes d'optimisation en contrainte plane par l'approche statique. FREMOND et SALENÇON [4] ont commencé la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis en s'appuyant sur le théorème cinématique de la théorie des charges limites.

2. Rappel des theoremes de l'analyse limite

Pour un matériau satisfaisant au principe du travail maximal et pour un système soumis à un processus de chargement à n paramètres Qi (vecteur chargement Q) les résultats de la théorie des charges limites se formulent (SALENÇON [7]).

Toute solution d'équilibre limite du système (champ de contraintes sigma, champ de vitesse de déformation d) rend minimale la fonctionnelle

I(sigma, d) = P(d) - Q(sigma)q(d),

sur l'ensemble H des champs de contraintes statiquement et plastiquement admissibles (SPA) et l'ensemble H' des champs de vitesse de déformation cinématiquement et plastiquement admissibles (CPA). P(d) désigne la puissance dissipée dans d.

Le chargement Q correspondant à une telle solution est un chargement limite et q est la vitesse de déformation du système associée. On en déduit le théorème statique.

La frontière d'écoulement du système, lieu des chargements limites, est la frontière du convexe K des chargements qui peuvent être équilibrés par un champ de contraintes SPA. D'où la méthode d'approximation par l'intérieur de cette frontière (Fig. 1a) qui conduit lorsqu'on opère suivant les rayons vecteurs à un problème de maximisation (Fig. 1b)

Q_lim+ = Q° Max {lambda(sigma) | sigma in H; lambda(sigma) Q° = Q(sigma)}.

On en déduit également le théorème cinématique.

Dans l'espace des chargements Q , l'ensemble K est l'intersection des demi-espaces définis pour chaque champ CPA par

$$P(d) - Q\dot{q}(d) \geq 0.$$

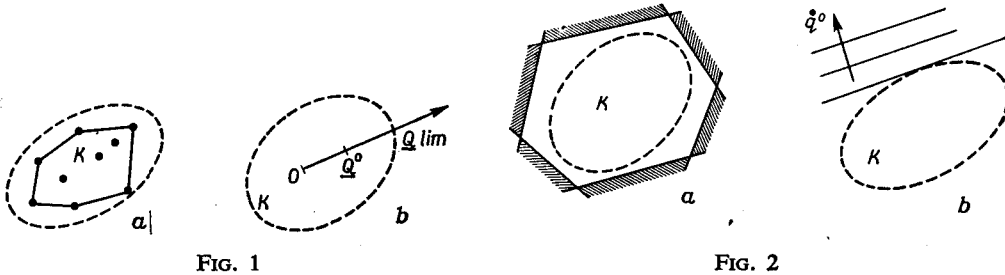


FIG. 1

FIG. 2

D'où la méthode d'approximation par l'extérieur de la frontière d'écoulement (Fig. 2a) qui conduit à un problème de minimisation (Fig. 2b) lorsqu'on opère en considérant les champs CPA qui correspondent à une même vitesse de déformation admissible \dot{q} du système. Le plan

$$Q\dot{q}^0 - \text{Min} \{P(d) | d \in H'; \dot{q}(d) = \dot{q}^0\} = 0,$$

est tangent à la frontière d'écoulement (Fig. 2b).

3. Position du problème

L'idée directrice de l'étude est de construire des champs de vitesse de déformation pour appliquer le théorème cinématique. Pour cela on définit à l'aide d'un modèle d'éléments finis un champ de vitesse de déformation qui

- 1) est cinématiquement et plastiquement admissible,
- 2) minimise la puissance dissipée $P(d)$.

Le fait d'utiliser le théorème cinématique plutôt que le théorème statique présente a priori plusieurs avantages:

- construction plus simple des éléments finis en vitesse
- possibilité de limiter a priori la zone à mailler c'est-à-dire la zone déformable, en s'appuyant sur quelques „considérations physiques”, le reste du système ayant des mouvements de solides rigides déterminés par les conditions aux limites (ceci est fort utile pour la mise en oeuvre des éléments finis).

Par contre, le théorème cinématique conduit à une approximation par l'extérieur ce qui, sauf problèmes particuliers, ne correspond pas au sens de la sécurité. Ce dernier inconvénient n'est pas particulier à la méthode et se retrouve par exemple lorsque l'on utilise des cercles de glissement, ce qui est une pratique courante.

Dans la suite nous nous restreindrons au cas de la déformation plane pour le matériau de Misès (ou de Tresca).

On rappelle que pour ces matériaux les champs plastiquement admissibles sont tous les champs tels que:

– la vitesse de déformation de volume est nulle là où le champ est continu:

$$\text{tr } d = \text{div } \boldsymbol{\mu} = 0,$$

– la discontinuité de vitesse $[\mathbf{u}]$ est tangente à la ligne de discontinuité Γ si \mathbf{u} n'est pas continu. La ligne Γ est une ligne de glissement. Un tel champ de vitesse vérifie $\text{div } \mathbf{u} = 0$ au sens des distributions. Par la suite nous donnons cette signification à $\text{div } \mathbf{u} = 0$.

La puissance dissipée se compose alors de deux termes: intégrale de surface sur les zones déformées Σ , et intégrale curviligne le long des lignes de discontinuité Γ .

Le problème se pose donc de la manière suivante: trouver \mathbf{u} tel que:

$$(I) \quad \begin{aligned} & \text{div } \mathbf{u} = 0, \\ & d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ & P(d) = \int_{\Sigma} k \sqrt{2d_{ij}d_{ji}} d\Sigma + \int_{\Gamma} k |[\boldsymbol{\mu}]| d\Gamma, \end{aligned}$$

est la valeur minimale de P sur l'ensemble des champs CPA.

4. Analyse numérique du problème

Les zones supposées déformées de la structure sont divisées en triangles sur lesquels la vitesse de déformation est constante, les lignes des discontinuités éventuelles sont représentées par des rectangles d'épaisseur nulle le long desquels le déplacement varie linéairement (Fig. 3).

La forme de la ligne de discontinuité Γ , tout en étant arbitraire est du point de vue numérique limitée par le fait qu'il convient de ne pas y introduire trop d'angles; en effet, la nullité de la discontinuité normale à Γ de la vitesse \mathbf{u} impose la nullité de la discontinuité en de tels points et l'on perd le bénéfice de l'introduction de champs de vitesse discontinus.

La puissance dissipée peut alors s'écrire:

$$(4.1) \quad P = \sum_{i=1}^t \sqrt{\mathbf{x}^T A_i \mathbf{x}} + G(\mathbf{x}),$$

où t – nombre de triangles du maillage, \mathbf{x} – vecteur dont les coordonnées x_i sont les coordonnées généralisées du déplacement \mathbf{u} (valeurs de \mathbf{u} aux sommets du maillage), A_i – matrice de rigidité d'un triangle, $G(\mathbf{x})$ – fonction représentant la puissance dissipée dans la discontinuité.

Comme indiqué par FREMOND et SALENÇON [8] la condition d'incompressibilité $\text{div } \mathbf{u} = 0$ ne peut être respectée strictement sur chaque triangle du fait du faible nombre de degrés de liberté dont on dispose. On écrit donc la nullité de la divergence en moyenne, soit:

$$(4.2) \quad \int_s (\text{div } \mathbf{u}) dS = 0,$$

où S représente l'aire formée de la réunion de deux triangles du maillage. La discrétisation adoptée permet alors d'écrire cette condition sous la forme

$$(4.3a) \quad \mathbf{D}\mathbf{x} = 0,$$

où \mathbf{D} est une matrice.

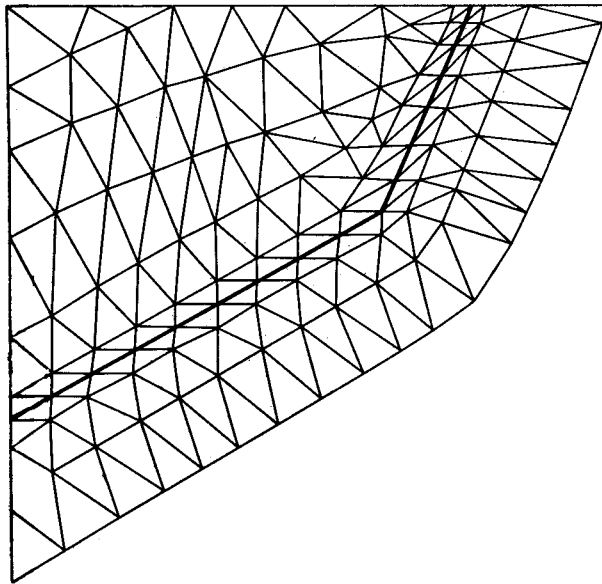


FIG. 3

D'autre part la condition exprimant la nullité de la discontinuité normale à Γ' de la vitesse \mathbf{u} s'écrit

$$(4.3b) \quad \mathbf{C}\mathbf{x} = 0,$$

où \mathbf{C} est une matrice.

Regroupant les conditions (4.3a) et (4.3b) qui ont la même signification physique on écrira:

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = 0,$$

où \mathbf{B} est une matrice.

Enfin les conditions à la limite imposent les valeurs de certaines composantes de la vitesse sur une partie de la frontière \mathbf{M} étant une matrice de projection, elles s'écrivent:

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{a},$$

où \mathbf{a} est le vecteur formé par les coordonnées généralisées de la vitesse qui sont connues.

En fait pour tenir compte de la possibilité de liaisons unilatérales (cf. l'exemple étudié où il y a possibilité de décollement entre le matériau et la paroi) on écrira:

$$(4.4) \quad \mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{a}.$$

Le problème (I) discrétisé devient alors:
trouver \mathbf{x} qui minimise la fonction:

$$(II) \quad F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^t \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i \mathbf{x}} + G(\mathbf{x}),$$

sur l'ensemble des vecteurs \mathbf{x} qui vérifient:

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{a}.$$

On montre par dualisation que le problème (II) est équivalent au problème de point-selle suivant:

$$(III) \quad \inf_{\mathbf{M}\mathbf{x} \leq \mathbf{a}} \sup_{\mu} \{F(\mathbf{x}) + \mu^T \mathbf{B}\mathbf{x}\}$$

On peut résoudre le problème (III) par une méthode itérative; méthode de descente sur \mathbf{x} et de gradient sur μ :

$$\begin{aligned} \mu^{(n+1)} &= \mu^{(n)} + \rho_1 \mathbf{B}\mathbf{x}^{(n)}, \\ \mathbf{x}^{(n+1)} &= \mathbf{x}^{(n)} - \rho_2 \left\{ \frac{dF}{d\mathbf{x}^{(n)}} + \mathbf{B}^T \mu^{(n+1)} \right\}. \end{aligned}$$

où ρ_1 et ρ_2 sont deux paramètres de relaxation.

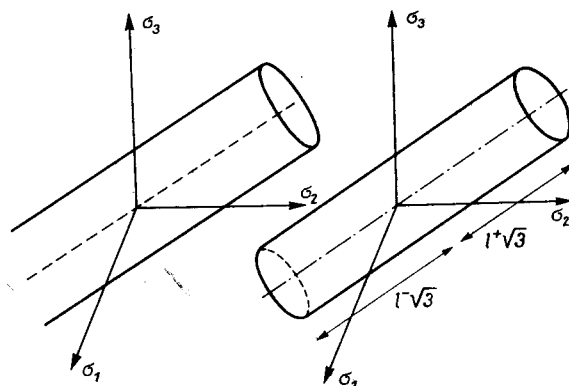


FIG. 4

Il est intéressant de donner une interprétation mécanique de la dualisation de la contrainte $\mathbf{B}\mathbf{x} = 0$ qui fait passer de (II) à (III). On considère un matériau dont le domaine d'élasticité est défini par:

$$\frac{1}{2} \text{tr } s^2 \leq k^2,$$

$$3l^- \leq \text{tr } \sigma \leq 3l^+ \quad (l^- \leq 0, l^+ \geq 0),$$

critère de Misès avec limitation pour la valeur de la contrainte moyenne (Fig. 4b). Pour ce matériau tout champ d est plastiquement admissible et la puissance dissipée a pour expression:

$$(4.5) \quad P(d) = \int_{\Sigma} [k\sqrt{2d_{ij}d_{ji}} + \text{Sup}\{l \text{tr } d | l^- \leq l \leq l^+\}] d\Omega.$$

La recherche de la solution d'un problème pour un système constitué de ce matériau conduit à la minimisation de (4.5) sur tous les champs de vitesse cinématiquement admissibles, d'où par discrétisation:

$$\inf_{Mx \leq a} \{F(x) + \sup_{I^- \leq I \leq I^+} \{I^T Bx\}\}.$$

I^- et I^+ sont les vecteurs dont les composantes sont égales à l^- et l^+ . Enfin pour aboutir au matériau de Misès (Fig. 4a) il faut faire tendre I^+ et I^- respectivement vers plus et moins l'infini ce qui amène au problème (III).

5. Présentation de l'exemple

5.1. Position du problème

L'exemple étudié concerne la butée d'une paroi rigide OA de largeur $2a$ sur un coin rectangulaire infini en matériau de Misès non pesant (Fig. 5). Le contact entre la paroi et le coin se fait sans frottement avec décollement possible il satisfait le principe du travail

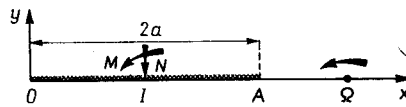


FIG. 5

maximal. On a affaire à un système standard admettant l'application de la théorie classique des charges limites rappelée au § 2.

Les paramètres de chargement de ce système sont

$$Q_1 = N/ak, \quad Q_2 = M/a^2 k,$$

et les paramètres de déformation associés

$$\dot{q}_1 = -v_y(I)/|\omega|a, \quad \dot{q}_2 = \omega/|\omega| = \text{sgn}(\omega).$$

5.2. Résultats connus

La détermination de la frontière d'écoulement de ce système par les moyens classiques conduit aux résultats représentés à la Fig. 6. On trouvera dans (SALENÇON [8]) les détails de construction des diverses solutions utilisées pour les arcs (1, 2, 3, 5).

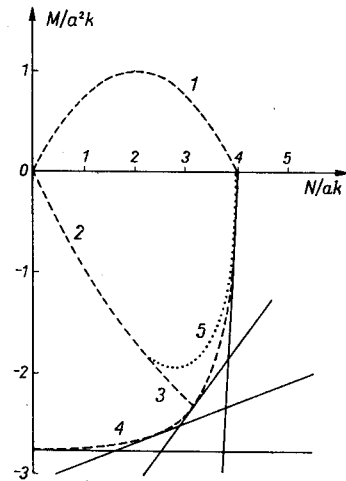


FIG. 6. Frontière d'écoulement

1° Arc connu exactement qui correspond à $\omega > 0$ autour d'un centre instantané Ω quelconque:

$$(5.1) \quad M/a^2k \geq 0, \quad M/a^2k = (N/ak)(1 - N/4ak),$$

obtenu par une solution complète du type représenté à la Fig. 7a.

2° Arc connu exactement qui correspond à $\omega < 0$ dans le cas où Ω vérifie:

$$(5.2) \quad x(\Omega)/a \geq 2 [1 - \exp(-\pi/2)] = 1.584,$$

$$(5.3) \quad \begin{aligned} M/a^2 k \leq 0, \quad M/a^2 k &= -N/ak(1 - N/2(\pi+2)ak), \\ N/ak &\leq 2(\pi+2) \exp(-\pi/2) = 2.136, \end{aligned}$$

obtenu par une solution complète du type de celle représentée à la Fig. 7b.

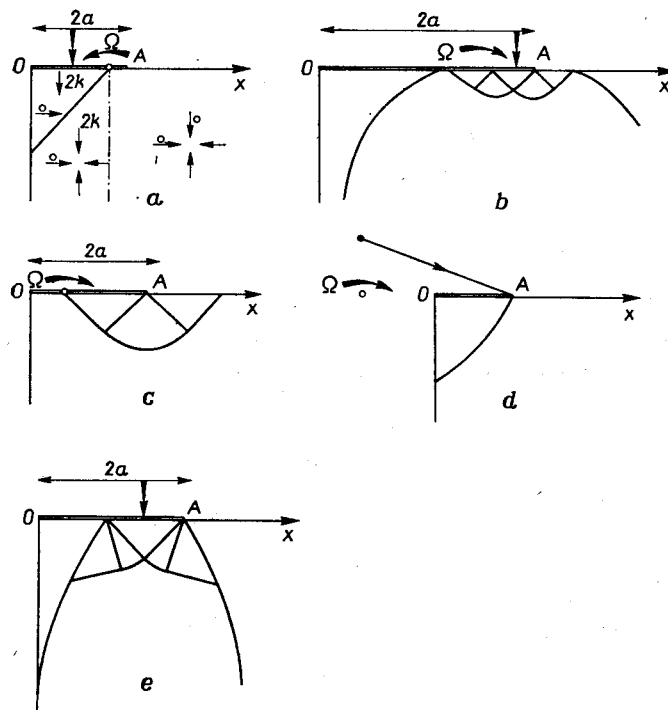


FIG. 7

3° Approximation par l'extérieur de la frontière. Suite de la parabole (5.3). La partie utile, meilleure que l'arc 4° correspond à:

$$2.136 \leq N/ak \leq 3.30,$$

obtenue par la solution incomplète du type de celle représentée à la Fig. 7c.

4° Approximation par l'extérieur de la frontière construite par la méthode des cercles de glissement (Fig. 7d): enveloppe des plans correspondant au meilleur cercle de glissement, obtenue numériquement, pour $\omega < 0$, $x(\Omega)/a \leq 1$. La partie utile, meilleure que la suite de la parabole (5.3) correspond à:

$$3.30 \leq N/ak \leq 4.0.$$

Elle se raccorde pour $N/ak = 4$, au plan vertical qui est lui aussi une approximation par l'extérieur.

5° Approximation par l'intérieur de la frontière, construite numériquement, obtenue au moyen de solutions statiques du type représenté à la Fig. 7e, utilisant un prolongement des champs de Prandtl par une méthode déduite de celle de Bishop.

6. Résultats obtenus par la méthode des éléments finis

Nous nous sommes intéressés à deux positions particulières du centre de rotation Ω , dans le but d'améliorer l'approximation par l'extérieur dans la zone

$$(6.1) \quad 2.136 \leq N/ak \leq 4,$$

ou encore

$$(6.2) \quad x(\Omega)/a < 1.584, \quad \omega > 0.$$

6.1. $x(\Omega)/a=0, \omega < 0$

Le centre Ω se trouve au sommet O du coin.

Avec un maillage de 152 points, 226 triangles, 18 rectangles, la méthode proposée conduit, après optimisation sur la ligne de discontinuité, à une valeur de la puissance dissipée

$$(6.3) \quad P = 5.48,$$

après 246 itérations. Cette valeur correspond au plan d'équation:

$$(6.4) \quad N/ak - M/a^2k = 5.48.$$

La valeur correspondant au meilleur cercle de glissement était:

$$(6.5) \quad P = 5.52.$$

Si l'amélioration de (6.3) par rapport à (6.5) ne peut être considérée comme significative compte tenu de la précision numérique, il est néanmoins déjà remarquable d'avoir pu rejoindre par la méthode des éléments finis, le résultat donné par la méthode des cercles de glissement souvent considéré comme intangible.

Le plan correspondant à (6.4) a été représenté sur la Fig. 8.

6.2. $x(\Omega)/a=1, \omega < 0$

Ce cas correspondant au centre de rotation situé au milieu de OA . Pour cette position de Ω le meilleur cercle de glissement (cote du centre = $0.30a$) fournit la valeur

$$(6.6) \quad P = 2.76.$$

On obtient avec un maillage de 144 points, 214 triangles, 16 rectangles (Fig. 3) après optimisation grossière sur la ligne de discontinuité et 271 itérations:

$$(6.7) \quad P = 2.02.$$

La valeur atteinte pour le produit $\mu^T \mathbf{Bx}$ est:

$$\mu^T \mathbf{Bx} = 3.10^{-3},$$

et correspond au champ de vitesses représenté sur la Fig. 9.

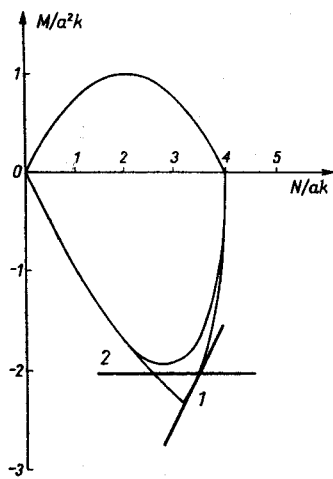


FIG. 8. Frontière d'écoulement

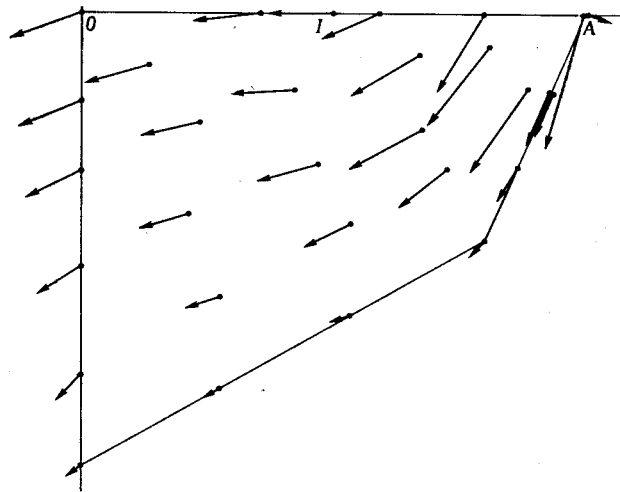


FIG. 9. Champ de vitesses

Il y a décollement du sol sous la paroi le long de OI .

Le plan correspondantant 2° d'équation:

$$(6.8) \quad -M/a^2k = 2.02,$$

a été représenté sur la Fig. 8, il correspond à une amélioration importante de l'approximation par l'extérieur de la frontière d'écoulement.

Un examen du champ de vitesses (Fig. 9) montre que la discontinuité de vitesse, grande à l'extrémité de la paroi ($x/a=2$) diminue jusqu'à disparaître totalement à une profondeur $y/a = -0.3$. Ceci explique que la majeure partie de la puissance dissipée (92%) dans ce mécanisme le soit par déformation du milieu et non par glissement le long de la ligne de discontinuité.

Le maillage représenté à la Fig. 3 est celui qui, après quelques tâtonnements concernant la forme de la ligne de discontinuité, a donné les meilleurs résultats dans les deux cas traités. On constate lorsque l'on représente la solution statique 5° du type de la Fig. 7e qui correspond au point à tangente horizontale de l'arc 5°, que la ligne de discontinuité choisie suit d'assez près la seule ligne caractéristique des contraintes, qui dans le prolongement de Bishop est issue du point A , traverse toute la zone en équilibre limite pour aboutir au point de contact entre cette zone et la surface libre verticale du coin. De plus en examinant le champ des vitesses à la Fig. 9 on voit que les noeuds du réseau qui sont situés au delà de la ligne de discontinuité ont une vitesse nulle. Ceci incite à penser que la solution statique proposée

doit être très proche de la solution exacte: on voit ainsi que l'utilisation de la méthode des éléments finis, cinématique, peut conduire à des résultats intéressants quant aux contraintes.

Nous pensons qu'un résultat aussi significatif que celui de la formule (6.8) pourrait être obtenu par les méthodes cinématiques classiques à condition d'utiliser des solutions cinématiques très sophistiquées comme celles proposées par HILL et EWING [2] pour l'étude des éprouvettes entaillées (cf. aussi SALENÇON, [6]. Mais la mise en oeuvre de telles solutions demande beaucoup de minutie et de temps. Ceci met en lumière un des avantages de la méthode des éléments finis: la versatilité de celle-ci permet son utilisation aisée indépendamment des conditions à la limite et de la forme de la structure. Les tâtonnements pour la recherche de la meilleure ligne de discontinuité ne présentent pas à l'heure actuelle un caractère systématique. Cependant les considérations physiques permettent de limiter le choix et d'obtenir cette ligne de discontinuité.

3. Conclusion

Le modèle d'éléments finis présenté dans cette étude, fournit un nouveau moyen d'approche numérique s'appuyant sur le théorème cinématique de la théorie des charges limites pour la détermination de la frontière d'écoulement d'un système. Il a été développé jusqu'à présent dans le cas des problèmes de déformation plane pour le matériau de Von Mises (ou de Tresca).

Les résultats obtenus sur l'exemple choisi (butée d'une paroi lisse sur un coin) ont permis d'améliorer notablement la connaissance déjà précise que l'on avait de la frontière d'écoulement pour ce problème, obtenue en particulier par les cercles de glissement. Ils montrent tout l'intérêt de la méthode proposée. On rappellera que les champs de vitesse utilisés dans ce modèle ne sont plastiquement admissibles qu'à la limite (dualisation de la condition $\text{div } \mathbf{u} = 0$), ce qui est une voie classique dans l'approche numérique des problèmes. Il en est de même pour les conditions à la limite; si celles-ci sont compliquées les champs ne sont cinématiquement admissibles qu'en moyenne. Ces champs admettent des lignes de discontinuité, comme l'expérience des solutions exactes connues pour certains problèmes a montré que c'était nécessaire.

La mise sur pied d'un modèle analogue pour d'autres types de matériaux — éventuellement non standards — et d'autres types de problèmes — éventuellement tridimensionnels — devrait être abordée.

Références

1. E. ANDERHEGGEN, et M. KNÖPFEL, *Finite element limit analysis using linear programming*, Int. J. Solids Structures, 8, 1972, p. 1413-1431.
2. D. J. F. EWING, et R. HILL, *The plastic yielding of V. notched tension bars*, J. Mech. Phys. Sol., 15, 2, 1967, p. 115.

3. J. LYSMER, *Limit Analysis of plane problems in Soil Mechanics*, J. of Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, SM 4, 96, Proc. Paper 7416, July 1970, p. 1311-1334.
4. M. FREMOND, et J. SALENÇON, *Limit Analysis by Finite element method*, C.R. Symp. on the Role of Plasticity in Soil Mech. Cambridge, Sept. 1973.
5. G. MAIER, A. ZAVELANI-ROSSI, D. BENEDETTI, *A finite element approach to optimal design of plastic structures in plane stress*, Int. J. Numerical Meth. Engng., 4, 1972, p. 455-473.
6. J. SALENÇON, *Théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane*, Thèse Fac. Sci., Paris, 1969.
7. J. SALENÇON, *Théorie des charges limites in Plasticité et Viscoplasticité*, édité par D. RADENKOVIC et J. SALENÇON, Ediscience, Paris 1974.
8. J. SALENÇON, *Quelques résultats théoriques concernant la butée d'une paroi sur un coin plastique*, ITBTP, 313, série TMC, 165, Janvier 1974, p. 185-194.

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées
Laboratoire de Mécanique des Solides,
Ecole Polytechnique