A la mémoire de
Monsieur Paul VISSIO
Professeur de Mathématique

THÉORIE DE LA PLASTICITÉ POUR LES APPLICATIONS A LA MÉCANIQUE DES SOLS

O 4

« La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40) ».

« Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal ».

© 1974 EYROLLES

THÉORIE DE LA PLASTICITÉ

pour les applications à la

MÉCANIQUE DES SOLS

par

Jean SALENÇON

Maître de Conférences à l'École Polytechnique
Maître de Conférences à l'E. N. P. C.

PRÉFACE DE

Jean MANDEL

Ingénieur général des Mines

PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS
DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉDITIONS EYROLLES
61, boulevard Saint-Germain - PARIS V^e^
1974

PRÉFACE

Le titre de cet ouvrage définit son but : dégager la signification des procédés de calculs utilisés en mécanique des sols à la lumière des développements récents de la théorie de la Plasticité. Nous pensons que ceci répond à un besoin actuel.

La Mécanique des Sols a connu deux époques. Avant TERZAGHI *les ingénieurs se préoccupaient surtout de l'équilibre limite des terres. La théorie de la Poussée des terres fut développée par* COULOMB, RANKINE, RÉSAL, CAQUOT, *en vue de préciser les limites ultimes de stabilité des ouvrages. Parallèlement, mais séparément, se développait la théorie de la Plasticité du métal.*

Vint TERZAGHI, *qui souligna l'extrême complexité du comportement des sols. Il attira l'attention sur la nécessité d'étudier leurs propriétés physiques, sur le rôle essentiel de l'eau incluse dans les vides, sur les problèmes de tassement, etc. Cette optique nouvelle a peut-être quelque peu détourné les mécaniciens du sol de la théorie des équilibres limites dont les hypothèses de base peuvent paraître un peu simplistes.*

Cependant cette théorie reste d'une utilité indiscutable et il se trouve que, maintenant, par le rapprochement avec la théorie de la Plasticité du métal,

nous sommes à même de mieux apprécier la signification et la validité de ses méthodes de calcul. C'est ce que J. SALENÇON *s'est proposé de montrer, suivant en cela la voie ouverte dans mon enseignement de l'Ecole des Mines, dont le présent ouvrage est sur bien des points un fidèle reflet. Des notions maintenant bien éclaircies en plasticité du métal se retrouvent en mécanique des sols, et le rapprochement est fructueux. Exemples : cercles de* FELLENIUS *et méthode cinématique de la théorie des charges limites, équilibres surabondants* (CAQUOT) *et méthode statique, équations de* KÖTTER *et méthode des caractéristiques.*

Toutes les questions abordées sont traitées à fond dans le présent ouvrage, avec précision et rigueur. Ce livre, à la fois clair et solide, permettra aux ingénieurs de juger en connaissance de cause de la portée de leurs calculs.

J. MANDEL

Ingénieur général des Mines

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE V

PRÉSENTATION XI

AVANT-PROPOS XIII

CHAPITRE PREMIER — **Généralités sur le comportement plastique des matériaux** 1

1. Notion de seuil de plasticité. Critère d'écoulement 1
2. Forme des critères de plasticité 2
3. La déformation plastique 9
4. Origine de la déformation plastique 11
5. Loi de comportement 11
6. Principe du travail maximal 15
7. Conséquence pour la loi de comportement 16
8. Validité du principe du travail maximal. Cas des sols 17
9. Remarque finale 18

Références 19

CHAPITRE II — **Aperçu sur les problèmes d'élastoplasticité** 21

1. Introduction 21
2. Position du problème. Méthode de résolution 22
3. Comportement d'un système soumis à un processus de chargement 23
4. Etude de deux exemples simples 25
5. Importance des changements de géométrie 28

Références 29

CHAPITRE III — **Les problèmes d'écoulement plastique libre et l'étude du « schéma rigide-plastique »** 31

1. Définition du matériau rigide-plastique 31
2. Le matériau rigide-plastique dans l'étude des problèmes d'écoulement libre 31
3. Position du problème pour un système rigide-plastique 32
4. Equations du problème 34
5. Les conditions à la limite 35
6. Théorème d'unicité du champ de contraintes 39
7. Remarques 42

Références 43

ANNEXE AU CHAPITRE III — **Définition générale des paramètres de chargement d'un système** 44

1. Chargements possibles 44
2. Processus de chargement dépendant d'un nombre fini de paramètres 46
3. Cas d'un système. Conditions de frottement 48
4. Exemple 48

CHAPITRE IV — **Problèmes d'écoulement libre en déformation plane** 50

1. Généralités 50
2. Expression du critère de plasticité 50
3. Remarque sur le cas du matériau non standard 52
4. Equations pour les contraintes 53

A *Le problème pour les contraintes* 54

5. Transformation des équations 54
6. Lignes caractéristiques 56
7. Relations le long des caractéristiques 57
8. Procédé de calcul de la solution 58
9. Transformation des équations (24, 25) 60
10. Géométrie du réseau de caractéristiques 61
11. Raccordement de solutions 64

B *Le problème pour les vitesses* 64

12. Loi de comportement 64
13. Lignes caractéristiques. Relations le long des caractéristiques pour les vitesses 66
14. Exemple 68

15. Discontinuité de la vitesse 70
16. Discontinuité du champ de contraintes 71

C *Etude d'un exemple* 72

17. Le problème posé 72
18. Construction de la solution 72
19. Calcul des vitesses 73
20. Cas particulier 74
21. Remarque sur la solution obtenue 75
22. Cas du matériau de Coulomb 76

D *Usages particuliers dans l'étude du matériau de Coulomb* 78

23. Méthode de superposition. Théorème des états correspondants 78
24. Etude d'un exemple pour le sol pesant sans cohésion 81

Références 85

ANNEXES AU CHAPITRE IV — **A. Problèmes d'écoulement libre en déformation plane pour le matériau plastique isotrope non homogène** 88

1. Généralités 88
2. Le problème pour les contraintes. Cas général 89
3. Cas du matériau de Tresca 92
4. Cas du matériau de Coulomb 93
5. Le problème pour les vitesses 94
6. Cas de certains matériaux non standards 100
7. Discontinuité du champ des contraintes 102

Références 109

B. Problèmes d'écoulement plastique libre en symétrie axiale pour les matériaux dont le critère de plasticité est du type « courbe intrinsèque » 111

1. Généralités 111
2. Le problème pour les contraintes 111
3. Le problème pour les vitesses 114
4. Solutions faibles 117

Références 118

CHAPITRE V — **Théorie des charges limites (pour les applications à la mécanique des sols)** 119

1. Rappels 119
2. Champs licites. Puissance dissipée 123

3. Méthode statique 126
4. Méthode cinématique 130
5. Remarques sur les résultats de la théorie des charges limites 131
6. Principes de minimum 132
7. La théorie des charges limites dans l'étude des problèmes d'écoulement libre en déformation plane 133
8. Interprétation des solutions dans le cas du matériau de Coulomb 138
9. Autres applications de la théorie des charges limites en mécanique des sols 141

Références 145

ANNEXES AU CHAPITRE V — **A. Autre présentation de la théorie des charges limites. Extension à certains matériaux non-standards** 147

1. Introduction 147
2. Cas du matériau standard 147
3. Cas de certains matériaux non standards 161
4. Conditions de frottement aux interfaces 163

Références 168

B. Le théorème de Bonneau 169

1. Le problème posé 169
2. Origine du problème. Cas des solutions incomplètes 169
3. Lemme 171
4. Etablissement des relations différentielles nécessairement vérifiées le long de (C) 172
5. Remarques 175

Références 176

INDEX ALPHABÉTIQUE 177

PRÉSENTATION

Le présent ouvrage correspond au cours donné à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, depuis maintenant près de quatre ans, par M. SALENÇON, Maître de Conférences à l'Ecole, dans le cadre de mon Enseignement de Mécanique des Sols.

Ce cours, qui se place au niveau des Enseignements d'OPTION, s'adresse à un petit groupe d'élèves volontaires désireux d'approfondir, pendant cette période, certains aspects particuliers de la Mécanique des Sols.

La plasticité constitue aujourd'hui une théorie bien établie rendant compte d'un type de comportement des matériaux. Elle sert également de base à certaines méthodes modernes de calcul de structures, et fait l'objet, à ce titre, d'un Enseignement Spécialisé de l'Ecole.

En Mécanique des Sols, la plasticité trouve des applications importantes dans la méthode des caractéristiques qui demeure l'une des principales méthodes théoriques de calcul à la rupture. Elle constitue en fait, malgré les limitations que lui imposent des hypothèses dont la validité doit être vérifiée dans chaque cas, en relation avec la nature du sol et le type de problème à résoudre, une des voies d'approche dont dispose le Mécanicien des Sols pour l'étude du comportement réel des sols en place.

Le présent cours n'a pas pour objet d'exposer dans son ensemble la théorie de la plasticité. Il n'est pas davantage un nouveau traité de la méthode des caractéristiques. Son originalité réside dans le fait qu'il présente dans leur généralité, et de façon rigoureuse et assez complète les apports de la théorie de la plasticité à la Mécanique des Sols, et montre les applications qui peuvent en être déduites.

En approfondissant les méthodes théoriques de calcul à la rupture, présentées principalement en Enseignement de TRONC COMMUN, à un stade où il est délicat d'en bien faire saisir la signification profonde et la portée, il constitue un complément précieux de cet Enseignement.

L'originalité de ce cours, son succès à l'école, les travaux d'élèves qu'il a suscités, la mise au point patiente à laquelle l'auteur s'est livrée au cours de ses quatre années d'Enseignement pour atteindre à une présentation claire et rigoureuse d'un sujet difficile, ont conduit à sa publication.

Il m'est agréable, à cette occasion, de remercier M. SALENÇON du concours qu'il m'apporte dans mon Enseignement en développant un aspect particulièrement attachant de la Mécanique des Sols.

Cette collaboration n'a été possible que grâce à la bienveillante compréhension du Laboratoire de Mécanique des solides de l'Ecole Polytechnique, où l'auteur se trouve affecté, compréhension à laquelle je tiens à rendre hommage en la personne de M. MANDEL, son Directeur.

Enfin, c'est grâce au coucours financier du CNRS que cet ouvrage doit de voir le jour. Cela méritait d'être souligné.

J. LEGRAND
Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées
Professeur de Mécanique des Sols
à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage correspond à un cours d'option dispensé à l'E.N.P.C. dans le cadre de l'enseignement de Mécanique des Sols. Je remercie Monsieur le Professeur Legrand, qui m'en a confié la responsabilité, de m'avoir ainsi fourni l'occasion de présenter sous une forme didactique une partie des études et recherches que j'ai effectuées au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique.

Monsieur le Professeur Mandel, Directeur de ce laboratoire a guidé mes travaux et mes activités ; son enseignement de Science des Matériaux à l'Ecole des Mines de Paris pour lequel il a bien voulu me choisir comme assistant, m'a beaucoup aidé dans la rédaction de ce cours ; pour tout cela et pour avoir accepté d'écrire la préface de ce livre, je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude.

Par les nombreuses conversations amicales que nous avons eues, Messieurs les Professeurs Habib et Radenkovic m'on fait profiter de leur expérience tant dans les domaines théorique que pratique ; c'est ainsi que petit à petit certaines idées se sont dégagées que l'on trouvera ici exprimées. Je les en remercie tout particulièrement.

Enfin, je remercie les secrétaires qui ont assuré avec patience et compétence la dactylographie des divers manuscrits relatifs à cet ouvrage.

Le but que nous avons poursuivi n'est pas de former des spécialistes de la plasticité mais d'aider le lecteur à mieux comprendre les questions de Mécanique des Sols où il est fait appel à cette théorie et à être à même si cela est nécessaire d'apprécier la signification et la validité de certaines méthodes de calcul qui pourront lui être proposées.

Nous avons essayé de rassembler tout ce qui de la théorie de la plasticité peut être utile en Mécanique des Sols dans l'état actuel de cette discipline ; ces domaines ont été traités dans toute leur généralité, les autres tels que le phénomène d'adaptation plastique et les problèmes dynamiques n'ont pas été abordés.

Le livre comprend cinq grands chapitres.

Le premier chapitre est consacré à l'exposé des caractéristiques du comportement plastique des matériaux. Le problème de la loi de comportement est étudié de façon assez détaillée, notamment à la lumière de recherches récentes.

Le deuxième chapitre traite brièvement des problèmes élastoplastiques et de leur résolution. Celle-ci est délicate et à part quelques cas où des simplifications apparaissent et qui ont pu être étudiés, elle n'a reçu que peu d'applications dans le domaine qui nous intéresse. Il est toutefois indispensable de bien saisir que le problème élastoplastique est le problème de base dès que l'on introduit la plasticité sans viscosité dans le comportement du matériau et qu'il est par suite essentiel de voir dans quelles conditions, sous quelles hypothèses, et pour quels types de problèmes, on peut se ramener au schéma rigide-plastique.

Celui-ci dans sa généralité, fait l'objet du troisième chapitre. On y étudie la façon de poser les problèmes d'équilibre limite.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude détaillée de la théorie des équilibres limites plans dont les applications en Mécanique des Sols sont très nombreuses. Un exemple illustratif est donné.

Enfin le cinquième chapitre traite de la théorie des charges limites en général, qui seule permet une compréhension parfaite des procédés de calculs utilisés pour le matériau rigide-plastique.

Les chapitres III, IV et V sont suivis chacun d'une ou plusieurs annexes dans lesquelles sont donnés des développements, souvent originaux, qui auraient par trop alourdi le texte des chapitres eux-mêmes.

Chaque chapitre et chaque annexe comporte une liste de références à laquelle renvoient des chiffres placés entre crochets dans le texte. Sans prétendre à une bibliographie complète cette liste signale des travaux intéressants auxquels le lecteur pourra se reporter.

Signalons enfin, qu'à part les exemples donnés dans un but pédagogique, on ne trouvera pas dans ce cours les solutions de problèmes plus ou moins classiques de plasticité liés à la Mécanique des Sols. Il n'est pas question en effet pour nous de remplacer les livres bien connus de Solokovski, Hill, etc. mais plutôt de préparer le lecteur à leur utilisation éventuelle.

NOTATIONS : Selon l'usage de la Mécanique des milieux continus et à l'inverse de la Mécanique des Sols, les contraintes sont comptées positivement en traction.

Pour des raisons de simplicité typographique, les grandeurs tensorielles sont indiquées par une lettre soulignée dans les cas où une ambiguïté risquerait de se présenter.

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS SUR LE COMPORTEMENT PLASTIQUE DES MATÉRIAUX

1 — Notions de seuil de plasticité Critère d'écoulement

Nous supposerons dans toute la suite que les effets de viscosité sont négligeables, c'est-à-dire qu'il sera question d'élasticité et de plasticité mais pas de visco-élasticité ou de viscoplasticité.

La plasticité est caractérisée par l'existence d'un *seuil* au-dessus duquel apparaissent des *déformations permanentes.*

Considérons par exemple, une expérience de traction simple ; on obtient schématiquement le diagramme de la figure 1*a* entre contraintes et déformations supposées homogènes :

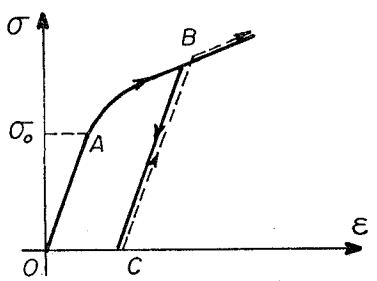

FIG. I.1*a*.

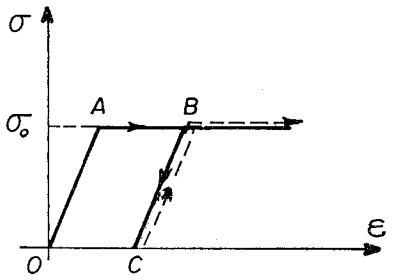

FIG. I.1*b*.

Le long de OA le comportement est élastique c'est-à-dire réversible.

Au-delà de A (i.e. $\sigma \geqslant \sigma_0$), l'irréversibilité apparaît : si parvenu en B on effectue une décharge totale de l'éprouvette, σ tombe à zéro, mais la décharge ne se fait pas suivant le trajet BAO mais suivant le trajet BC, droite parallèle à OA (si les propriétés élastiques linéaires du matériau ne sont pas modifiées par la déformation plastique) ; il reste après décharge une déformation OC : c'est la déformation permanente, ε^p.

σ_0 est le seuil de plasticité *initial.*

Si on recharge l'éprouvette, cette nouvelle charge est réversible et s'effectue selon BC tant que $\sigma \leqslant \sigma_B$, et devient irréversible pour $\sigma \geqslant \sigma_B$.

σ_B est le seuil de plasticité actuel.

La figure 1*a* représente le cas où σ_B est une fonction de ε^p : on dit qu'il y a *écrouissage.*

Sur la figure 1*b*, σ_B est une constante : on dit que le matériau est *parfaitement plastique.*

Il importe de bien remarquer que ce n'est pas la non linéarité de la courbe (σ, ε) une fois franchi le point A qui traduit l'apparition de la plasticité (l'élasticité peut être non linéaire !) mais l'*irréversibilité.*

D'une façon plus générale, pour un petit élément (macroscopique) de matière, sous une sollicitation quelconque définie par le tenseur des contraintes agissant sur lui, l'expérience montre que la notion de seuil de plasticité correspondant au cas unidimensionnel est remplacée par celle de *critère d'écoulement* ou *critère de plasticité* du matériau :

$\exists\, f$, fonction à valeur scalaire, de l'état de contraintes de l'élément telle que :

$f(\underline{\sigma}) < 0$ corresponde au domaine d'élasticité du matériau,

$f(\underline{\sigma}) = 0$ à l'apparition des déformations irréversibles (1).

C'est en général à l'égalité :

$$f(\underline{\sigma}) = 0 \tag{1}$$

que l'on donne le nom de *critère de plasticité* ou *critère d'écoulement* ; la fonction f est souvent appelée *fonction de charge*, et la surface $f(\underline{\sigma}) = 0$ dans l'espace $\{\underline{\sigma}\}$ est la surface de charge (2).

---

(1) En toute rigueur, cette représentation classique du critère de plasticité en fonction du tenseur des contraintes d'Euler $\underline{\sigma}$ est incorrecte (elle ne respecte pas le principe d'objectivité) sauf dans le cas particulier du matériau isotrope, cf. [13] p. 716. Nous conservons toutefois cette forme car, dans la suite, seul le cas des matériaux isotropes sera envisagé.

(2) Par glissement de sens, on appellera également f critère de plasticité.

Dans les cas du matériau *parfaitement plastique*, la fonction de charge ne varie pas ; la surface de charge est une surface fixe et les déformations plastiques se produisent si $\underline{\sigma}$ est sur cette surface et y reste.

Dans le cas du matériau *écrouissable*, la fonction de charge change au fur et à mesure du développement des déformations permanentes. On doit distinguer la surface de charge initiale et la surface de charge actuelle. De nouvelles déformations plastiques n'apparaissent que si $\underline{\sigma}$ est sur la surface de charge et se déplace vers l'extérieur de celle-ci ; alors la surface de charge est entraînée par $\underline{\sigma}$ comme cela est représenté symboliquement sur la figure 2.

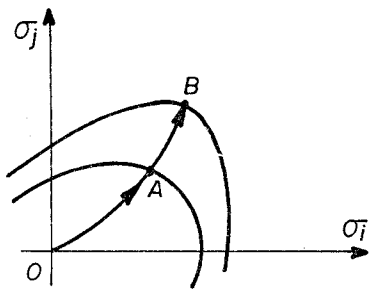

FIG. I.2.

Pour tenir compte de l'écrouissage on notera le critère de plasticité sous la forme :

$$f(\underline{\sigma}, E) = 0 \tag{2}$$

où E symbolise l'ensemble des paramètres d'écrouissage.

Ceux-ci sont par définition, les paramètres supplémentaires qui, si l'on connaît l'état des contraintes actuel permettent de déterminer le « comportement » plastique du matériau. On peut dire, en toute généralité, que ces paramètres dépendent de l'histoire des contraintes, ou de façon équivalente, de l'histoire des déformations.

Diverses théories ont été proposées pour préciser ces paramètres : citons entre autres, l'hypothèse d'un paramètre unique qui correspondrait au travail dépensé dans la déformation plastique (*cf.* [8]) ; et la théorie de Mandel [12].

2 — Forme des critères de plasticité

2.1. Convexité

On verra au § 5 à propos de l'étude de la loi de comportement, qu'une hypothèse couramment admise pour les métaux et certains autres matériaux — le principe du travail maximal — implique que la fonction de charge est une fonction convexe de $\underline{\sigma}$.

Nous pensons que la convexité de la fonction de charge (1) peut être considérée comme une propriété plus générale, valable pour les matériaux usuels, y compris ceux pour lesquels le principe du travail maximal, n'est ni démontrable, ni même acceptable.

Il suffit en effet pour qu'il en soit ainsi, que les mécanismes élémentaires permettant l'écoulement plastique d'un petit élément macroscopique correspondent chacun à une condition convexe sur $\underline{\sigma}$: le domaine d'élasticité de l'élément sera l'intersection des domaines de sécurité de chaque mécanisme et sera donc convexe.

2.2. Respect des symétries de la matière

Il est possible de préciser la forme des critères de plasticité dans le cas où le matériau possède certaines symétries : en effet le critère doit respecter ces symétries.

Ainsi, dans le cas du matériau initialement isotrope, f dans (1) ne dépend que des *invariants* du tenseur $\underline{\sigma}$, [25], ou encore se met sous la forme d'une *fonction symétrique des contraintes principales* σ_1, σ_2, σ_3.

Si l'écrouissage conserve l'isotropie (2), f dans (2) ne dépend aussi que des invariants de $\underline{\sigma}$ mais son expression évolue au fur et à mesure de la charge. Cette hypothèse de l'écrouissage isotrope est une vue de l'esprit, acceptable tant que les déformations ne sont pas trop importantes.

Nous étudierons dans la suite, les principaux critères de plasticité utilisés pour le matériau isotrope.

---

(1) On dira aussi « du critère de plasticité ».

(2) C'est en particulier le cas de « l'écrouissage isotrope de Taylor », qui ne dépend que d'un paramètre scalaire.

2.3. Critère de Von Misès

Pour les matériaux ductiles (capables d'allongement plastique par traction simple), l'expérience montre que, si l'on décompose le tenseur $\underline{\sigma}$ en mettant en évidence son déviateur $\underline{s}$ sous la forme :

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{\sigma_{ii}}{3}\delta_{ij}, \tag{3}$$

f ne dépend que de $\underline{s}$: l'addition d'un état de contrainte isotrope quelconque ne modifie en rien le comportement du matériau.

Pour un corps ductile isotrope, f ne dépend que des invariants de $\underline{s}$:

$$J_1 = 0, \quad J_2 = (1/2)\, s_{ij}s_{ij}, \quad J_3 = (1/3)\, s_{ij}s_{jk}s_{ki} \text{ (1)}.$$

Le plus simple des critères de ce type s'écrit :

$$\boxed{J_2 - k^2 = 0} \tag{4}$$

où k^2 est une constante.

C'est le critère de Von Misès.

On vérifiera, à titre d'exercice, que dans l'espace σ_1, σ_2, σ_3, la surface de charge est un cylindre de révolution parallèle à (1, 1, 1).

2.4. Critère de Tresca

Le critère de Tresca est aussi un critère valable pour les matériaux isotropes et ductiles.

La formulation en est simple en fonction des contraintes principales supposées ordonnées selon $\sigma_{\mathrm{I}} \geqslant \sigma_{\mathrm{II}} \geqslant \sigma_{\mathrm{III}}$.

Le critère est :

$$\sigma_{\mathrm{I}} - \sigma_{\mathrm{III}} = 2k \tag{5}$$

où la contrainte principale intermédiaire σ_{II} ne joue aucun rôle.

---

(1) Sauf mention expresse du contraire, nous adoptons la convention de sommation sur les indices répétés.

En fonction des contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3 non ordonnées, la fonction de charge a la forme symétrique :

$$f(\underline{\sigma}) = \operatorname*{Sup}_{\substack{i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3}} \{\sigma_i - \sigma_j - 2k\} \tag{6}$$

On vérifiera que dans l'espace σ_1, σ_2, σ_3 la surface de charge est un prisme hexagonal parallèle à l'axe (1, 1, 1).

Notons que conformément au résultat général la fonction de charge peut s'exprimer au moyen des invariants de $\underline{\sigma}$ (et même ici de $\underline{s}$) ; dans le cas présent, cela est délicat (absence de forme fermée ou de forme simple analogue à (6)) et ne présente aucun intérêt pratique ; signalons seulement que l'expression polynomiale en J_2, J_3 donnée dans [19] n'est pas correcte (au lieu du prisme hexagonal indiqué plus haut, la surface de charge serait composée des six plans indéfinis qui le limitent).

2.5. Courbe intrinsèque (Mohr, Caquot)

Pour un matériau isotrope, Mohr puis Caquot ont proposé une généralisation du critère de Tresca sous la forme :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = g\,(\sigma_1 + \sigma_3) \tag{7}$$

en supposant les contraintes principales σ_1, σ_2, σ_3 ordonnées selon $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ (aucune ambiguïté n'étant à craindre, nous ne maintenons pas la distinction entre indices romains et arabes) (1).

La fonction g est à déterminer expérimentalement. On trouve que g possède les propriétés suivantes :

$g \searrow$ si $(\sigma_1 + \sigma_3) \nearrow$; elle s'annule pour une valeur positive de $(\sigma_1 + \sigma_3)$: $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ est alors la résistance à la traction isotrope ; et il semble que si $(\sigma_1 + \sigma_3) \searrow -\infty$, g tend vers une limite de sorte que l'on retrouve asymptotiquement le critère de Tresca (*cf.* [13]).

La caractéristique de ce type de critère de plasticité est que la contrainte principale intermédiaire n'intervient pas.

La relation (7) est une relation entre le rayon $\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, et l'abscisse $\dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$ du centre du cercle de Mohr relatif à l'état de contraintes au point

(1) L'expression de $f\,(\underline{\sigma})$ en fonction des contraintes principales non ordonnées est analogue à (6).

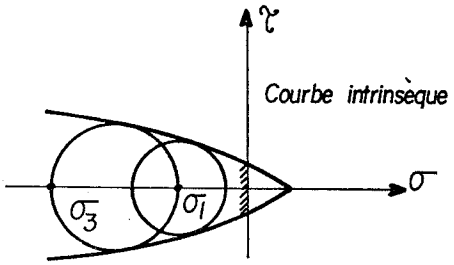

FIG. I.3.

étudié. Cela prouve que les cercles de Mohr représentant tous les états limites ont une enveloppe : cette enveloppe s'appelle la courbe intrinsèque.

Adoptant les notations de Hill nous posons :

$$-p = (\sigma_1 + \sigma_3)/2.$$

La figure 3 montre dans la représentation des contraintes due à Mohr, les cercles de Mohr correspondant à divers états d'équilibre limite et la courbe intrinsèque enveloppe de ces cercles. Soit :

$$|\tau| = h(\sigma) \tag{8}$$

l'équation de cette courbe, en désignant par σ et τ les composantes normale et tangentielle de la contrainte sur une facette.

Alors pour un matériau dont le critère de plasticité est de la forme (7), on peut énoncer :

Pour que l'état de contraintes en un point M ne viole pas le critère de plasticité, c'est-à-dire satisfasse $f(\underline{\sigma}) \leqslant 0$, il faut et suffit que le cercle de Mohr correspondant ne coupe pas la courbe intrinsèque, c'est-à-dire que pour toutes les facettes passant par M on vérifie :

$$|\tau| \leqslant h(\sigma). \tag{9}$$

Si et seulement si le critère de plasticité est atteint, il existe deux facettes sur lesquelles $|\tau| = h(\sigma)$ ([1]). Ces facettes sont symétriques l'une

([1]) Nous supposons la relation $\tau = h(\sigma)$ réelle, c'est-à-dire que la famille de cercles a une enveloppe réelle. (8) représente deux arcs symétriques par rapport à 0σ, dont l'ensemble constitue la courbe intrinsèque.

La question de la forme de la courbe intrinsèque au voisinage de son sommet a été débattue (sommet « plat » ou sommet « pointu ») ; nous pensons qu'il n'y a pas là de difficulté réelle. Il ne faut d'ailleurs pas perdre de vue que le plus souvent le phénomène physique correspondant au voisinage du sommet de la courbe intrinsèque est d'une nature différente : on voit apparaître la rupture fragile sans plastification.

de l'autre par rapport aux plans sur lesquels s'exercent les contraintes principales extrêmes.

2.6. Critère de Coulomb

Pour les sols on utilise très couramment le critère de plasticité de Coulomb : critère de type « courbe intrinsèque », pour lequel la courbe intrinsèque est constituée de deux droites symétriques inclinées à l'angle ϕ sur l'axe des contraintes normales.

Avec les notations habituelles, $H = C \operatorname{cotg} \phi$, (7) devient :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = -\sin \phi \, (\sigma_1 + \sigma_3 - 2H) \tag{10}$$

et (9) devient :

$$\boxed{|\tau| \leqslant C - \sigma \operatorname{tg} \phi} \quad (^1) \tag{11}$$

On se reportera à [11] pour les compléments sur ce sujet.

2.7. Plasticité et rupture

Comme nous l'avons déjà remarqué au § 2.5, il est utile dans cette étude des critères de plasticité de mentionner le phénomène de la rupture. Il n'est pas de notre propos de nous étendre sur ce sujet en plein développement actuellement.

D'une façon générale, la rupture — c'est-à-dire la séparation d'un corps en plusieurs morceaux — peut intervenir :

— soit sans qu'il y ait eu auparavant déformation plastique : c'est la *rupture fragile* qui se produit par fracturation perpendiculairement à la direction des plus grandes contraintes ;

— soit après déformation plastique : c'est la *rupture ductile.*

Dans une vision simple, et même simpliste, on peut concevoir le domaine d'élasticité du matériau comme l'intersection de deux domaines (vraisemblablement convexes) correspondant l'un à la sécurité vis-à-vis de la rupture fragile, l'autre à la « sécurité » vis-à-vis de l'apparition des déformations plastiques.

---

(1) Le signe moins, peu habituel, est dû à la convention de signes adoptée. Nous avons choisi d'utiliser les conventions et notations de Hill qui sont, nous a-t-il semblé, les plus courantes, afin de faciliter les lectures ultérieures.

La surface de charge est la frontière de ce domaine et apparaît donc composée de la zone sommitale (si elle existe) correspondant à la rupture fragile, d'une zone de transition où les deux phénomènes peuvent être mêlés, et de la frontière de plasticité.

L'expérience semble en effet montrer que pour tous les corps. lorsque la partie sphérique du tenseur des contraintes est une pression isotrope suffisante, on quitte le domaine de la rupture fragile et il y a rupture ductile.

D'autre part, toujours d'après les résultats expérimentaux, il apparaît que pour les matériaux composés d'une seule phase (cela exclut les matériaux poreux ou frittés, *cf.* [16, 17]) lorsque l'état de contrainte est une pression isotrope si grande soit-elle, il n'y a jamais plastification : la surface de charge est donc ouverte (au sens usuel du terme) dans la direction des pressions isotropes ([1]).

Pour les matériaux ductiles il n'y a pas de rupture fragile, pas de zone sommitale et la surface de charge est ouverte dans les deux directions correspondant aux pressions et aux tractions isotropes.

2.8. Matériaux anisotropes

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté les principaux critères de plasticité dans le cas de l'isotropie. En fait, il est connu que les matériaux sont souvent anisotropes (métaux, sols ou roches ; *cf.* par exemple pour ces deux derniers types de matériaux [1] et [24]).

Divers auteurs ont abordé l'étude de la plasticité anisotrope. Citons : les travaux de Hill [8] qui a obtenu des résultats très intéressants pour un problème de métallurgie ; la notion de tenseur d'anisotropie introduite par Caquot et Kérisel [4] ; ainsi que [2], [3], etc. ([2]).

3 — La déformation plastique

Comme nous l'avons dit au § 1, le franchissement du seuil de plasticité (ou de la surface de charge), correspond à l'apparition des déformations permanentes.

---

(1) Pour les matériaux poreux ou frittés le domaine d'élasticité est fermé dans toutes les directions. L'utilisation pour les sols, matériaux grenus, du critère de plasticité de Coulomb ou d'autres critères du type courbe intrinsèque « ouverts », correspond à une approximation parfaitement justifiée dans la gamme des contraintes rencontrées dans la pratique.

(2) Les fonctions de charge proposées par ces auteurs sont exprimées en contraintes d'Euler ce qui, nous l'avons dit, ne peut être qu'approximatif.

Définissons la déformation plastique :

Dans les cas usuels où l'élasticité du matériau étudié est linéaire et n'est pas modifiée par la déformation plastique, la déformation plastique est la déformation permanente après décharge complète du matériau si celle-ci est élastique ; il peut se faire en effet que, à partir d'un certain degré d'écrouissage, la décharge totale réelle ne puisse être totalement élastique, le chargement nul n'appartenant plus au domaine d'élasticité actuel de l'élément : dans ce cas, la déformation plastique est la déformation permanente obtenue après une décharge totale virtuelle entièrement élastique (figure 4 dans le cas d'une sollicitation uniaxiale).

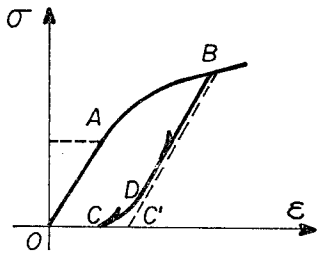

FIG. I.4.

La définition précise de la déformation plastique, valable dans tous les cas, se fait à partir des vitesses de déformation :

Nous désignons par $\underline{v}$ le tenseur vitesse de déformation ; à chaque instant du trajet de charge on connaît la vitesse de déformation totale v_{ij} (résultat de l'expérience), et la vitesse de déformation élastique v^e_{ij} (il suffit de faire une décharge infinitésimale), la vitesse de déformation plastique est la différence des deux précédentes, on a :

$$v_{ij} = v^e_{ij} + v^p_{ij}. \tag{12}$$

La déformation plastique est l'intégrale de v^p_{ij} le long du trajet de charge ([1]).

(1) Signalons que en toute rigueur il y aurait lieu dans cette définition d'utiliser le tenseur de déformation de Green ; d'autre part la notion d'état relâché ou d'état neutre, y intervient de manière fondamentale, le choix de cette configuration de référence, étudié dans [10, 23, 18] dans le cas d'isotropie, a été précisé par Mandel [14] dans les cas plus généraux.

4 — Origine de la déformation plastique (d'après [13])

Dans le solide, assemblage de grains cristallins, la déformation plastique peut avoir deux origines :

a) le mouvement relatif des grains eux-mêmes : c'est le cas des terres, et c'est alors le frottement entre les grains qui explique l'irréversibilité du mouvement ;

b) les déformations permanentes des grains : c'est le cas des métaux. Celles-ci se produisent par des glissements dans le réseau cristallin du grain, suivant des plans atomiques, expliqués par la théorie des dislocations (*cf.* par exemple [5]).

5 — Loi de comportement

Les figures 1 et 4 montrent clairement que la loi de comportement ne saurait être (comme c'est le cas en élasticité) une relation biunivoque entre l'état de contraintes actuel et la déformation actuelle (ainsi les points O et C correspondent au même état de charge et à des déformations différentes). La déformation actuelle dépend du trajet de charge suivi pour atteindre l'état de charge actuel (1).

Si l'on connaît l'état de contrainte actuel et l'état d'écrouissage, c'est-à-dire la valeur actuelle des paramètres d'écrouissage, qui représentent l'intervention de l'histoire du chargement, alors la donnée de

(1) Elle ne dépend pas de l'horaire car nous avons exclu les phénomènes de viscosité. Le temps que l'on a coutume de faire intervenir en plasticité statique ou quasi statique n'est donc qu'un paramètre cinématique dont on peut modifier l'échelle comme on le désire. Ceci entraîne que dans (14 et 15) le temps ne puisse pas intervenir dans $A_{ij,\,hk}$.

En fait les déformations irréversibles des matériaux contiennent toujours une partie visqueuse et le temps physique intervient dans la loi de comportement, mais aussi dès la notion de seuil de plasticité qui dépend de la vitesse de charge, (c'est en particulier ce qu'indique pour les métaux la théorie des dislocations [26]). L'étude de la viscoplasticité, après une approche purement phénoménologique dont les résultats restaient limités, semble maintenant aboutir à une théorie plus fondamentale (cf. [15] où l'on trouvera également des références aux études antérieurement effectuées sur le sujet).

Il va de soi que l'utilisation du modèle de comportement plastique sans viscosité sera justifiée pour les phénomènes où l'aspect visqueux n'a pas le rôle prépondérant.

l'accroissement de contrainte $d\sigma$ détermine l'accroissement de déformation. (Dans le cas unidimensionnel des figures 1*a* et 4, ε joue le rôle de paramètre d'écrouissage (1)).

Une telle loi de comportement est dite de type incrémental.

On aura donc :

$$d\underline{\varepsilon} = \mathcal{B}(\underline{\sigma}, E, d\underline{\sigma})$$

indépendant de $\dot{\underline{\sigma}}$ d'après la remarque sur l'absence de viscosité, et qui est nécessairement de la forme différentielle :

$$\begin{aligned} d\underline{\varepsilon} &= \underline{\underline{B}}(\underline{\sigma}, E)\, d\underline{\sigma} \\ d\varepsilon_{ij} &= B_{ij,hk}(\underline{\sigma}, E)\, d\sigma_{hk} \end{aligned} \tag{13}$$

(ou encore : $\underline{v} = \mathcal{B}(\underline{\sigma}, E, \dot{\underline{\sigma}})$ qui doit être homogène par rapport au temps, d'où : $\underline{v} = \underline{\underline{B}}(\underline{\sigma}, E)\, \dot{\underline{\sigma}}$).

Dans la décomposition du § 3, $(d\varepsilon^e)_{ij}$ suit par définition la loi de comportement élastique :

$$d\underline{\varepsilon}^e = \underline{\underline{A}}\, d\underline{\sigma}$$

posant :

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}$$

on a :

$$(d\varepsilon^p)_{ij} = A_{ij,hk}(\underline{\sigma}, E)\, d\sigma_{hk} \tag{14}$$

ou en passant aux vitesses :

$$v^p_{ij} = A_{ij,hk}(\underline{\sigma}, E)\, \dot{\sigma}_{hk} \quad (2). \tag{15}$$

Le comportement du matériau étant différent à la « charge » et la « décharge » (irréversibilité caractéristique de la plasticité) $A_{ij,hk}$ aura deux expressions différentes suivant qu'on sera dans l'un ou l'autre cas.

Nous allons maintenant chercher à préciser ces expressions.

D'après les résultats des expériences indiquées au § 1 :

— La déformation plastique d'un élément écrouissable n'a lieu que

(1) Pour le matériau parfaitement plastique (fig. 1*b*), pour $\sigma = \sigma_A$ et $d\sigma = 0$, $d\varepsilon$ est indéterminé. On peut dire qu'en fait tous les matériaux présentent un certain écrouissage, si faible soit-il, ce qui fait disparaître ce résultat peu physique. Cet écrouissage sera, dans certains cas, suffisamment faible pour pouvoir être négligé dans des problèmes où cette hypothèse apporte une simplification.

(2) En toute rigueur il y a lieu dans les formules (14, 15) de prendre pour $d\underline{\sigma}$ et $\dot{\underline{\sigma}}$ des définitions objectives (dérivées de Truesdell par ex., cf. [13]).

si, le critère de plasticité étant satisfait, la *charge* de cet élément se poursuit (fig. 5) (1).

En posant :

$$d_E f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}} d\sigma_{hk} \tag{16}$$

(« différentielle de f à écrouissage constant »),

cette condition, simple dans le cas du chargement à un seul paramètre, se traduit ici par :

$$d_E f > 0.$$

Alors :

$$(d\varepsilon^p)_{ij} \neq 0 \text{ est donné par (14)}$$

où $\underline{A} \neq 0$.

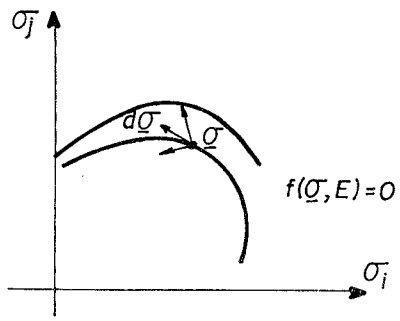

FIG. I.5.

— Si l'on reste sur la surface de charge actuelle c'est-à-dire si :

$$d_E f = 0$$

la déformation plastique est nulle :

$$(d\varepsilon^p)_{ij} = 0.$$

— Enfin si l'on procède à une *décharge*, c'est-à-dire si :

$$d_E f < 0,$$

il n'y a pas de déformation plastique :

$$(d\varepsilon^p)_{ij} = 0 \text{ (2)}.$$

(1) Et on sait que dans ce cas, par définition même de l'écrouissage, la surface de charge est entraînée par le point de charge d'où $f(\underline{\sigma}+d\underline{\sigma}, E+dE) = 0$.

(2) Et la surface de charge n'est pas modifiée.

De plus le passage est continu d'un cas à l'autre c'est-à-dire que :

$$\text{si } d_E f \searrow 0, \text{ on a } (d\varepsilon^p)_{ij} \to 0.$$

Chaque forme linéaire $(d\varepsilon^p)_{ij}$ en $d\sigma_{hk}$, (14), s'annule donc quand la forme linéaire $d_E f$ en $d\sigma_{hk}$, (16), s'annule.

Il y a donc dépendance de ces formes et :

$$\boxed{d\varepsilon^p_{ij} = H_{ij}(\underline{\sigma}, E)\, d_E f} \tag{17}$$

Ainsi l'accroissement $\underline{d\sigma}$ du *tenseur* $\underline{\sigma}$ n'intervient dans $\underline{d\varepsilon^p}$ que par le *scalaire* $d_E f$.

Cela entraîne que les directions principales de l'accroissement de la déformation plastique et les rapports des valeurs principales ne dépendent pas des accroissements de contraintes ; ce point a été vérifié par les expériences de Morrisson et Shepherd (1950) sur la traction-torsion de fils métalliques.

Dans le cas où le matériau est isotrope à écrouissage isotrope, $\underline{H}$ est par rapport à $\underline{\sigma}$ une fonction tensorielle isotrope, et a donc les mêmes directions principales que celui-ci. $\underline{d\varepsilon^p}$ et $\underline{\sigma}$ ont mêmes directions principales (proposition formulée par Saint-Venant en 1870 et vérifiée expérimentalement par Taylor et Quinney en 1931).

En résumé, *pour le matériau écrouissable*, les raisonnements généraux permettent de préciser la loi de comportement pour la déformation plastique, sous la forme :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (d\varepsilon^p)_{ij} = H_{ij}(\underline{\sigma}, E)\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}}\, d\sigma_{hk} & \text{si } \left\{\begin{array}{l} f(\sigma_{hk}, E) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}}\, d\sigma_{hk} \geqslant 0 \end{array}\right. \\ (d\varepsilon^p)_{ij} = 0 \text{ dans les autres cas.} & \end{array}}$$

C'est tout ce que l'on peut dire sur la loi de comportement sans faire d'hypothèse complémentaire.

Pour le matériau parfaitement plastique, la loi de comportement est simplement :

$$\boxed{\begin{array}{l} (d\varepsilon^p)_{ij} \neq 0 \text{ ou } = 0 \text{ si } f(\sigma_{ij}) = 0 \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\, d\sigma_{ij} = 0 \\ (d\varepsilon^p)_{ij} = 0 \text{ dans les autres cas.} \end{array}}$$

De plus, si le matériau est isotrope, les tenseurs $\underline{v}^p$ et $\underline{\sigma}$ ont mêmes directions principales.

6 — Principe du travail maximal

On fait souvent l'hypothèse que les matériaux obéissent au principe du travail maximal de Hill (1950) que l'on peut énoncer :

Soit pour un élément, un tenseur contrainte $\underline{\sigma}$ *à la limite d'écoulement,* $f(\underline{\sigma}) = 0$, *et* $\underline{v}^p$ *un tenseur vitesse de déformation plastique correspondant ;* $\underline{\sigma}^*$ *un tenseur tel que* $f(\underline{\sigma}^*) < 0$, *alors :*

$$(\sigma_{ij} - \sigma^*_{ij}) v^p_{ij} \geqslant 0 \tag{18}$$

$$(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) \underline{v}^p \geqslant 0.$$

Géométriquement l'inégalité (18) indique que si l'on représente $\underline{v}^p$ et $\underline{\sigma}$ par des vecteurs d'un espace à 6 dimensions (*cf.* [12]), le produit scalaire $\overrightarrow{\sigma^*\sigma} \cdot \vec{v}^p$ est $\geqslant 0$ si σ est sur la surface $f(\sigma) = 0$ et si σ^* n'est pas à l'extérieur.

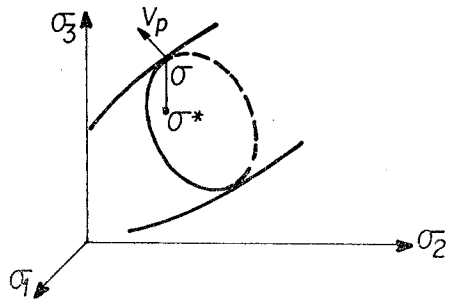

FIG. I.6.

Cela implique la *convexité* de la surface de charge

et v^p est dirigé suivant une normale extérieure à cette surface au point σ :

si la surface est régulière au point σ (1) :

$$\underline{v}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \qquad \lambda \geqslant 0 \tag{19}$$

(1) La figure 6 ci-dessus a été tracée, pour plus de simplicité, dans le cas où il y a isotropie.

ou pour comprendre aussi le cas d'un point conique :

$$\underline{v}^p \in \lambda\, \partial f(\underline{\sigma}) \qquad \lambda \geqslant 0 \ (^1) \tag{20}$$

f est donc *potentiel plastique.*

Si le matériau est écrouissable on peut faire l'hypothèse du principe du travail maximal à chaque stade de l'écrouissage.

Remarquons que dans le cas des métaux, les glissements le long des plans atomiques sont gouvernés par la loi de Schmid : le glissement a lieu si la cission sur le plan dans la direction du glissement atteint une cission critique ; le principe du travail maximal peut alors être démontré comme conséquence de la loi de Schmid (*cf.* [13], p. 720).

7 — Conséquence pour la loi de comportement

Si l'on fait l'hypothèse que le principe du travail maximal est satisfait, (équivalente à dire que la fonction de charge, convexe, est aussi potentiel plastique), la loi de comportement se trouve précisée.

— Dans le cas de l'écrouissage on a :

$$\left.\begin{aligned} & v^p_{ij} = \frac{1}{M}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}}\dot{\sigma}_{hk}\right) \quad \text{si} \quad f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}}\dot{\sigma}_{hk} \geqslant 0 \\ & M \geqslant 0 \\ & v^p_{ij} = 0 \quad \text{dans les autres cas} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

M est le module d'écrouissage qui, a priori, dépend de l'histoire du chargement.

— S'il n'y a pas d'écrouissage :

$$\left.\begin{aligned} & v^p_{ij} = \lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{si} \quad f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}}\dot{\sigma}_{hk} = 0 \\ & \lambda \geqslant 0, \text{ facteur positif arbitraire} \\ & v^p_{ij} = 0 \quad \text{dans les autres cas.} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

---

(1) $\partial f(\underline{\sigma})$: sous-différentiel au point $\underline{\sigma}$.

$\lambda\partial f(\underline{\sigma})$, $\lambda \geqslant 0$, est le cône des normales extérieures à f en ce point.

8 — Validité du principe du travail maximal Cas des sols

D'après les résultats expérimentaux, le principe du travail maximal semble vérifié pour les matériaux dont le critère de plasticité est indépendant de la pression moyenne ($\sigma_{ii}/3$). C'est le cas pour les métaux ductiles et aussi pour les argiles à $\phi = 0$ (sol non drainé). La déformation plastique s'effectue alors sans variation de volume.

Pour un sol obéissant au critère de Coulomb (10), le principe du travail maximal conduirait à la loi de comportement plastique :

$$\left.\begin{aligned} v_1^p &= \lambda(1+\sin\phi) \\ v_2^p &= 0 \\ v_3^p &= -\lambda(1-\sin\phi) \\ &\lambda \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

d'où une variation de volume dans la déformation plastique égale à :

$$\dot{\theta} = v_1^p + v_3^p = 2\lambda \sin\phi = \left[1-\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)\right] v_1^p = \sin\phi\,(v_1^p - v_3^p).$$

Une telle variation de volume n'est pas en accord avec l'expérience : il s'agit d'une dilatation qui est trop importante. Le principe du travail maximal n'est donc pas acceptable pour les sols de Coulomb ($\phi \neq 0$).

Certains auteurs (*cf.* par exemple [6]) ont adopté pour les sols l'hypothèse selon laquelle la déformation plastique s'effectue sans variation de volume : $v_{ii}^p = 0$. Le matériau étant isotrope les tenseurs $\underline{v}^p$ et $\underline{\sigma}$ doivent avoir mêmes directions principales. En particulier la loi de comportement du matériau de Tresca standard (i.e. obéissant au principe du travail maximal) semble convenir dans ce cas :

$$\left.\begin{aligned} v_1^p &= \lambda \\ v_2^p &= 0 \\ v_3^p &= -\lambda \\ \lambda &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

D'après [9] cette hypothèse est acceptable pour un sol de Coulomb s'il est à l'indice des vides critique.

Suivant Bent Hansen [7] la loi de comportement pourrait être du type :

$$\left.\begin{aligned} v_1^p &= \lambda(1+\sin \nu) \\ v_2^p &= 0 \\ v_3^p &= -\lambda(1-\sin \nu) \\ \lambda &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

où l'angle ν est appelé angle de dilatation de l'élément (ν est positif s'il y a dilatation).

En fait l'angle ν varie au fur et à mesure de la déformation plastique de l'élément, ce qui rend la loi de comportement (25) difficilement utilisable. Toutefois d'après [9], des résultats satisfaisants sont obtenus en considérant une idéalisation du matériau avec ν, constant $0 \leqslant \nu \leqslant \phi$, comme cela avait été proposé dans [7], [20], et utilisé dans [22].

Le sol est donc traité comme ayant une fonction de charge de Coulomb (angle ϕ) et un potentiel plastique de Coulomb (angle $\nu \neq \phi$) différent de la fonction de charge.

9 — Remarque finale

Il est important de souligner que la définition du comportement plastique d'un matériau comprend deux parties :

a) seuil de plasticité - critère de plasticité,

b) loi de comportement.

Le critère de plasticité (ou plus exactement la fonction de charge) n'intervient dans la loi de comportement d'une façon générale que pour le matériau écrouissable en tant qu'il sert à « mesurer » l'intensité de la charge subie par l'élément de matière.

Ce n'est que lorsque l'on fait l'hypothèse du principe du travail maximal, que le critère de plasticité définit aussi la loi de comportement.

Ces deux aspects n'ont pas toujours été bien distingués, notamment comme le signale Roscoe [21] à propos du « critère de rupture de Mohr-Coulomb ». Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point lors de l'étude des écoulements plans.

REFERENCES — CHAPITRE I

[1] J. BIAREZ (1962). — *Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols et des matériaux pulvérulents*. Thèse Dr. ès-Sc., Grenoble.

[2] J.P. BOEHLER et A. SAWCZUK (1970). — *Equilibre limite des sols anisotropes*. J. Mec. *9*, 1, pp. 5-33.

[3] J. BOSCHAT et D. RADENKOVIC (1962). — *Une généralisation de la loi limite de Tresca aux matériaux anisotropes*. Z. Ang. Math. Mech. *42*, pp. 90-91.

[4] A. CAQUOT et J. KERISEL (1956). — *Traité de Mécanique des sols*. Troisième édition Gauthier-Villars, Paris.

[5] J. FRIEDEL (1966). — *Dislocations*. Pergamon Press.

[6] J. BRINCH HANSEN (1953). — *Earth pressure calculation*. Danish Technical Press, Copenhague.

[7] BENT HANSEN (1958). — *Line ruptures regarded as narrow rupture zones...* C.R. Conf. sur les problèmes de poussées des terres, Bruxelles, *1*, pp. 39-49.

[8] R. HILL (1950). — *The Mathematical theory of Plasticity*. Clarendon Press, Oxford.

[9] R.G. JAMES et P.L. BRANSBY (1971). — *A velocity field for some passive earth pressure problems*. Géotechnique *21*, 1, pp. 61-83.

[10] E.H. LEE (1969). — *Elastic-plastic deformation at finite strains*. J. Appl. Mech. série E. *36*, 1, pp. 1-6.

[11] J. LEGRAND (1969). — *Cours de Mécanique des sols*. E.N.P.C., Paris.

[12] J. MANDEL (1964). — *Contribution théorique à l'étude de l'écrouissage et des lois de l'écoulement plastique*. C.R. 11e Congr. Int. Mec. Appl. Münich. pp. 502-509.

[13] J. MANDEL (1966). — *Mécanique des milieux continus*. Tome II. Gauthier-Villars, Paris.

[14] J. MANDEL (1971*a*). — *Sur la décomposition d'une transformation élasto-plastique*. C.R.A.S. Paris, *272*, A, pp. 276-279.

[15] J. MANDEL (1971*b*). — *Plasticité classique et viscoplasticité*. Cours au C.I.S.M., Udine (Italie).

[16] P. MORLIER (1970*a*). — *Plasticité et écrouissage d'un métal fritté*. — Mém. Sc. Rev. de Métallurgie, *67*, 6, pp. 401-412.

[17] P. MORLIER (1970*b*). — *Comportement des roches sous contrainte en fonction de leur teneur en eau*. La Houille Blanche, 5, pp. 471-475.

[18] M. PIAU (1970). — *Description du comportement d'une classe de milieux continus...*, J. Mec. *9*, 3, pp. 375-401.

[19] W. PRAGER (1951). — *Theory of perfectly plastic Solids*. John Wiley, New York.

[20] D. RADENKOVIC (1961). — *Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée*. C.R. Ac. Sc. Paris, *252*, pp. 4103-4104.

[21] K.H. ROSCOE (1970). — *10th Rankine lecture : the influence of strains in soil Mechanics*. Géotechnique *20*, 2, pp. 129-170.

[22] J. SALENÇON (1966). — *Expansion d'une cavité dans un milieu élasto-plastique*. Ann. Pts. Ch. 1966, *3*, pp. 175-187.

[23] F. SIDOROFF (1970). — *Quelques réflexions sur le principe d'indifférence matérielle, pour un milieu ayant un état relâché*. C.R.A.S. Paris, *271*, A, pp. 1026-1029.

[24] P.M. SIRIEYS (1966). — *Contribution à l'étude des lois de comportement des structures rocheuses*. Thèse Dr. ès-Sc., Grenoble.

[25] A.S. WINEMAN, A.C. PIPKIN (1964). — *Material symmetry restrictions on constitutive equations*. Arch. Rat. Mech. Anal. *17*, pp. 184-214.

[26] J. ZARKA (1970). — *Sur la viscoplasticité des métaux*. Mém. Art. Fr. (Sc. Tech. Arm.), fasc. 2, 1970, pp. 223-292.

A. DRESCHER et G. de JOSSELIN de JONG (1972). — *Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material*. Jl. Mech. Phys. Solids, vol. 20, pp. 337-351.

P. HABIB (1953). — *Etude de l'orientation du plan de rupture et de l'angle de frottement interne de certaines argiles*. C.R. 3e Congr. Int. Mec. Sols, Zürich, vol. 1, pp. 28-31.

R. HILL (1948). — *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*. Proc. Roy. Soc. A, vol. 193, pp. 281-289.

R. HILL (1949). — *The theory of plane plastic strain for anisotropic metals*. Proc. Roy. Soc. A, vol. 198, pp. 428-437.

H. IGAKI, M. SUGIMOTO et K. SAITO (1970). — *Anisotropic yield criterion under the maximum shear stress theory*. J.S.M.E., vol. 13, n° 61, pp. 825-836.

A.W. JENIKE et R.T. SHIELD (1959). — *On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure*. Jl. Appl. Mech., Trans. ASME, vol. 27, pp. 599-602.

J. MANDEL (1969). — *Cours de Science des Matériaux*. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Z. MROZ (1963). — *Non associated flow-laws in Plasticity*. Jl. Mécanique, vol. 2, n° 1, pp. 21-42.

V.N. NIKOLAEVSKII (1971). — *Governing equations of plastic deformation of a granular medium*. Jl. Appl. Math. & Mech. (trad. P.M.M.), vol. 35, n° 6, pp. 1017-1029.

R.N. YONG et E. Mc.KYES (1971). — *Yield and failure of a clay under triaxial stresses*. Jl. Soil Mech. & Found. Div., Proc. ASCE, vol. 97, n° SM1, pp. 159-176.

H. ZIEGLER (1969). — *Zum plastischen potential in der Bodenmechanik Z.A.M.P.*, vol. 20, pp. 659-675.

CHAPITRE II

APERÇU SUR LES PROBLÈMES D'ÉLASTO-PLASTICITÉ

1 — Introduction

On appellera problèmes d'élasto-plasticité, les problèmes dans lesquels la loi de comportement adoptée pour les matériaux, est du type indiqué au chapitre I, faisant intervenir dans la déformation, une partie élastique et une partie plastique.

A titre d'exemple, dans le cas du matériau isotrope, élastique linéaire, obéissant au critère de plasticité de Misès avec écrouissage, et au principe du travail maximal, ce sera :

$$\left.\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} v_{ij} = \dfrac{1+\nu}{E}\,\dot{\sigma}_{ij} - \dfrac{\nu}{E}\,\dot{I}_1\delta_{ij} + \psi s_{ij} \\ I_1 = \sigma_{ii} \\ \text{où } \psi = g(J_2, J_3, E)\,\dot{J}_2 \geqslant 0 \end{array}\right\} & \text{si } \dot{J}_2 \geqslant 0 \text{ et } J_2 = k^2(E) \\ \left.\begin{array}{l} v_{ij} = \dfrac{1+\nu}{E}\,\dot{\sigma}_{ij} - \dfrac{\nu}{E}\,\delta_{ij}\dot{I}_1 \end{array}\right\} & \text{dans les autres cas} \end{array}\right\} \quad (1)$$

dite *loi de Prandtl-Reuss.*

Ces problèmes sont donc les problèmes de base à considérer dès que l'introduction de la plasticité (sans viscosité) dans le comportement des matériaux est nécessaire.

Comme nous le verrons ces problèmes sont difficiles et pour cette raison même on n'a su résoudre qu'un petit nombre d'entre eux. Nous n'entrerons donc pas dans les détails et nous nous bornerons à examiner la façon dont ils se posent et à exposer certaines considérations générales à leur sujet

(on se reportera aux traités classiques, et en particulier à [4] pour une présentation plus détaillée : théorèmes d'unicité de la solution, principes de minimum, etc.).

2 — Position du problème. Méthode de résolution

On se propose de déterminer l'état actuel de contraintes et de déformations d'un système élasto-plastique soumis à un certain chargement.

La résolution se fait de proche en proche en suivant le trajet de charge. Ce caractère différentiel est imposé par le type même de la loi de comportement (incrémental) dû à la présence des irréversibilités (charge et décharge). En règle générale, l'état de contraintes et de déformation du système dépend du *trajet de charge* suivi pour atteindre le chargement actuel.

On procède donc pas à pas en suivant l'histoire du chargement : à l'instant t on connaît le champ de contraintes et le champ de déplacements ; on détermine en utilisant les équations d'équilibre, les équations de comportement — (1) par exemple — à partir des conditions aux limites sur les vitesses de forces appliquées (de surface et de masse) et les vitesses de déplacement imposées, les champs de vitesses de contraintes $\dot{\sigma}_{ij}$ et de vitesses de déplacements u_i dans tout le solide. Ceci permet alors de passer à l'instant $(t+\mathrm{d}t)$ où l'on connaît à nouveau les champs de contraintes et de déplacements.

Il est à souligner qu'à chaque pas les limites entre zones élastiques et zones élasto-plastiques varient et doivent être à nouveau déterminées :

— des points situés en zones élastiques ($f(\underline{\sigma}) < 0$) à l'étape précédente appartiennent maintenant aux zones élasto-plastiques : « ils entrent en plasticité »,

— des points situés en zones élasto-plastiques à l'étape précédente ($f(\underline{\sigma}) = 0$), appartiennent maintenant aux zones élastiques : phénomène de « décharge locale ».

Ceci est la principale source de difficultés pratiques.

Seuls quelques problèmes dans lesquels des considérations de symétrie apportaient de grosses simplifications ont pu être résolus sans faire appel au calcul numérique. En utilisant des techniques d'analyse numérique (fondées sur les principes de minimum), comme la méthode des éléments finis, (*cf.* par ex. [3]) on peut résoudre des problèmes plus compliqués mais encore relativement simplifiés ; toutefois ces procédés restent lents et coûteux.

3 — Comportement d'un système soumis à un processus de chargement

3.1. Chargement dépendant d'un paramètre

Considérons un système élasto-plastique (solide ou ensemble de solides) soumis à un chargement dépendant d'un seul paramètre Q, et partons de l'état naturel (contraintes initiales nulles) pour lequel $Q = 0$.

Si on néglige les *changements de géométrie*, on passe, au cours du processus de chargement (Q croissant) par les phases suivantes :

— D'abord tant que Q reste inférieur à une certaine valeur Q_0, il n'y a pas de zones élasto-plastiques, on a :

$$f(\underline{\sigma}) < 0 \quad \text{partout.}$$

— Pour $Q = Q_0$, des zones élasto-plastiques apparaissent : le critère de plasticité est atteint en un point (ou plusieurs points simultanément). Q_0 est *la limite d'élasticité* initiale du système.

— Q croissant au-delà de Q_0, les zones élasto-plastiques se développent. Il y a possibilité dans ces zones, de déformations pastiques mais celles-ci sont contenues par les déformations des zones élastiques.

— Puis quand Q atteint une valeur Q_1, les zones élasto-plastiques sont suffisamment développées pour qu'apparaisse la possibilité d'*écoulement plastique libre* c'est-à-dire de déformations plastiques qui ne sont plus contenues par les zones élastiques.

Soit par exemple, le problème plan d'une pression uniforme d'intensité variable Q appliquée à la surface d'un demi-plan sur une largeur $2a$ dans le cas d'un matériau de Tresca (1) ; on a :

$Q_0 = \pi k$ (fig. 1*a*), la zone élasto-plastique est alors le demi-cercle de diamètre AA' (où le critère est atteint en tous les points simultanément) ;

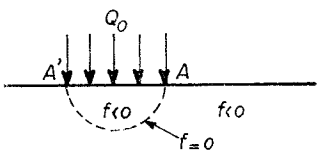

FIG. II.1*a*.

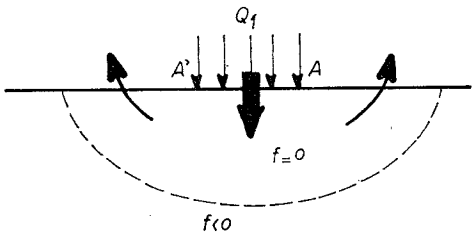

FIG. II.1*b*.

(1) Matériau supposé, de plus, homogène et à élasticité linéaire isotrope.

$Q_1 = (\pi+2)k$ (fig. 1*b*), la zone élasto-plastique ayant l'allure indiquée et permettant l'écoulement du matériau sous le poinçon jusqu'à la surface de part et d'autre.

— La suite du phénomène est alors différente suivant que le matériau constitutif est écrouissable ou parfaitement plastique :

Dans le cas du matériau parfaitement plastique :

On voit que si l'on continuait à négliger les changements de géométrie au-delà de $Q = Q_1$, la déformation du système se poursuivrait sous charge constante égale à Q_1, conduisant à la ruine. (figure 1*b* : enfoncement du poinçon et refoulement du matériau sur les côtés).

En fait les changements de géométrie ne peuvent plus être négligés, une fois le stade de l'écoulement libre atteint. La poursuite de la déformation du système ne se fera donc pas sous charge constante égale à Q_1, jusqu'à la ruine, mais Q_1 correspond toutefois pratiquement à la charge de ruine (*cf.* [7]) (1). Q_1 est la *charge limite* du système.

Dans le cas du matériau écrouissable :

Q_1 ne présente plus le même intérêt. En effet, en supposant encore négligeables les changements de géométrie après l'apparition de l'écoulement plastique libre ($Q = Q_1$), la déformation de la structure ne se poursuit plus sous charge constante par suite de l'écrouissage des éléments.

Pour le matériau écrouissable, la ruine de la structure se produit en général par phénomène d'instabilité qui doit être étudié dans chaque cas.

3.2. Chargement dépendant de plusieurs paramètres

Dans le cas d'un chargement dépendant d'un nombre fini de paramètres (2) les notions du § 3.1 se transposent ainsi :

— On définit le *domaine d'élasticité initial* du système qui est limité par la *frontière d'élasticité initiale*, lieu des points Q_0. Cette surface, convexe (dans l'hypothèse d'une fonction de charge convexe et de l'élasticité linéaire), est indépendante du trajet de charge suivi depuis l'état naturel, pour l'atteindre (réversibilité des déformations élastiques).

---

(1) Il existe certains problèmes où des changements importants de géométrie peuvent être tolérés, ces derniers produisent un « écrouissage géométrique » considérable et la charge de ruine est très différente de Q.

(2) Par exemple soumis à r forces ou pressions actives d'intensité Q_i. La notion de paramètres de chargement sera définie avec précision au chapitre III de façon à couvrir certains cas de conditions aux limites plus difficiles.

— Si l'on poursuit le chargement au-delà de cette frontière, la frontière d'élasticité actuelle du système évolue, étant entraînée par le point de charge Q : c'est « l'écrouissage du système », dû à l'écrouissage propre des éléments plastiques du système et à l'incompatibilité des déformations plastiques (*cf.* [5]). Cette frontière dépend du trajet suivi pour l'atteindre.

— L'écoulement libre du système est atteint lorsque, suivant le trajet de charge choisi, le chargement atteint la valeur Q_1.

Le lieu des points Q_1 correspondant à tous les trajets de charge est la *frontière d'écoulement du système.*

L'étude des propriétés des chargements Q_1 et de la frontière d'écoulement du système est l'objet de la théorie des charges limites exposée au Chapitre V : on démontre sous certaines hypothèses que la frontière d'écoulement du système est une surface convexe, indépendante du trajet de charge et aussi des propriétés élastiques du matériau.

La figure 2*b* extraite de [5] montre à titre d'exemple pour la structure représentée en 2*a*, les différentes frontières.

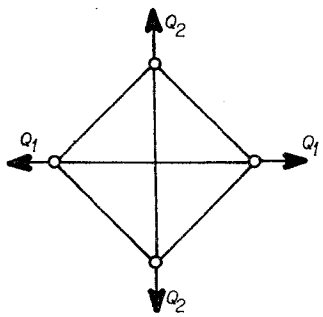

FIG. II.2*a*

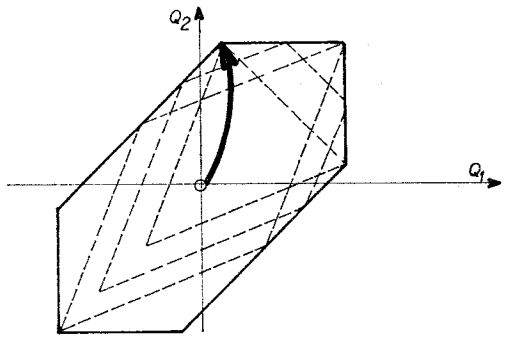

FIG. II.2*b*.

4 — Etude de deux exemples simples

4.1. L'expérience de traction simple

Considérons par exemple l'expérience de traction simple, (*cf.* [4]), sur une éprouvette métallique (figure 3, dans la zone de contraintes homogènes).

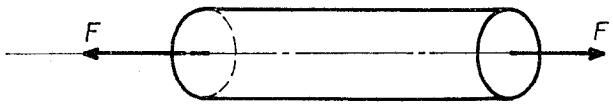

FIG. II.3.

Si le matériau constitutif est écrouissable, l'écrouissage entraîne que dans chaque fibre la contrainte σ doit augmenter pour que la déformation se poursuive.

La force appliquée F, produit de la contrainte σ par la section actuelle, peut donc croître jusqu'à ce que les changements de géométrie (rétrécissement de la section) viennent contrebalancer l'écrouissage : il existe un maximum de la force qui se traduit dans la pratique par un phénomène d'instabilité ; il y a localisation de la déformation : c'est la striction.

Si la matériau constitutif est parfaitement plastique, la charge Q_1 est la charge pour laquelle la plastification du corps de l'éprouvette est atteinte. C'est la charge limite comme nous l'avons définie au § II.3.

Il est clair d'ailleurs que dans ce cas le phénomène d'instabilité se produit également et précisément pour $Q = Q_1$ puisque la contrainte dans les fibres reste constante tandis que la section décroît.

4.2. Une structure simple

Le système étudié est la structure de la figure 1*a* : c'est un cadre avec ses diagonales. En A, B, C, D, sont des articulations. Les barres sont élastiques parfaitement plastiques, ont la même section, les mêmes propriétés élastiques et plastiques, de plus leur limite de plasticité est la même en traction et en compression, $\pm L$.

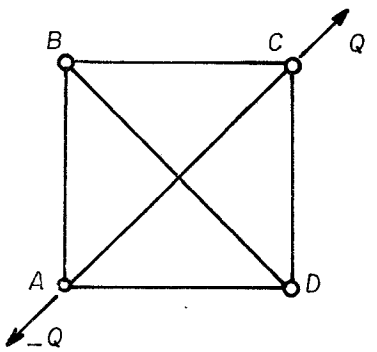

FIG. II.4.

Cette structure est soumise à l'action des deux forces $+Q$ et $-Q$ en A et C qui constituent un chargement à un paramètre (fig. 4).

Il s'agit d'un système une fois hyperstatique dont on suppose l'état initial naturel.

Désignant par T la force de traction dans la barre AC, on a par la statique, les forces dans les barres.

$$AC : T, \qquad CD \text{ et } CB : (Q-T)\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad BD : -(Q-T).$$

En élasticité, on obtient :

$$T = Q\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

C'est donc dans AC que s'exerce la force la plus grande en valeur absolue, et la limite d'élasticité de la structure est atteinte quand cette force atteint la limite de plasticité pour une barre ; d'où : $Q_0 = L\sqrt{2}$.

Si Q croît au-dessus de Q_0, la force reste fixée dans AC, égale à L : $T = L$; les forces dans les autres barres sont donc connues : CD et CB : $(Q-L)\sqrt{2}/2$, BD : $-(Q-L)$. Ces barres ont des déformations purement élastiques connues.

Dans AC, la déformation est la somme de l'allongement élastique et l'allongement plastique qui par son arbitraire permet la compatibilité. Les déformations plastiques sont contenues en ce sens que la déformation de la structure totale est celle de la structure *élastique* composée des cinq barres (AB, BC, CD, DA, BD), soumise aux forces $(Q-L)$ et $-(Q-L)$; cette structure possède un degré d'hyperstaticité de moins que la structure initiale : elle est isostatique.

Cela est valable jusqu'à ce que la limite de plasticité soit atteinte dans une autre barre. C'est dans BD que la limite de plasticité est atteinte en premier, en compression cette fois, pour $Q = 2L$.

Alors c'est l'écoulement libre : l'allongement de AC et le raccourcissement de BD ne sont pas limités par les déformations du reste de la structure. La structure est devenue un mécanisme. Si on continuait de négliger les changements de géométrie (variations d'angles) l'écoulement se produirait sous charge constante $Q_1 = 2L$ qui est *la charge limite.*

Il faut remarquer :

1) Le rôle essentiel de l'absence d'écrouissage : la force dans une barre en équilibre limite reste constante malgré l'accroissement de déformation.

2) On a négligé les changements de géométrie jusqu'à l'apparition de l'écoulement plastique libre. Cela est légitime car les déformations élastiques de ($ABCD$, BD), restent petites, si le matériau a un module d'Young assez élevé (par rapport à L).

Nous reviendrons plus tard sur certains problèmes où cette hypothèse se révèle inexacte.

5 — Importance des changements de géométrie

Pour beaucoup de problèmes, si on effectue la résolution élastoplastique en négligeant les changements de géométrie indiquée au § 3.1, on trouve que l'écoulement libre n'est atteint que pour une déformation très grande ou même infinie. Il n'est donc pas légitime de négliger les changements de géométrie jusqu'à l'apparition de l'écoulement libre, qui a lieu sous cette hypothèse à la charge Q_1.

Pourtant cette charge Q_1 conserve souvent un intérêt pratique pour ces problèmes, lorsque l'on trouve que Q_1 est atteinte rapidement c'est-à-dire que pour des déformations de l'ordre de 2 à 5 fois celles obtenues à la limite d'élasticité de la structure — et donc encore négligeables (1) — la charge Q est déjà très voisine de Q_1 (par exemple : 0,95 Q_1).

On peut penser en effet que dans ces cas, si la résolution exacte en tenant compte des changements de géométrie était effectuée, elle ne différerait de façon sensible de la précédente qu'à partir de valeurs de Q voisines de Q_1 et qu'en conséquence la charge pour laquelle des déformations importantes entraînant la ruine pratique de la structure apparaissent est proche de Q_1. Le problème de la flexion élastoplastique d'une poutre à section rectangulaire (voir [4], [1]) fournit un exemple simple de ce cas.

Il n'en est pas toujours ainsi. Par exemple dans le cas d'une enveloppe sphérique soumise à une pression intérieure [4], on trouve par la résolution élastoplastique sans changements de géométrie, que la déformation correspondant à un même pourcentage de Q_1, rapportée à celle obtenue à la limite d'élasticité, augmente considérablement au fur et à mesure que l'enveloppe devient épaisse. Il n'est plus possible de donner un sens à Q_1 pour l'enveloppe épaisse.

Il est évident que seule la résolution élasto-plastique exacte (i.e. en tenant compte des changements de géométrie) permet de décider si la charge limite Q_1 définie au § 3.1, a ou non un sens pratiquement. En fait cette étude rigoureuse n'a pu être effectuée qu'exceptionnellement :

On trouve suivant les cas, soit que la charge passe par maximum avant l'écoulement libre, soit que la charge croît jusqu'à l'apparition de l'écoulement libre ; la charge correspondant à l'écoulement libre étant différente

(1) Dans l'hypothèse où les déformations obtenues à la limite d'élasticité de la structure sont elles-mêmes négligeables, ce qui correspond à la remarque du § 4.

(2) Pour un tel problème le comportement du système au cours du processus de chargement n'est plus celui décrit au § 3.1. La résolution élasto-plastique exacte met encore en évidence Q_0, mais au lieu d'une charge d'apparition de l'écoulement plastique libre, on trouve un chargement critique d'instabilité (lorsque les déformations deviennent négligeables — enveloppe mince — ce chargement critique devient égal à Q_1).

de Q_1 obtenue plus haut. (Pour un même problème on obtient souvent l'un ou l'autre de ces deux résultats suivant le sens de la sollicitation : sphère creuse avec pression intérieure ou extérieure).

La puissance des méthodes utilisables pour la détermination de Q_1 que nous verrons au chapitre V, comparée aux difficultés de la résolution élastoplastique exacte ou même simplifiée est la raison même de l'importance de la théorie des charges limites et de l'utilisation du schéma rigide plastique qui lui est associé.

Nous pensons toutefois qu'il est indispensable d'être conscient des limites d'application de cette théorie (*cf.* [6]).

Signalons enfin que deux problèmes d'élastoplasticité présentant un intérêt en Mécanique des Sols ont pu être étudiés :

— Celui de l'expansion d'une cavité sphérique ou cylindrique soumise à une pression interne, dans un milieu élastique plastique (avec ou sans écrouissage) infini (c'est en particulier une schématisation du problème du pressiomètre). Grâce à ses symétries ce problème peut être résolu. A noter qu'il est indispensable dans cette résolution de tenir compte des changements de géométrie avant l'apparition de l'écoulement libre.

On met en évidence une pression limite finie atteinte asymptotiquement, [4], [8], tandis que le rayon intérieur de la cavité tend vers l'infini et le rayon de la frontière entre zone plastique (couronne autour de la cavité) et zone élastique également.

— Celui de la contraction d'une cavité dans les mêmes conditions [9] dont la solution peut être utilisée dans l'étude des tunnels à grande profondeur (*cf.* [2]).

REFERENCES — CHAPITRE II

[1] J. Courbon (1965). — *Compléments de Résistance des Matériaux.* Plasticité. Cours E.N.P.C., Paris.

[2] P. Habib (1971). — *Cours de Mécanique des Sols.* Ecole du Génie Rural et des Eaux et Forêts. Paris.

[3] S. Kobayashi et C.H. Lee (1970). — *Elastoplastic analysis of plane strain and axysymmetric flat punch indentation.* Int. J. Mech. Sc. *12*, pp. 349-370.

[4] J. Mandel (1966). — *Cours de Mécanique des milieux continus.* Tome II, Ann. XX, Gauthier-Villars, Paris.

[5] J. Mandel (1964). — *Contribution théorique à l'étude de l'écrouissage et des lois de l'écoulement plastique.* C.R. 11e Congr. int. Mec. appl., Munich, pp. 502-509.

[6] D. Radenkovic et J. Salençon (1971). — *Equilibre limite et rupture en Mécanique des Sols.* Journées Françaises de Mécanique des Sols, Paris, mai 1971.

[7] J. SALENÇON (1969). — *La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane.* Thèse Doct. Sc., Paris.

[8] J. SALENÇON (1966). — *Expansion d'une cavité... dans un milieu élastoplastique.* Ann. Pts. Ch., 1966, *3*, pp. 175-187.

[9] J. SALENÇON (1969). — *Contraction d'une cavité... dans un milieu élastoplastique.* Ann. Pts. Ch., 1969, 4, pp. 231-236.

J. MANDEL (1969). — *Cours de Science des Matériaux.* Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

P.V. MARCAL et I.P. KING (1967). — *Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method* Int. Jl. Mech. Sc., vol. 9, pp. 143-155.

CHAPITRE III

LES PROBLÈMES D'ÉCOULEMENT PLASTIQUE LIBRE, ET L'ÉTUDE DU « SCHÉMA RIGIDE-PLASTIQUE »

1 — Définition du matériau rigide-plastique

Le matériau rigide-plastique est un matériau qui n'a pas d'élasticité (modules d'élasticité infinis).

Pour ce matériau la vitesse de déformation se réduit à la vitesse de déformation plastique :

$$v_{ij} = v_{ij}^{p}. \tag{1}$$

C'est cette schématisation du comportement, a priori très éloignée de la réalité, que l'on utilise le plus fréquemment dans l'étude des problèmes de plasticité et nous allons d'abord essayer d'en voir les raisons.

2 — Le matériau rigide plastique dans l'étude des problèmes d'écoulement libre

Revenons sur l'exemple de la structure traité au chapitre précédent.

Pour la détermination de la limite d'élasticité, $Q_0 = L\sqrt{2}$, interviennent :

a) *les contraintes initiales* : qui dans le cas présent sont nulles ;

b) *les propriétés élastiques du matériau* (bien que cela n'apparaisse pas explicitement sur le résultat car le fait que ces propriétés soient les mêmes pour toutes les barres entraîne des simplifications et masque cet aspect).

Pour la détermination de la limite d'écoulement de la structure, ni les contraintes initiales, ni les propriétés élastiques n'interviennent : en effet

pour $T = L$ dans AC, $-L$ dans BD la valeur $Q_1 = 2L$ est obtenue simplement par la statique, la contrainte dans CB est égale à $L\frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc acceptable ; et la structure isostatique pour $Q < Q_1$, est transformée en un *mécanisme* pour $Q = Q_1$.

Puisque les propriétés élastiques du matériau n'interviennent pas pour la détermination de la charge limite, on peut en particulier calculer cette valeur en faisant tendre les modules d'élasticité vers l'infini ([1]). D'où l'utilisation du schéma rigide-plastique qui conduit à des calculs simples pour la détermination des charges limites.

Mais il faut remarquer que ces résultats concernant la charge limite de la structure ne sont valables que parce que l'on a pu négliger les changements de géométrie jusqu'à l'apparition de l'écoulement plastique libre.

Ceci est général. Le schéma rigide-plastique ne doit pas être employé sans discernement : c'est ainsi en particulier que l'utilisation de ce schéma pour la recherche de la pression limite d'écoulement pour le problème de l'expansion d'une cavité dans un milieu rigide parfaitement plastique infini, conduirait au résultat, d'une pression limite infinie, alors que comme nous l'avons dit au chapitre précédent, la solution exacte montre l'existence d'une pression finie atteinte asymptotiquement, que nous proposons d'appeler pression critique.

Dans la suite, nous réserverons le nom de *charge limite* (ou *chargement limite* dans le cas de plusieurs paramètres) à une charge correspondant à l'apparition de l'écoulement plastique libre dans un système en matériau rigide plastique. D'après ce que nous avons dit, cette caractérisation plus commode, est équivalente à la définition donnée au chapitre II (§ 3.1., 3.2).

La question des conditions sous lesquelles cette charge a une signification pratique pour un système en matériau élastoplastique ne sera plus évoquée mais il est entendu qu'elle resterait à examiner dans chaque cas.

3 — Position du problème pour un système rigide-plastique

Considérons maintenant dans toute sa généralité le problème du chargement d'un système constitué d'un matériau rigide-plastique.

Il est clair que pour un tel système on ne peut avoir des déformations non nulles que lorsqu'il y a écoulement plastique libre ([2]).

(1) La démonstration générale de ce résultat est donnée au chapitre V.

(2) Dans bien des cas l'écoulement libre correspond au fait que les zones plastiques sont suffisamment étendues pour que l'ensemble des points appartenant aux zones rigides et aux parois rigides ne soit plus connexe ; mais cela ne saurait être considéré comme une règle générale comme le montre l'exemple de la figure 1*a* au chapitre II.

L'utilisation du schéma rigide-plastique ne débouche donc que sur l'étude des problèmes d'écoulement libre.

Cette étude se fera à partir de l'apparition de l'écoulement libre, pas à pas pour prendre en compte l'écrouissage — si le matériau est écrouissable — et les changements de géométrie au fur et à mesure des déformations ; en effet l'écoulement étant libre, les déformations ne sont plus infiniment petites.

Les inconnues du problème sont non plus les vitesses de contraintes et les vitesses de déplacement comme au chapitre II pour les problèmes élastoplastiques, mais les contraintes et les vitesses de déplacement.

On montre (*cf.* [4], p. 758) que le problème ainsi posé est bien posé.

Cette différence de points de vue d'un problème à l'autre peut s'expliquer :

Pour le système rigide-plastique on effectue la résolution pas à pas à partir de l'apparition de l'écoulement libre. On doit donc à cet instant, dans lequel l'état d'écrouissage est connu (il est nul puisqu'il n'y a encore eu aucune déformation), déterminer les vitesses de déplacement (puisque les déplacements actuels sont connus : ils sont nuls) et les contraintes.

L'état d'écrouissage est déterminé pour l'instant ultérieur : en effet les vitesses des paramètres d'écrouissage sont des fonctions, des valeurs actuelles des paramètres et des vitesses de déplacement qui sont connues.

On peut alors recommencer à l'instant ultérieur la déterminations des contraintes et des vitesses de déplacement et ainsi de suite.

Comme nous l'avons dit il faut tenir compte des changements de géométrie, au cours de la résolution. Cela est difficile.

Le problème se simplifie dans deux cas où la géométrie d'une part, et l'état d'écrouissage de chaque élément d'autre part, sont connus :

a) l'étude de l'écoulement libre commençant pour un système parfaitement plastique ou écrouissable ([1]), qui conduit à la charge limite telle que nous l'avons définie. On dit que le système est en *équilibre limite.*

b) l'étude de l'écoulement libre permanent d'un système parfaitement plastique, dont les exemples sont nombreux : écoulement à travers une filière ou une trémie, etc. ; on détermine alors une charge qui apparaît comme

(1) A noter que l'étude de l'écoulement libre commençant sur le système rigide-plastique ne correspondra avec celle sur le système élasto-plastique que si, outre les conditions déjà indiquées, l'écrouissage peut être considéré comme nul en tout point du système élasto-plastique jusqu'à l'apparition de l'écoulement libre, car sinon l'état d'écrouissage ne serait pas le même, au moment de l'écoulement libre commençant dans le système élasto-plastique et dans le système rigide-plastique. Cette condition est évidemment vérifiée dans le cas du matériau parfaitement plastique. On pourra trouver dans [6] des réflexions complémentaires sur le cas de matériaux à écrouissage rapide et limité.

la charge limite du système dans l'état qui correspond au régime permanent. Il n'y a donc pas de différence essentielle entre les deux cas.

Ces deux types de problèmes sont de loin les plus étudiés dans la pratique. Il convient toutefois de signaler que l'examen de certains régimes transitoires entre l'écoulement libre commençant et l'écoulement permanent est parfois utile (problèmes analogues à celui de la formation d'un copeau); une telle étude se ramène d'ailleurs à une succession de déterminations de chargements limites.

Nous verrons au paragraphe 5 les conséquences de cela sur la façon de poser les conditions à la limite.

4 — Equations du problème

On est amené à distinguer dans le système deux types de régions, où les équations dont on dispose sont différentes.

a) *les régions en équilibre limite* : où, par hypothèse, le critère est satisfait en tout point. On a alors les équations :

$$f(\sigma_{ij}, \alpha_k) = 0 \qquad (2)$$ critère de plasticité où les α_k sont les n paramètres d'écrouissage (s'il y a lieu),

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = 0 \qquad (3)$$ équations d'équilibre,

$$v_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda \geqslant 0 \qquad (4)$$ loi de comportement,

$$\dot{\alpha}_k = h_k(\alpha_l, v_i) \qquad (5)$$ évolution des paramètres d'écrouissage.

b) *les régions rigides* : où par hypothèse, il n'y a pas de déformation. Les équations y sont :

$$v_{ij} = 0 \qquad (6)$$

$$f(\sigma_{ij}) \leqslant 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho X_i = 0. \qquad (3)$$

On voit que dans les zones plastiques, on dispose du nombre exact d'équations pour déterminer les inconnues σ_{ij}, u_i, $\dot{\alpha}_k$.

Par contre dans les zones rigides, il manque trois équations pour déterminer le champ de contraintes, (1) tandis que le champ de vitesses correspond à un mouvement sans déformation (mouvement de solide rigide).

(1) Cela ne doit pas surprendre puisque dans ces régions la loi de comportement ne fait pas intervenir les contraintes [6].

Les zones plastiques *a*) sont les régions du système qui peuvent être déformées.

Les zones rigides *b*) sont les régions qui ne sont pas déformées.

La distinction entre ces deux types de régions peut ne pas paraître entièrement logique ; elle tient à certaines particularités de la méthode de résolution des problèmes d'écoulement libre pour le matériau rigide-plastique que nous allons esquisser ici :

La difficulté du problème tient au fait que l'on ne connaît pas à l'avance les régions en équilibre limite dans le système et celles qui ne le sont pas, alors que les équations applicables dans ces deux domaines sont essentiellement différentes.

Comme on le verra en détails, au chapitre IV dans le cas particulier de la déformation plane, on procède en général comme suit :

On construit des « solutions » en se donnant a priori les zones déformables (*a*), le reste du système étant supposé indéformé (*b*) ; ensuite certains théorèmes (chapitre V) permettent de préciser le sens de ces « solutions » et de distinguer parmi elles la solution du problème.

5 — Les conditions à la limite

5.1. Présentation classique

Comme nous l'avons dit, le schéma rigide-plastique ne permet de traiter que les problèmes d'écoulement libre. Les conditions à la limite (i.e. les données au contour) doivent tenir compte de ce fait, c'est-à-dire être compatibles avec l'écoulement libre. D'où la notion introduite par Mandel [4] de conditions à la limite cohérentes.

En fait, nous l'avons dit, le problème se ramène toujours à un problème de charge limite et se pose de la façon suivante :

le système étant soumis à une sollicitation d'un certain type on cherche pour quelle valeur de cette sollicitation il y a écoulement libre.

D'une façon générale les conditions à la limite consistent en données en contraintes et données en vitesses :

en chaque point de la surface du solide, donnée de trois composantes orthogonales entre elles pour l'ensemble des deux vecteurs contrainte appliquée T et vitesse de déplacement u, comme cela est classique.

Mais ici ces conditions ne peuvent être quelconques. Il est clair par exemple qu'elles ne sauraient consister en la donnée de toutes les contraintes au contour.

Les conditions dynamiques doivent avoir un caractère variable comme indiqué plus haut.

Il y aura donc nécessairement des données à la limite en contraintes et des données à la limite en vitesses ; ce sont les variables duales de ces vitesses dans l'expression de la puissance des forces extérieures qui correspondent aux conditions dynamiques variables.

Le problème, étant ainsi posé avec de telles données à la limite en vitesses, aura nécessairement pour solution l'écoulement libre et l'on obtiendra bien ainsi la valeur de la sollicitation correspondante.

Voyons un exemple :

Soit le problème du poinçonnement d'un demi-plan rigide parfaitement plastique par un poinçon indéformable lisse en translation verticale (fig. 1) Les données à la limite sont :

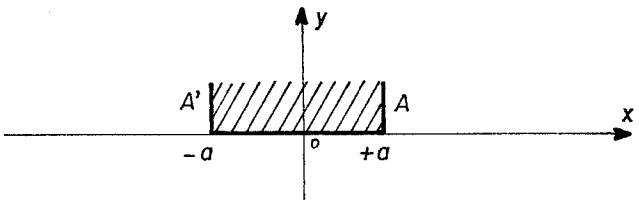

FIG. III.1.

Conditions à l'∞ : $u_x = u_y = 0$.

conditions à la surface : $y = 0$: $|x| > a$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$.

$|x| < a$, $\tau_{xy} = 0$, $u_y = u$.

Les conditions dynamiques variables sont donc : la distribution des contraintes normales le long de AA'.

5.2. Critique de cette présentation

Cette présentation des conditions à la limite sous la forme :

« donnée en chaque point de trois composantes orthogonales entre elles, pour l'ensemble des deux vecteurs T et u »

est classique en Mécanique des milieux continus : élasticité, visco-élasticité, élasto-plasticité, etc. Elle a été également adoptée par de nombreux auteurs (par ex. [4], [3]) pour les problèmes concernant le matériau rigide-plastique.

Toutefois elle n'est pas toujours bien adaptée dans ce cas, car la façon dont les conditions dynamiques présentent, dans les problèmes pratiques, leur caractère variable, s'accommode souvent mal de la distinction entre données en contraintes ou données en vitesses.

Prenons des exemples de problèmes plans voisins de celui du § 5.1 :

Soit le problème d'une pression uniforme d'intensité variable ϖ appliquée à la surface d'un demi-plan sur le segment $A'A$: on cherche la valeur limite de ϖ (fig. 2) ; la condition sur $A'A$ dans la direction Oy n'est pas une

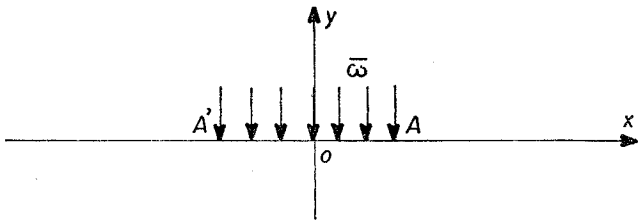

FIG. III.2.

donnée en contrainte car ϖ n'est pas connue, et ce n'est pas non plus une donnée en vitesse.

Aussi le problème du poinçonnement du demi-plan par un poinçon rigide lisse sous l'action d'une force verticale axiale F : on cherche la valeur limite de F (fig. 3) ; la condition sur $A'A$ dans la direction Oy n'est ni une

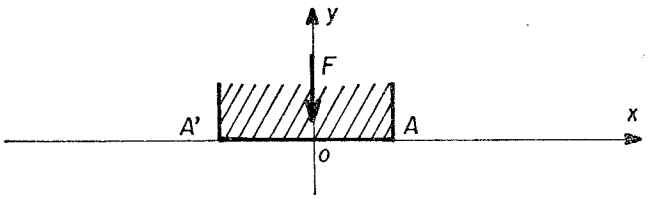

FIG. III.3.

donnée en contraintes ni une donnée en vitesses : on sait que la distribution de u_y est celle correspondant à un mouvement rigide, et que la distribution de σ_y a une résultante axiale.

Il est évident que, sauf au prix de transformations artificielles et qui nuisent à la clarté, il n'est pas possible de faire rentrer ces conditions à la limite dans le cadre classique du § 5.1.

En fait toutes les conditions à la limite rencontrées dans les problèmes pratiques s'expriment commodément au moyen de paramètres de chargement en nombre fini (1).

Par exemple dans le cas de la figure 2, les conditions à la limite dépendent du seul paramètre

$$Q_1 = \overline{\omega};$$

dans le cas de la figure 3, F est paramètre de chargement.

Nous donnons en annexe une présentation complète de la notion de paramètres de chargement ou forces généralisées (2).

Résumons ici l'essentiel :

Les conditions à la limite sont composées de conditions dynamiques et de conditions cinématiques, qui laissent le caractère variable requis aux données dynamiques.

Pour tout champ de contraintes σ statiquement admissible satisfaisant les conditions à la limite dynamiques,

pour tout champ de vitesses de déformation v cinématiquement admissible satisfaisant les conditions à la limite cinématiques,

le théorème des puissances virtuelles permet d'écrire

$$\int_V (\underline{\sigma} \cdot \underline{v})\, \mathrm{d}V = \int_S T \cdot u\, \mathrm{d}S + \int_V \rho F \cdot u\, \mathrm{d}V. \tag{8}$$

la formulation classique suppose que l'on peut effectuer la décomposition :

$$\int_S T \cdot u\, \mathrm{d}S = \int_{S_T} T_i^d\, u_i\, \mathrm{d}S + \int_{S_u} T_i\, u_i^d\, \mathrm{d}S \tag{9}$$

(en désignant par T_i^d et u_i^d, les valeurs données des composantes de la contrainte ou de la vitesse sur S), ce qui n'est pas toujours possible ;

(1) Pour cette raison nous n'insisterons pas sur les principes de Minimum pour les contraintes et pour les vitesses dans lesquels les conditions à la limite doivent être mises sous la forme du § 5.1. ; d'ailleurs, même lorsque cela est possible, ces « principes » malgré leur apparente généralité ne sont pratiquement exploitables que dans le cas d'un nombre fini de paramètres de chargement et ils se réduisent alors aux théorèmes de la théorie des charges limites, cela rejoint une remarque de Hill [2].

(2) Noter que dans [1] les Q_i désignent les contraintes généralisées, c'est-à-dire les paramètres de chargement d'un élément du système.

la formulation en terme de paramètres de chargement suppose que l'on peut écrire :

$$\int T \cdot u \, \mathrm{d}S + \int \rho F \, u \, \mathrm{d}V = \sum_{i=1}^{n} Q_i(\sigma) \, \dot{q}_i(v) \tag{10}$$

les correspondances :

$$\sigma \longrightarrow Q(\sigma) \in R^n$$

$$v \longrightarrow \dot{q}(v) \in R^n$$

étant linéaires.

Ceci est toujours possible dans les cas pratiques. Les $Q_i(\sigma)$ composantes de $Q(\sigma)$ sont les paramètres de chargement du système. Nous proposons d'appeler vitesse de déformation du système le vecteur $\dot{q}(v)$ (*).

Le problème consiste alors à rechercher les valeurs limites du vecteur Q, ainsi que les champs de contraintes et les champs de vitesses correspondants.

6 — Théorème d'unicité du champ de contraintes

Nous allons maintenant donner un théorème d'unicité pour la solution du problème d'écoulement libre, valable dans l'hypothèse du matériau *standard* et à fonction de charge convexe (i.e. obéissant au principe de travail maximal).

6.1. Inégalité fondamentale

Les démonstrations sont fondées sur l'inégalité du principe du travail maximal (chap. I, § 6) :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) v_{ij} \geqslant 0 \tag{11}$$

ou encore :

$$(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) \cdot v \geqslant 0.$$

Rappelons que cette inégalité implique la convexité de la fonction de charge qui est aussi potentiel plastique.

L'inégalité (11) n'est pas stricte et il est important pour la suite d'étudier dans quelles circonstances il y a égalité :

$$(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) \underline{v} = 0. \tag{12}$$

---

(1) Ceci afin de rappeler que si le champ de vitesses u correspond à un mouvement solidifiant, on a $\dot{q}(v) = 0$.

Pour qu'il y ait égalité, il faut que $\underline{\sigma}$ et $\underline{\sigma}^*$ appartiennent tous deux à la surface de charge : en effet $\underline{\sigma}$ est situé sur la surface par hypothèse et $\underline{\sigma}^*$ ne peut être intérieur car la surface est convexe et $\underline{v}$ est dirigé suivant une normale extérieure en $\underline{\sigma}$. La convexité entraîne alors que le segment $\underline{\sigma}\underline{\sigma}^*$ est entièrement à l'intérieur de ou sur la surface de charge.

D'autre part d'après (12), le segment $\underline{\sigma}\underline{\sigma}^*$ appartient à un plan extérieur ou tangent à la surface de charge. Il s'ensuit que le segment $\underline{\sigma}\underline{\sigma}^*$ fait nécessairement partie de la surface de charge.

Pour que (12) soit vérifiée, il faut que $\underline{\sigma}$ et $\underline{\sigma}^*$ appartiennent tous deux à une même variété linéaire appartenant à la surface de charge; il est évident que si celle-ci est strictement convexe, on a : $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^*$.

6.2. Théorème d'unicité

Le théorème d'unicité du champ des contraintes Hill [2], est établi classiquement dans l'hypothèse de données au contour du type du § 5.1, pour lesquelles la décomposition (9) est possible.

Nous verrons aussi qu'un théorème analogue est valable dans le cas de conditions à la limite exprimées au moyen de paramètres de chargement.

6.2.1. Enoncé classique.

Pour des données au contour du type du § 5.1, *cohérentes, on peut avoir plusieurs solutions, mais il y a unicité du champ de contraintes dans la réunion des zones déformées de ces diverses solutions* (sous certaines hypothèses).

6.2.2. Enoncé dans le cas d'un chargement à *n* paramètres.

Pour des conditions à la limite du type du § 5.2, correspondant à un système soumis à un chargement dépendant d'un nombre fini de paramètres Q_i, soit Q un chargement pour lequel il y a écoulement libre,

(resp. soit $\dot{q}$ une vitesse de déformation du système à l'écoulement libre),

il peut y avoir plusieurs solutions pour une même valeur de Q (resp. $\dot{q}$) mais il y a unicité du champ de contraintes dans la réunion des zones déformées de ces diverses solutions (sous certaines hypothèses).

6.2.3. Démonstration.

Considérons dans chacun des cas des énoncés précédents deux solutions (σ^1, v^1), (σ^2, v^2).

L'application du principe des puissances virtuelles aux champs $(\sigma^1 - \sigma^2)$ et $(v^1 - v^2)$ donne :

— dans le cas du § 6.2.1 :

$$\int_V (\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2)(\underline{v}^1 - \underline{v}^2)\,\mathrm{d}V = \int_{S_T} (T_i^d - T_i^d)(u_i^1 - u_i^2)\,\mathrm{d}S + \int_{S_u} (T_i^1 - T_i^2)(u_i^d - u_i^d)\,\mathrm{d}S + \int_V \rho(F - F)(u^1 - u^2)\,\mathrm{d}V = 0$$

— dans le cas du § 6.2.2. :

$$\int_V (\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2)(\underline{v}^1 - \underline{v}^2)\,\mathrm{d}V = \sum_{i=1}^{n} (Q_i^1 - Q_i^2)(\dot{q}_i^1 - \dot{q}_i^2) = (Q^1 - Q^2)(\dot{q}^1 - \dot{q}^2) = 0$$

car $Q^1 = Q^2$ (resp. $\dot{q}^1 = \dot{q}^2$) par hypothèse.

La suite de la démonstration est alors la même dans les deux cas.

On a ainsi :

$$\int_V (\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2)(\underline{v}^1 - \underline{v}^2)\,\mathrm{d}V = 0 \tag{13}$$

d'où par application de (11) :

$$(\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2)(\underline{v}^1 - \underline{v}^2) = 0 \tag{14}$$

en tout point de (V).

Or le premier membre de (14) est nul dans les cas suivants :

a) si $v^1 = v^2 = 0$, c'est-à-dire dans les zones rigides à la fois dans les deux solutions,

b) dans les zones qui sont déformées dans au moins une solution (c'est-à-dire dans la réunion des zones déformées dans chaque solution) :

— si un seul tenseur $\underline{v}$ est différent de zéro, soit pour fixer les idées $\underline{v}^1$, (14) devient alors :

$$(\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2)\,\underline{v}^1 = 0$$

qui n'est autre que (12) étudié au § 6.1 ;

— si les deux tenseurs sont différents de zéro (14) et (12) entraînent :

$$(\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2)\,\underline{v}^1 = 0 \qquad \text{et} \qquad (\underline{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^1)\,\underline{v}^2 = 0,$$

c'est-à-dire à nouveau (12) étudié au § 6.1.

Des conclusions du § 6.1, on déduit alors que : σ^1 et σ^2 appartiennent tous les deux à la surface de charge

$$f(\underline{\sigma}^1) = f(\underline{\sigma}^2) = 0.$$

De plus le segment $\sigma^1\sigma^2$ appartient à la surface de charge et il appartient donc aussi à un plan tangent à cette surface en σ^1 et un plan tangent en σ^2 ; ceux-ci sont nécessairement confondus (1) ; si la surface est régulière en σ^1 et σ^2 (i.e. un seul plan tangent en chaque point), v^1 et v^2 sont colinéaires.

En désignant par D la réunion des zones déformées correspondant à chaque solution, on peut ainsi affirmer que :

1° Dans toutes les solutions, tout le domaine D est en équilibre limite.

2° Si la surface de charge est régulière il y a en chaque point de D proportionnalité entre les vitesses de déformation dans les diverses solutions (en particulier les directions principales sont les mêmes).

S'il y a isotropie cela entraîne la coïncidence des directions principales des contraintes.

3° Si f est une fonction strictement convexe de $\underline{\sigma}$, le champ de contraintes est déterminé de manière unique en tout point de D.

4° Si f est une fonction strictement convexe du déviateur $\underline{s}$ (critère de Misès par exemple), $\underline{s}$ est déterminé de manière unique en tout point de D (car la variété linéaire $\sigma^1\sigma^2$ est une génératrice du cylindre). $\underline{\sigma}$ est déterminé de manière unique dans D si la contrainte normale est connue en au moins un point de la frontière de D.

Dans le cas des critères de Tresca ou de Coulomb, à la place de 2° on a :

le régime d'écoulement en un point de D est le même dans toutes les solutions (même face ou même arête).

Dans le cas du régime de face il y a proportionnalité entre les vitesses de déformation dans les diverses solutions (en particulier elles ont mêmes directions principales).

Les énoncés correspondant à 3° et à 4° sont compliqués (*cf.* [5]).

7 — Remarques

La lecture des paragraphes qui précèdent peut faire douter quelque peu de l'intérêt présenté par l'utilisation du matériau rigide-plastique. En effet, la schématisation du milieu réel élastoplastique par le milieu

(1) Une surface convexe est toute entière, d'un même côté de chacun de ses plans tangents.

rigide-plastique apporte apparemment bien des complications : *cf.* le § 5 par exemple.

Nous allons voir dans les deux chapitres suivants que le « schéma rigide-plastique » a permis de résoudre, plus ou moins parfaitement, un certain nombre de problème que se posaient les ingénieurs.

Il ne faut pas perdre de vue aussi, que la schématisation adoptée doit être adaptée aux problèmes étudiés et aux moyens de calcul dont on dispose.

Ainsi, il se peut que dans l'avenir le matériau élastoplastique devienne à son tour le schéma le plus fécond par suite de l'apparition de nouveaux moyens de calcul.

RÉFÉRENCES — CHAPITRE III

[1] J. COURBON (1969). — *Notions de plasticité.* Cours E.N.P.C., Paris.

[2] R. HILL (1951). — *On the state of stress in a Plastic rigid Body at the yield point.* Phil. Mag. *42*, pp. 868-875.

[3] W.T. KOITER (1960). — *General theorems for elastic plastic solids* - in *Progress in Solid. Mechanics*, ed. Sneddon et Hill, North Holland Publ. Cy., Amsterdam.

[4] J. MANDEL (1966). — *Mécanique des milieux continus*, II, Gauthier-Villars, Paris.

[5] J. MANDEL (1965). — *Sur l'unicité du champ des contraintes lors de l'équilibre limite dans un milieu rigide-plastique.* C.R. Ac. Sc., Paris, *261*, pp. 35-37.

[6] J. SALENÇON (1969). — *La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane.* Thèse Doc. ès-Sc., Paris.

ANNEXE AU CHAPITRE III

DÉFINITION GÉNÉRALE DES PARAMÈTRES DE CHARGEMENT D'UN SYSTÈME

1 — Chargements possibles

1.1. Données au contour

Soit un corps déformable de volume (V) et de contour $\partial V = S$.

Les données au contour du corps portent sur l'ensemble des deux vecteurs contrainte T et vitesse u.

On se donne :

en chaque point du contour trois composantes orthogonales entre elles pour l'ensemble de ces deux vecteurs,

et les forces de masse à l'intérieur du corps.

En chaque point M de (S), soient Mx_i $(i = 1, 2, 3)$, les axes orthogonaux dont les directions sont celles des données sur T et u.

On s'intéresse d'une façon générale aux problèmes d'équilibre du corps déformable (déformation quasi statique) et on considère tous les chargements de (V), compatibles avec l'équilibre, pour lesquels les axes Mx_i sont les mêmes $(\forall\, i)$ ainsi que la nature, T ou u, de la donnée selon Mx_i.

Ces chargements seront appelés les chargements possibles de (V).

On désigne par :

S_{T_i} la portion de S sur laquelle la composante T_i est donnée,

S_{u_i} la portion de S sur laquelle la composante u_i est donnée ;

on a évidemment :

$$\forall\, i \qquad S_{T_i} \cap S_{u_i} = \emptyset, \qquad S_{T_i} \cup S_{u_i} = S.$$

1.2. Définitions

Cela étant on appelle :

— *jeu de données dynamiques possible,* J_d :

des données $\begin{cases} T_i \text{ sur } S_{T_i} \ (i = 1, 2, 3) \\ F \text{ (forces de masse) en tout point de } V \end{cases}$

(telles que l'équilibre des forces extérieures totales soit possible).

— *jeu de données cinématiques possible,* J_c :

des données $\{ u_i \text{ sur } S_{u_i} \ (i = 1, 2, 3)$

— *jeu de données possible,* J :

la réunion d'un jeu de données dynamiques possible et d'un jeu de données cinématiques possible :

$$J = J_d \cup J_c .$$

Il est évident que les ensembles des jeux de données dynamiques possibles, jeux de données cinématiques possibles, jeux de données possibles, ont des structures d'espaces vectoriels sur R. On désigne par $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{C}$ les deux premiers de ces espaces, en général de dimensions infinies.

— *champ de contraintes statiquement admissible :*

un champ de contraintes σ est dit statiquement admissible associé à un jeu de données dynamiques possible :

$$\sigma \text{ S.A. ass. } J_d \in \mathfrak{D}$$

s'il satisfait pour ce jeu de données :

— les équations d'équilibre (prises au sens des distributions),

— les données aux limites sur les contraintes.

— *champ de vitesses de déformation cinématiquement admissible :*

un champ de vitesses de déformation v est dit cinématiquement admissible associé à un jeu de données cinématiques possible :

$$v \text{ C.A. ass. } J_c \in \mathfrak{C}$$

s'il dérive :

$$v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

au sens des distributions d'un champ de vitesses u satisfaisant les données aux limites pour les vitesses dans ce jeu de données.

1.3. Théorème des puissances virtuelles

Il s'énonce :

$$\forall\ \sigma \text{ S.A. ass. } J_d, \quad J_d \in \mathfrak{D},$$
$$\forall\ v \text{ C.A. ass. } J_c, \quad J_c \in \mathfrak{C},$$

posant en chaque point de S $\quad \underline{\sigma}\cdot n = T$,
et désignant par u le champ de vitesse dont dérive v, on a :

$$\int_S T\cdot u \mathrm{d}S + \int_V \rho F\cdot u \mathrm{d}V = \int_V (\underline{\sigma}\cdot \underline{v})\mathrm{d}V = \mathfrak{T}(\sigma, v) \quad (^1)$$

$\mathfrak{T}(\sigma, v)$ est une forme bilinéaire (fonctionnelle) de σ et v.

2 — Processus de chargement dépendant d'un nombre fini de paramètres

2.1. Définitions

Considérant maintenant parmi les chargements possibles du § 1 ceux qui sont effectivement réalisables (nous dirons aussi « permis ») dans le cadre d'un certain processus de chargement, on dira que le corps est soumis à un processus de chargement dépendant d'un nombre fini de paramètres Q_i si :

1) l'ensemble des jeux de données dynamiques permis est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{D}$;

2) l'ensemble des jeux de données cinématiques permis est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{C}_p \subset \mathfrak{C}$;

3) on peut définir :

une application linéaire qui

$\forall\ J_d \in \mathfrak{D}_p$ et $\forall\ \sigma$ S.A. ass. J_d, fait correspondre

$$\sigma \rightarrow Q(\sigma) = [Q_1(\sigma), \ldots, Q_n(\sigma)] \in R^n$$

(1) Nous notons : $(\underline{\sigma}\cdot\underline{v}) = \sigma_{ij}v_{ij}$.

et une autre application linéaire :

$\forall\, J_c \in \mathcal{C}_p$, $\forall\, v$ C.A. ass. J_c

$$v \rightarrow \dot{q}(v) = [\dot{q}_1(v), \ldots, q_n(v)] \in R^n$$

et telles que :

$$\mathcal{T}(\sigma, v) = Q(\sigma) \cdot \dot{q}(v) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(\sigma)\dot{q}_i(v).$$

Les $Q_i(\sigma)$ sont les paramètres de chargement du corps.

2.2. Propriétés

— Les vecteurs $Q(\sigma)$ correspondant à tous les champs de contraintes σ S.A. associés à tous les jeux de données dynamiques réalisables forment un espace vectoriel à n dimensions $\{Q\}$.

Un vecteur $Q(\sigma)$ sera appelé chargement du corps.

— De même les vecteurs $\dot{q}(v)$ correspondant à tous les champs de vitesses de déformation associés à tous les jeux de données cinématiques réalisables, forment un espace vectoriel à n dimensions $\{\dot{q}\}$.

— $\{Q\}$ et $\{\dot{q}\}$ sont duaux.

2.3. Remarques

— Etant donné $J_d \in \mathcal{D}_p$, il lui correspond en général plusieurs champs auxquels correspondent en général plusieurs vecteurs $Q(\sigma)$.

En effet, soit : σ_1 S.A. ass. $J_d \in \mathcal{D}_p$

σ_2 S.A. ass. $J_d \in \mathcal{D}_p$

alors $\sigma_1 - \sigma_2$ est S.A. ass. $0 \in \mathcal{D}_p$

mais on n'a pas nécessairement $Q(\sigma_1) = Q(\sigma_2)$.

— Propriété analogue pour $J_c \in \mathcal{C}_p$, v, $\dot{q}(v)$.

— Un même vecteur Q peut correspondre à plusieurs champs σ S.A. mais ceux-ci sont associés au même $J_d \in \mathcal{D}_p$.

— Propriété analogue pour $\dot{q}$, v, (les J_c sont alors identiques à un déplacement d'ensemble près).

Un vecteur $\dot{q}(v)$ sera appelé vitesse de déformation du corps ([1]).

---

(1) Nous proposons cette dénomination pour rappeler que si le champ de vitesses u est celui d'un mouvement solidifiant, on a : $\dot{q}(v) = 0$.

— On suppose au § 2.1 dans la définition, que $\mathfrak{D}_p$ et $\mathfrak{C}_p$ sont des sous-espaces vectoriels ; cela implique que dans le processus de chargement il n'y a pas d'autres données constantes que celles qui sont nulles.

En fait dans le cas où il y aurait des données constantes (par exemple pour les données dynamiques : forces de masse, surcharge sur une partie de la surface) on considérera ces données comme variables et on les fixera finalement à leurs valeurs prescrites.

On pourrait aussi opérer en prenant pour $\mathfrak{D}_p$ et $\mathfrak{C}_p$ des sous-espaces affines de $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{C}$ afin d'éviter l'artifice indiqué ci-dessus. Cette méthode aurait, nous le pensons, plus d'inconvénients que d'avantages.

3 — Cas d'un système. Conditions de frottement

Ce qui a été dit aux § 1 et 2 concerne le cas d'un corps au contour duquel les données sont du type indiqué au § 1.1.

Quelques précisions complémentaires sont nécessaires pour l'application au cas d'un cas d'un corps, ou d'un système de corps, pour lesquels interviennent des conditions de frottement (contacts non lisses).

Dans le cas d'un corps ayant un contact avec frottement sur une partie de sa surface on définira les paramètres de chargement pour un système plus vaste incluant le corps et l'interface de frottement (la frontière du système passe à l'extérieur de cet interface) ; la condition de frottement n'intervient ensuite que comme une loi de comportement (plastique) à l'intérieur du système. De même pour un système comprenant plusieurs corps en contact avec frottement.

4 — Exemple

Poinçonnement d'un demi-plan par une plaque rigide, lisse, dans le cas d'une surcharge de surface.

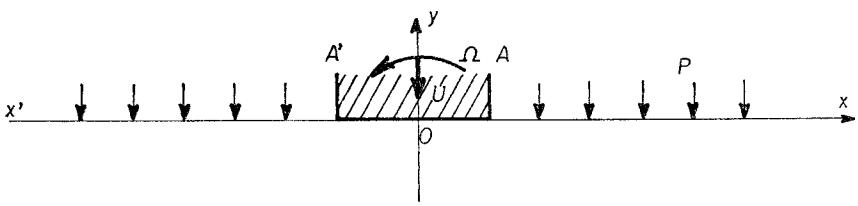

FIG. *A*.III.1.

∞ : S_{u_1} : $u_1 = 0$

S_{u_2} : $u_2 = 0$

$x'A'$ et Ax : S_{T_1} : $T_1 = 0$

S_{T_2} : $T_2 = -p$ $\quad$ p arbitraire

$A'A$: S_{T_1} : $T_1 = 0$

S_{u_2} : $u = -U+\Omega x$ $\quad$ U, Ω arbitraires

d'où : $Q_1 = p, \qquad \dot{q}_2 = U, \qquad \dot{q}_3 = \Omega$

et :

$$\dot{q}_1 = -\int_{-\infty}^{-a} u_2 \mathrm{d}x - \int_{a}^{\infty} u_2 \mathrm{d}x, \qquad Q_2 = N, \qquad Q_3 = M.$$

(N : résultante des forces appliquées par le poinçon, comptée positivement dans le sens $-Oy$; M moment par rapport à 0).

CHAPITRE IV

PROBLÈMES D'ÉCOULEMENT LIBRE EN DÉFORMATION PLANE

1 — Généralités

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une classe de problèmes d'écoulement libre dont la résolution présente d'importantes particularités simplificatrices. Il s'agit des problèmes de déformation plane auxquels, pour cette raison on a ramené beaucoup de problèmes fondamentaux de la Mécanique des sols.

Nous en ferons un examen très détaillé car il s'agit d'une question assez délicate, principalement dans sa démarche logique qui n'est pas toujours évidente.

Les problèmes de symétrie axiale sous certaines hypothèses (critère de type courbe intrinsèque, hypothèse de Haar-Karman) se résolvent de manière semblable. Ces problèmes sont brièvement évoqués en annexe et nous renvoyons à [1, 6, 8, 14, 21, 25] le lecteur désireux d'informations plus complètes sur le sujet.

Seul le cas du matériau isotrope sera traité, certains types d'anisotropies ont été étudiés en déformation plane [10, 11, 2].

2 — Expression du critère de plasticité

Par définition la déformation plane effectuée perpendiculairement à l'axe Oz correspond aux conditions suivantes :

$$u_x \text{ et } u_y \text{ indépendantes de } z \text{ et } u_z = 0 \tag{1}$$

d'où :

$$v_{xz} = v_{yz} = v_{zz} = 0. \tag{2}$$

Dans les zones déformées, zones plastiques où le facteur λ est $\neq 0$, (2) représente trois équations qui permettent en général d'exprimer σ_z, τ_{xz}, τ_{yz}, en fonction de σ_x, σ_y, τ_{xy}.

Le critère de plasticité, qui est satisfait dans ces régions, peut donc être écrit en fonction de ces trois contraintes (relatives au plan (x, y)) uniquement :

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) = f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0 \text{ (1)}. \tag{3}$$

Plus précisément, en ne considérant que le cas du matériau isotrope seul envisagé dans toute la suite, le critère de plasticité s'exprime en fonction des contraintes principales :

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \tag{4}$$

Dans l'hypothèse de la déformation plane, Oz étant direction principale de $\underline{v}$ est aussi principale pour $\underline{\sigma}$ (2) ; posons :

$$\sigma_z = \sigma_3 \text{ (contraintes principales non ordonnées)}$$

(2) s'écrit :

$$v_3 = 0. \tag{5}$$

Faisons maintenant l'hypothèse du matériau obéissant au principe du travail maximal (matériau dit standard) ; de (5) on déduit :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_3} = 0 \tag{6}$$

(4) et (6) définissent donc le critère de plasticité en déformation plane :

$$\left.\begin{aligned} F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= 0 \qquad (4) \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} &= 0 \qquad (6) \end{aligned}\right\}$$

(1) Nous n'indiquons pas la dépendance éventuelle de F et f en x, y si le matériau n'est pas homogène (homogène selon Oz uniquement) ; les résultats des § 2, 3, 4, sont également valables dans ce cas.

(2) Nous avons dit au chapitre I que dans le cas de l'isotropie $\underline{v}$ et $\underline{\sigma}$ ont nécessairement mêmes directions principales. On trouvera dans [11] une discussion très fouillée de ce résultat dû, rappelons-le, au fait que la loi de comportement lie $\underline{v}$, $\underline{\sigma}$ et $\frac{\mathfrak{D}\sigma}{\mathfrak{D}t}$, la relation étant linéaire entre $\underline{v}$ et $\frac{\mathfrak{D}\sigma}{\mathfrak{D}t}$. (*Cf.* aussi [2, 12]).

On voit que ce critère exprimé en fonction des deux contraintes principales dans le plan Oxy, σ_1 et σ_2

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = 0 \tag{7}$$

n'est autre, d'après la convexité de F, que l'équation de la projection du contour apparent de la surface $F = 0$ dans l'espace des contraintes, parallèlement à σ_3, sur le plan $\sigma_1\sigma_2$; il s'agit d'une courbe réelle symétrique par rapport à la bissectrice ($\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_3 = 0$).

f est symétrique en σ_1, σ_2, et peut aussi se mettre sous la forme :

$$g\left[\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, \frac{|\sigma_1-\sigma_2|}{2}\right] = 0 \tag{8}$$

c'est-à-dire d'un critère courbe intrinsèque dans le plan (x, y) :

Avec les notations du chapitre I :

$$g(-p, R) = 0 \tag{9}$$

R étant le rayon du cercle de Mohr dont l'abscisse du centre est $-p$. On fera dans la suite l'hypothèse que la courbe intrinsèque est réelle.

On a donc le théorème :

Pour le matériau isotrope, rigide-plastique, obéissant au principe du travail maximal, tout critère de plasticité se ramène en déformation plane à un critère du type courbe intrinsèque dans le plan de la déformation.

En particulier, pour les critères qui ne dépendent que du déviateur $\underline{s}$ (matériaux ductiles), on obtient toujours le critère de Tresca à deux dimensions.

$$|\sigma_1-\sigma_2| = 2k. \tag{10}$$

3 — Remarque sur le cas du matériau non standard

Pour un matériau isotrope dont le critère de plasticité est du type courbe intrinsèque, ce qui est le cas des sols obéissant au critère de Coulomb, il n'est pas indispensable de faire appel au principe du travail maximal pour aboutir aux formules (8) ou (9) : il suffit que σ_z, contrainte principale comme ci-dessus, soit contrainte principale *intermédiaire*.

Cela pourra être une conséquence de l'hypothèse de déformation plane et de la loi de comportement sans que celle-ci soit nécessairement celle du matériau standard. Il en est ainsi par exemple si l'on utilise une loi de comportement comme (25) proposée au chapitre I, ou encore si l'on adopte la loi de comportement du matériau de Von Misès standard.

Il en va de même pour un matériau isotrope dont le critère de plasticité est de la forme générale $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ (F symétrique convexe), et dont la déformation plastique s'effectue suivant la règle d'écoulement du matériau de Misès standard. On montre encore que dans le plan de la déformation le critère est représenté par une courbe réelle symétrique par rapport à la bissectrice ($\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_3 = 0$), critère de type courbe intrinsèque, et on fera dans la suite l'hypothèse que l'enveloppe des cercles de Mohr est réelle.

Dans ces conditions les résultats relatifs au champ de contraintes que nous allons développer, sont donc valables pour ces matériaux.

4 — Equations pour les contraintes

Dans les conditions de validité de (8) ou (9) indiquées plus haut, on dispose dans les zones plastiques de trois équations pour les trois contraintes inconnues, indépendamment des vitesses.

$$\begin{cases} f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0 & (3) \\ \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho X = 0 & (11) \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho Y = 0 & (12) \end{cases}$$

C'est cette circonstance qui fait l'intérêt particulier des problèmes de déformation plane :

si les conditions à la limite s'y prêtent on va pouvoir procéder en deux étapes et commencer par déterminer le champ de contraintes dans les zones plastiques sans faire intervenir les vitesses. La détermination du champ de vitesses se fera ensuite. En fait, on verra que les choses sont un peu plus compliquées que nous ne l'indiquons ici, et que l'on devra souvent faire intervenir les vitesses dès le stade de la détermination du champ des contraintes, par exemple pour choisir entre deux solutions possibles ; il n'en reste pas moins que cette possibilité de traiter d'abord un problème pour les contraintes puis un problème pour les vitesses simplifie considérablement le travail.

Remarquons encore que le système (3, 11, 12) et les conclusions qui s'en déduisent sont valables d'une façon générale dans les zones où σ_z est contrainte principale intermédiaire et qui sont en équilibre limite, dans le cas d'un matériau dont le critère de plasticité est du type courbe intrinsèque.

C'est ainsi que les résultats de la partie A qui va suivre sont applicables dans les problèmes d'élastoplasticité dans les zones en équilibre limite ($f = 0$), où σ_z est contrainte principale intermédiaire, pour un matériau dont le critère est du type courbe intrinsèque.

Dans les zones rigides (dites de type b au chapitre III), il manque trois équations pour déterminer le champ de contraintes si l'on fait l'hypothèse que σ_z y est contrainte principale, il y manque en particulier une équation pour déterminer les trois contraintes σ_x, σ_y, τ_{xy}, le critère de plasticité ne fournissant plus qu'une inégalité.

A. LE PROBLÈME POUR LES CONTRAINTES

5 — Transformation des équations

L'approche que nous donnons est due à Mandel [16].

Ordonnant les contraintes principales σ_1 et σ_2 dans le plan (Oxy) suivant $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$, nous introduisons une nouvelle variable : l'angle $\theta = (Ox, \sigma_1)$, angle de la direction de la plus grande traction avec Ox.

σ_x, σ_y, τ_{xy} s'expriment en fonction des trois variables R, p, θ :

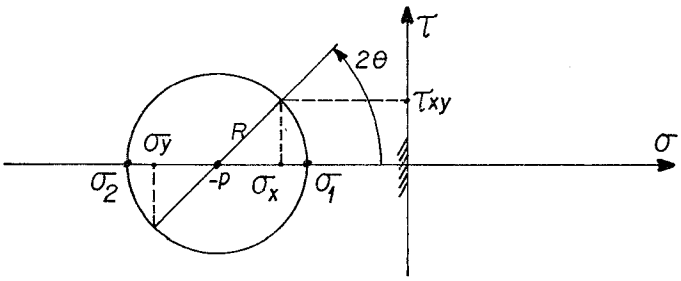

FIG. IV.1.

d'après la figure 1 :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -p + R\cos 2\theta \\ \sigma_y &= -p - R\cos 2\theta \\ \tau_{xy} &= R\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Nous considérons dans la suite que le matériau est homogène. Le cas du matériau non homogène dans le plan de la déformation (f fonction de x et y) est étudié en annexe.

Le critère de plasticité indépendant de x et y est satisfait en tout point de la zone plastique et se résout en :

$$R = R(p) \tag{14}$$

(résolution de (9)).

D'après (13) on a :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\frac{\partial p}{\partial x}\cos 2\theta - 2R\sin 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{15}$$

et de même :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}.$$

$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}$, dérivée de (14) s'évalue aisément sur la figure 2, où ϕ désigne l'angle fait avec Ox par la tangente à la courbe intrinsèque en son point de contact avec le cercle de Mohr de centre $-p$.

Il vient :

$$\mathrm{d}R/\mathrm{d}p = \sin\phi. \tag{16}$$

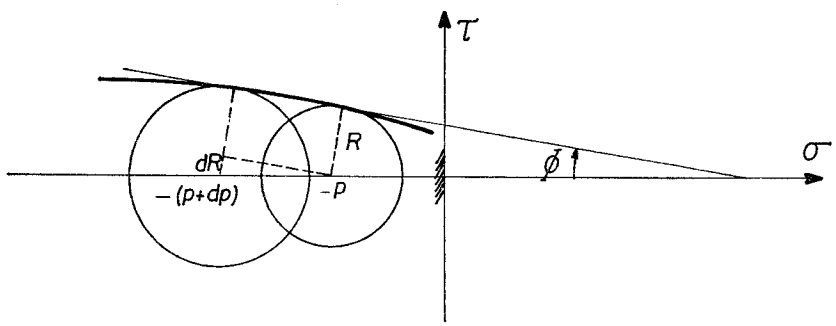

FIG. IV.2.

Le système d'équations pour les contraintes valable en zone plastique est ainsi transformé par l'introduction des nouvelles variables; l'équation (3) est équivalente à (13) et (14); et (11) et (12) deviennent :

$$-\frac{\partial p}{\partial x}(1-\sin\phi\cos 2\theta) - 2R\sin 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin\phi\frac{\partial p}{\partial y}\sin 2\theta$$
$$+ 2R\cos 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial y} + \rho X = 0 \tag{17}$$

$$+\frac{\partial p}{\partial x}\sin\phi\,\sin 2\theta+2R\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}(1+\sin\phi\,\cos 2\theta)$$

$$+\,2R\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}+\rho Y=0. \qquad (18)$$

C'est un système de deux équations aux dérivées partielles du 1er ordre, quasi linéaire, pour les fonctions inconnues p et θ des deux variables x et y.

L'étude de ce système montre que si l'enveloppe des cercles définis par (14) est réelle, c'est-à-dire si la courbe intrinsèque est entièrement réelle, (i.e. $|\sin\phi|\leqslant 1$), le système (17, 18) est toujours hyperbolique : il y a deux familles de lignes caractéristiques réelles.

6 — Lignes caractéristiques

En effectuant la recherche des lignes caractéristiques, on trouve (1) que, en chaque point de la zone plastique, ces lignes ont pour pente :

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=\mathrm{tg}\left[\theta\pm\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\right] \qquad (19)$$

Elles font donc l'angle $\pm\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)$ avec la direction de la plus grande traction.

On convient de désigner par α la caractéristique inclinée à $-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)$ sur σ_1, et β l'autre (fig. 3).

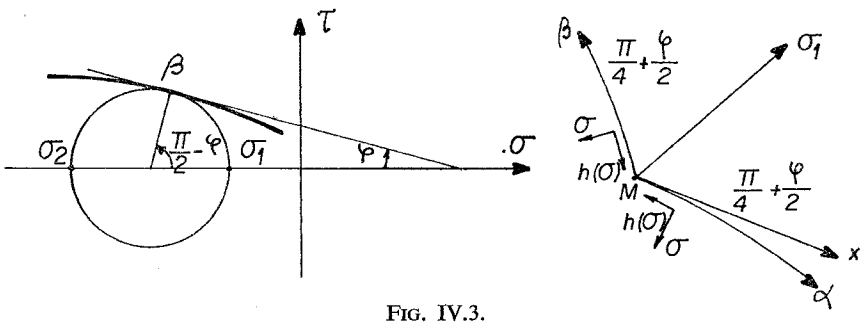

FIG. IV.3.

(1) Par exemple, en écrivant que le long d'une caractéristique le problème de Cauchy est impossible ou indéterminé.

En M le cercle de Mohr est tangent à la courbe intrinsèque puisqu'on est en état d'équilibre limite (zone plastique). La formule (19) montre que les facettes caractéristiques en M correspondent aux points de contact du cercle de Mohr avec la courbe intrinsèque : Ce sont les deux facettes sur lesquelles : $|\tau| = h(\sigma)$ (*cf.* chapitre I, § 2).

7 — Relations le long des caractéristiques

On sait que le long de chaque caractéristique, la solution du problème (p, θ) doit satisfaire une relation différentielle; celle-ci exprime que le problème de Cauchy le long de la caractéristique, avec les données (p, θ) égales à la solution, est indéterminé et non impossible.

On peut établir ces relations assez simplement.

Plaçons l'axe Ox suivant la tangente en M à $M\alpha$, inclinée à $-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)$ sur σ_1 (fig. 3); (17) et (18) deviennent :

$$-\frac{\partial p}{\partial x}(1+\sin^2\phi)-2R\cos\phi\frac{\partial\theta}{\partial x}+\sin\phi\frac{\partial p}{\partial y}\cos\phi-2R\sin\phi\frac{\partial\theta}{\partial y}+\rho X=0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\sin\phi\cos\phi-2R\sin\phi\frac{\partial\theta}{\partial x}-\cos^2\phi\frac{\partial p}{\partial y}+2R\cos\phi\frac{\partial\theta}{\partial y}+\rho Y=0 \tag{21}$$

en multipliant (20) par $\cos\phi$ et (21) par $\sin\phi$ et en additionnant on obtient une relation dans laquelle ne figurent que les dérivées partielles par rapport à x :

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\cos\phi-2R\frac{\partial\theta}{\partial x}+\rho X\cos\phi+\rho Y\sin\phi=0 \tag{22}$$

C'est la relation différentielle le long de la caractéristique α :

$$-\mathrm{d}p-\frac{2R}{\cos\phi}\mathrm{d}\theta+\rho(X+Y\operatorname{tg}\phi)\,\mathrm{d}s_\alpha=0 \tag{23}$$

$X+Y\operatorname{tg}\phi=A$ est la composante oblique parallèlement à β de la force de masse suivant la direction α, d'où :

$$\boxed{\mathrm{d}p+\frac{2R}{\cos\phi}\mathrm{d}\theta-\rho A\,\mathrm{d}s_\alpha=0} \tag{24}$$

et de même le long de la caractéristique β :

$$\boxed{\mathrm{d}p - \frac{2R}{\cos\phi}\,\mathrm{d}\theta - \rho B\,\mathrm{d}s_\beta = 0} \quad (^1) \qquad (25)$$

Les équations (24, 25) dues à Mandel [16] dans le cas d'un matériau homogène de courbe intrinsèque quelconque se réduisent aux équations de Kötter si le matériau obéit au critère de Coulomb.

On pourra se reporter à l'annexe du chapitre V consacrée au théorème de Bonneau, où les équations de Kötter sont obtenues par des considérations qui mettent bien en évidence leur signification du point de vue mécanique.

8 — Procédé de calcul de la solution

Les propriétés mathématiques décrites aux § 5, 6, 7, sont d'un grand intérêt pratique car elles permettent de calculer commodément la solution du problème pour les contraintes dans les zones plastiques.

En effet, le problème étant hyperbolique on peut utiliser pour construire la solution, la méthode des caractéristiques qui est classique pour ce type de problèmes.

Supposons connues les valeurs des fonctions p et θ le long d'un arc de courbe AB non caractéristique.

La solution continue de (17, 18) est déterminée de façon unique de chaque côté de AB dans le triangle curviligne limité par AB et les caractéristiques intérieures issues de A et B, appelé domaine de dépendance de AB. (Résultat classique de la théorie des équations aux dérivées partielles, dont la méthode des caractéristiques fournit d'ailleurs une ébauche de démonstration).

La méthode des caractéristiques permet de calculer numériquement cette solution par discrétisation.

On divise AB par n points 1, 2, 3, ..., n (fig. 4); en chacun de ces points les pentes des caractéristiques α et β sont connues par (19). Assimilant ces caractéristiques à leur tangente en 1, 2, ..., n, ce qui est d'autant mieux acceptable que la division de AB est plus fine, on obtient les points (1, 2),

(1) On trouvera dans l'annexe consacrée au matériau non homogène dont les résultats sont évidemment applicables au cas du matériau homogène, les formules (24) et (25) écrites avec les notations tensorielles classiques.

(2, 3), (3, 4), ..., $(n-1, n)$, approximant les nœuds du réseau des caractéristiques α et β qui s'appuient sur 1, 2, 3, ..., n. En ces points, on peut calculer p et θ : en effet, en chaque point $(k, k+1)$, les relations nécessairement vérifiées par la solution le long des caractéristiques α, $[k+1, (k, k+1)]$ et β, $[k, (k, k+1)]$, fournissent par passage aux différences finies, deux équations linéaires pour les deux inconnues.

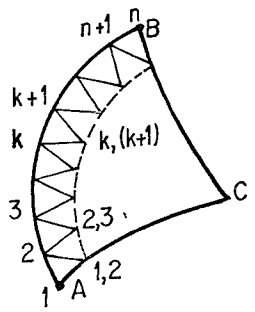

FIG. IV.4.

Le processus peut alors être réutilisé en faisant jouer aux points $(k, k+1)$, (en nombre $n-1$), le rôle des points k du stade précédent.

On calcule ainsi la solution en suivant les caractéristiques, d'où le résultat annoncé sur le domaine de dépendance.

Il est clair que l'approximation de la solution ainsi obtenue est d'autant plus précise que le maillage est plus fin.

La méthode peut être aussi utilisée pour construire la solution à partir de la donnée de p et θ sur deux arcs de caractéristiques concourants, et dans d'autres cas encore (*cf.* par exemple [10]).

Il n'est pas de notre propos d'entrer ici dans des détails qui ressortissent à l'analyse numérique. Nous avons indiqué le principe de la méthode des caractéristiques en utilisant le schéma aux différences finies le plus simple. Il est évident que l'on pourra utiliser des schémas plus élaborés (1) pour la détermination des nœuds du réseau ainsi que pour discrétiser les relations le long des caractéristiques. Le point essentiel est que la résolution se fait en utilisant les caractéristiques et les relations le long de ces lignes.

La méthode des caractéristiques est l'outil de base pour la résolution des problèmes d'écoulement plan. Celle-ci s'effectue le plus souvent, numériquement et ce n'est qu'exceptionnellement que l'on peut mettre en évidence

(1) Rappelons que le raffinement du maillage et le raffinement du schéma de discrétisation interviennent tous deux dans l'amélioration de la précision d'une solution obtenue par une méthode numérique.

des solutions analytiques comme nous le ferons sur un exemple classique dans la suite.

Elle a été beaucoup utilisée par Sokolovski et est souvent associée, en mécanique des sols, au nom de cet auteur (*cf.* par exemple [22], [23]).

9 — Transformation des équations (24, 25)

9.1. Si les forces de masse sont nulles

Dans le cas où il n'y a pas de forces de masse, (24) et (25) s'écrivent :

$$\mathrm{d}p + \frac{2R}{\cos\phi}\,\mathrm{d}\theta = 0 \quad \text{le long d'une ligne } \alpha$$

$$\mathrm{d}p - \frac{2R}{\cos\phi}\,\mathrm{d}\theta = 0 \quad \text{le long d'une ligne } \beta.$$

Posons en suivant Mandel :

$$\Sigma = -\frac{1}{2}\int \frac{\cos\phi(p)}{R(p)}\,\mathrm{d}p \tag{26}$$

où $R = R(p)$ est la relation (14) et $\phi = \phi(p)$ est la relation entre l'abscisse du centre d'un cercle de Mohr limite et l'angle de sa tangente au point de contact avec la courbe intrinsèque.

Alors (24) et (25) s'intègrent en :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Sigma - \theta = \mathrm{Cte} = \beta & \text{le long d'une ligne } \alpha \\ \Sigma + \theta = \mathrm{Cte} = \alpha & \text{le long d'une ligne } \beta \end{array}} \tag{27}$$

- *Avec le critère de Tresca :*

$$\Sigma = -p/2k$$

d'où les relations de Hencky :

$$\boxed{\begin{array}{ll} p + 2k\theta = \mathrm{Cte} & \text{le long d'une ligne } \alpha \\ p - 2k\theta = \mathrm{Cte} & \text{le long d'une ligne } \beta \end{array}} \tag{28}$$

- *Avec le critère de Coulomb :*

$$|\tau| = C - \sigma \operatorname{tg}\phi$$

d'où $\quad R = (H+p)\sin\phi \quad$ avec $\quad H = C \operatorname{cotg}\phi$

d'autre part :

$$\mathrm{d}p = \mathrm{d}R/\sin\phi \tag{16}$$

on en déduit :

$$\Sigma = -\frac{\operatorname{cotg}\phi}{2}\int\frac{\mathrm{d}R}{R} = -\frac{\operatorname{cotg}\phi}{2}\operatorname{Log} R$$

ou encore :

$$\Sigma = -\frac{\operatorname{cotg}\phi}{2}\operatorname{Log}(H+p). \tag{29}$$

9.2. Cas du critère de Tresca avec forces de masse dérivant d'un potentiel

Puisqu'il s'agit du critère de Tresca, $\phi = 0$ et les caractéristiques forment un réseau *de courbes orthogonales.*

Si les forces de masse dérivent d'un potentiel V, ce qui est le cas le plus courant on a :

$$A = -\frac{\partial V}{\partial s_\alpha}, \qquad B = -\frac{\partial V}{\partial s_\beta}$$

(24) et (25) deviennent alors :

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}(p+\rho V) + 2k\,\mathrm{d}\theta = 0, && \text{ligne } \alpha \\ &\mathrm{d}(p+\rho V) - 2k\,\mathrm{d}\theta = 0, && \text{ligne } \beta \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

d'où les formules (27) et (28) modifiées en remplaçant p par $p+\rho V$.

10 — Géométrie du réseau de caractéristiques

10.1.

Les caractéristiques forment un réseau de deux familles de courbes qui se coupent à l'angle $(\alpha, \beta) = (\pi/2+\phi)$.

10.2. Théorème de Hencky

Dans les cas exposés ci-dessus où les relations le long des caractéristiques s'intègrent sous la forme (27) (ce qui exclut en particulier le cas des sols de Coulomb pesants), considérons (fig. 5) deux lignes caractéristiques α et deux lignes caractéristiques β, qui se coupent en M, N, P, Q.

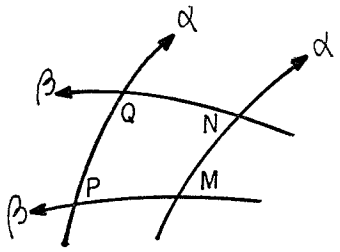

FIG. IV.5.

Appliquant (27), on a :

$$\Sigma_M - \theta_M = \Sigma_N - \theta_N$$
$$\Sigma_P - \theta_P = \Sigma_Q - \theta_Q$$
$$\Sigma_M + \theta_M = \Sigma_P + \theta_P$$
$$\Sigma_N + \theta_N = \Sigma_Q + \theta_Q$$

d'où

$$\boxed{\theta_N - \theta_M = \theta_Q - \theta_P} \qquad (31)$$

Cette propriété (31) constitue le *théorème de Hencky.*

p l Dans le cas où ϕ est indépendant de p (critère de Tresca ou de Coulomb), le théorème de Hencky conduit à une propriété géométrique simple : la variation d'angle de la tangente le long d'une caractéristique α entre deux caractéristiques β, données, est indépendante de la caractéristique α considérée (on peut permuter les rôles de α et β).

Un réseau possédant cette propriété est appelé *réseau de Hencky.*

10.3. Conséquences du théorème de Hencky : quelques champs simples

Champ semi-homogène : Dans les conditions d'applications du théorème de Hencky, on dit que le champ de contraintes est semi-homogène dans un domaine, si α (resp. β) des formules (27), est constant dans le domaine.

Reprenant la figure 5 on voit que θ et Σ sont constants sur chaque ligne α (resp. β) dans le domaine;

de plus ~~si ϕ est indépendant de p~~, les ~~deux familles de~~ caractéristiques α (resp. β) sont rectilignes.

10.4. Propriétés de certains champs semi-homogènes

Il est intéressant de s'arrêter un peu plus longuement sur les champs semi-homogènes dans le cas des réseaux de Hencky, très utiles dans les constructions de solutions.

Les caractéristiques α (resp. β) d'un tel champ sont des segments d'une famille de droites à un paramètre. (On peut démontrer réciproquement que toute famille de droites à un paramètre convient).

Ces droites ont une enveloppe et on démontre ([1]) que si les segments de caractéristiques touchent l'enveloppe, ce ne peut être à l'intérieur du solide.

Un cas particulier important est celui où l'enveloppe est réduite à un point : c'est l'éventail de Prandtl. Ce point apparaît d'ailleurs comme une caractéristique β (resp. α) dégénérée.

Si le critère est celui de Coulomb, l'éventail de Prandtl est composé de spirales logarithmiques et de rayons vecteurs (cercles dans le cas du critère de Tresca) (fig. 6).

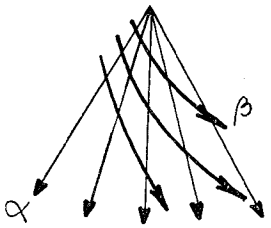

FIG. IV.6.

Dans le cas général pour le critère de Tresca, le réseau de caractéristiques étant orthogonal, les caractéristiques β (resp. α) sont les développantes de l'enveloppe (E) (fig. 7). Désignons par s l'abscisse sur (E)

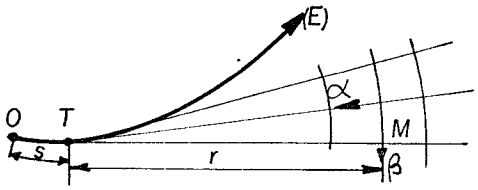

FIG. IV.7.

du point de contact T de chaque droite α avec (E), et par r la distance TM de ce point de contact au point courant correspondant sur une caractéristique β (fig. 7). On sait que : $\rho = s+r$ est constant le long de chaque caractéristique β développante de (E).

D'où la propriété : les segments rectilignes de caractéristiques compris entre deux caractéristiques de l'autre famille sont tous de même longueur ([2]).

(1) Le résultat est un cas particulier du théorème de Bonneau [3] que nous donnons en annexe au chapitre V.

(2) Cette propriété était très utile naguère, lorsque la construction des réseaux de caractéristiques se faisait graphiquement.

11 — Raccordement de solutions

Les caractéristiques étant réelles, il est possible ([1]) le long d'une caractéristique et seulement le long d'une caractéristique de raccorder deux solutions correspondant aux mêmes valeurs de p et θ, qui satisfont (24) et (25), mais diffèrent par les valeurs des dérivées. On obtient donc ainsi une solution continue avec dérivées discontinues normalement à la caractéristique.

Si on se place dans les conditions d'application du théorème de Hencky, on voit facilement qu'à un champ homogène on ne peut raccorder qu'un champ semi-homogène, (si le raccordement est effectué le long d'une ligne α (resp. β), c'est le paramètre α (resp. β) qui est constant dans le champ semi-homogène.

Les résultats ci-dessus ont trait au champ des contraintes dans les zones plastiques. Bien que nous n'en ayons pas terminé avec ce problème, nous allons maintenant passer à l'étude du problème pour les vitesses. Nous reviendrons à la fin de la partie B (§ 16) sur la question des champs de contraintes discontinus dans la zone plastique car tout ce qui a été dit jusqu'à présent concerne uniquement les champs de contraintes continus.

Dans C, nous traiterons un exemple et dans D nous indiquerons certaines particularités des problèmes pour le matériau de Coulomb.

B. LE PROBLÈME POUR LES VITESSES

12 — Loi de comportement

12.1.

Nous avons traité aux § 2 et 3 de l'intervention de la loi de comportement.

En particulier il est apparu que pour les matériaux dont le critère est du type courbe intrinsèque, il n'est pas nécessaire que la loi de comportement soit celle du matériau standard pour que le problème en contraintes dans les zones plastiques se pose de la manière indiquée.

---

(1) L'indétermination de la solution du problème de Cauchy sur un arc de caractéristique avec des données caractéristiques, résulte de l'indétermination dans le calcul des dérivées normales.

Ainsi on a pu traiter ce problème sans que la loi de comportement ait été entièrement précisée, pourvu qu'elle satisfasse certaines conditions.

Il est évident par contre que pour l'étude du problème pour les vitesses, il est indispensable que la loi de comportement soit parfaitement définie.

A titre de simplification, nous ne traiterons ici que le cas du matériau de Tresca standard. On sait que ce schéma de comportement est acceptable pour le métal et les argiles non drainées ($\phi = 0$).

En annexe est traité le cas du matériau standard de courbe intrinsèque quelconque; bien que, comme nous l'avons dit au chapitre I, l'hypothèse du principe du travail maximal ne corresponde pas à la réalité dans le cas $\phi \neq 0$, il est utile de traiter le problème dans cette hypothèse car :

d'une part la solution pour le matériau standard peut fournir des indications sur celle correspondant au matériau réel (*cf.* au chapitre V, le théorème de Radenkovic [18]);

d'autre part, comme nous l'indiquons dans l'annexe, l'étude du problème en vitesses pour le matériau standard de courbe intrinsèque quelconque fournit tous les éléments nécessaires à la construction de solutions pour les matériaux non standards du type de ceux proposés par Bent Hansen, indiqués au chapitre I (§ 8) (*cf.* le travail de Nègre [17]).

12.2. Le matériau standard

Dans le cas du matériau standard, la loi de comportement est, en reprenant les notations du § 2 :

$$v_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \lambda \geqslant 0 \tag{32}$$

où $F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z) = 0$ est le critère d'écoulement;

$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0$ est la projection de ce critère dans le plan (x, y) :

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = F[\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})]$$

la fonction $\sigma_z(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ étant obtenue par résolution de :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_z} = 0.$$

On a donc :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}\frac{\partial \sigma_z}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{pour} \quad i, j = 1, 2 \tag{33}$$

d'où :

$$v_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad \lambda \geqslant 0 \qquad i, j = 1, 2\,; \tag{34}$$

ainsi f, « critère dans le plan (x, y) », est aussi potentiel plastique bidimensionnel.

Dans le cas où F ne dépend que du déviateur, on a :

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \frac{\tau_{xy}^2}{2} + \frac{\tau_{yx}^2}{2} - k^2 \tag{35}$$

d'où :

$$\left.\begin{aligned} v_{xx} &= \lambda\,(\sigma_x - \sigma_y)/2 \\ v_{yy} &= \lambda\,(\sigma_y - \sigma_x)/2 \\ v_{xy} &= \lambda\,\tau_{xy} \\ \lambda &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

13 — Lignes caractéristiques. Relations le long des caractéristiques pour les vitesses

Le problème en contrainte étant résolu comme indiqué dans A, c'est-à-dire que l'on connaît les contraintes dans la zone plastique, on cherche maintenant à déterminer les vitesses dans le solide.

Les zones dans lesquelles $\underline{\sigma}$ n'a pas été déterminé sont les zones supposées a priori non déformées, où le critère de plasticité n'est donc pas nécessairement atteint. Le mouvement y est un mouvement de corps rigide et l'on détermine le champ de vitesses à partir des conditions à la limite.

C'est à la distribution des vitesses dans les zones plastiques de la solution en contraintes que nous allons nous intéresser.

Puisque nous ne traitons que le cas du matériau de Tresca, les lignes caractéristiques α, β sont orthogonales.

En un point M de la zone plastique prenons comme axes Mx et My les tangentes à $M\alpha$ et $M\beta$ (fig. 8).

On a alors en M : $\sigma_x = -p = \sigma_y$, $\tau_{xy} = k$.

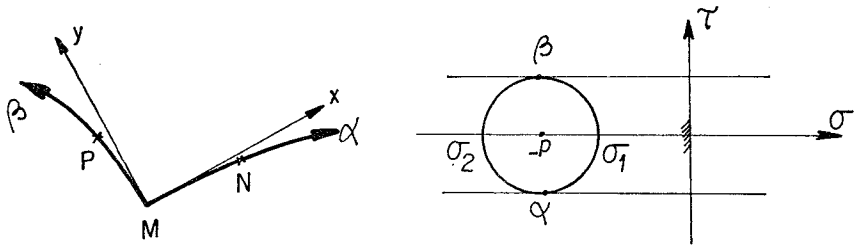

FIG. IV.8.

La loi de comportement (36) donne :

$$\frac{\dfrac{\partial u_x}{\partial x}}{0} = \frac{\dfrac{\partial u_y}{\partial y}}{0} = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}}{k} = \lambda \geqslant 0. \tag{37}$$

On en déduit le résultat suivant :

En M, la vitesse de dilatation linéaire est nulle suivant les directions de $M\alpha$ et $M\beta$. La vitesse de distorsion doit être positive.

Si on introduit v_α et v_β, composantes du vecteur vitesse, en chaque point suivant les directions α et β, (37) s'exprime en écrivant que les projections sur Mx des vitesses en M et N (infiniment voisins sur $M\alpha$) sont égales (de même en M et P sur My) d'où :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{d}v_\alpha - v_\beta\,\mathrm{d}\theta = 0 & \text{le long des lignes } \alpha \\ \mathrm{d}v_\beta + v_\alpha\,\mathrm{d}\theta = 0 & \text{le long des lignes } \beta \end{array}} \tag{38}$$

et la condition de possibilité ($\lambda \geqslant 0$) :

$$\boxed{\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} - v_\beta\,\frac{\partial \theta}{\partial s_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + v_\alpha\,\frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} \geqslant 0} \tag{39}$$

Du point de vue mathématique, dans les zones plastiques une fois le champ de contrainte connu, le problème en vitesses défini par (36), est hyperbolique linéaire. (38) montre que les caractéristiques α et β pour les contraintes sont caractéristiques pour les vitesses ([1]), et les équations (38), appelées équations de Geiringer sont les relations le long des caractéristiques.

(1) Les caractéristiques d'un tel problème du premier ordre sont les courbes le long desquelles il existe une relation différentielle pour la solution.

Remarque sur la signification des équations de Geiringer :

Les équations de Geiringer (38) expriment que la déformation dans le plan (x, y) s'effectue sans variation de volume, et a pour directions d'extension nulle (orthogonales) les directions α et β caractéristiques pour les contraintes.

14 — Exemples

D'une façon générale, la détermination du champ des vitesses, dans la zone plastique, s'effectue en utilisant la méthode des caractéristiques.

Dans quelques cas, il est possible de trouver la forme explicite de la solution. Nous allons donner à titre d'exemple, les champs de vitesses associés aux champs de contraintes simples rencontrés au § 10.

14.1. Champ de contraintes homogène

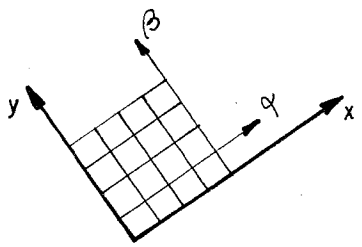

FIG. IV.9.

Les caractéristiques forment un réseau de droites orthogonales que l'on peut prendre comme lignes de coordonnées cartésiennes $v_\alpha = u_x$, $v_\beta = u_y$, et (38) montre que :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0\,;$$

d'où la forme de la solution générale pour le champ de vitesses dans un champ de contraintes homogène :

$$u_x = f(y), \quad u_y = g(x) \tag{40}$$

et (39) impose

$$f'(y)+g'(x) \geqslant 0 \tag{41}$$

14.2. Champ de contraintes semi-homogène

Nous supposons, pour fixer les idées, que les caractéristiques β sont des segments rectilignes d'enveloppe (E), (fig. 10).

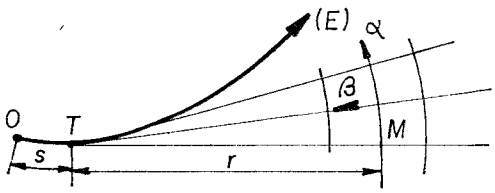

FIG. IV.10.

Les équations de Geiringer deviennent :

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{d}v_\alpha - v_\beta \mathrm{d}\theta = 0 & \text{le long des lignes } \alpha \\ \mathrm{d}v_\beta = 0 & \text{le long des lignes } \beta \end{array}\right\} \tag{42}$$

Les caractéristiques α et β peuvent être prises comme système de coordonnées curvilignes orthogonales, les paramètres correspondants étant alors : θ constant sur les lignes β, variable sur les lignes α, et ρ constant sur les lignes β, variable sur les lignes α (*cf.* § 10.4).

(42) entraîne que v_β est fonction de θ uniquement, soit par exemple :

$$v_\beta = f'(\theta)$$

et alors puisque :

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial \theta} = v_\beta$$

on a :

$$v_\alpha = f(\theta) + g(\rho) \tag{44}$$

(43) et (44) donnent la forme générale de la solution pour les vitesses dans un champ de contraintes semi-homogène.

La condition de possibilité s'écrit (puisque $\mathrm{d}s_\beta = -\mathrm{d}\rho$ et $\mathrm{d}s_\alpha = r\mathrm{d}\theta$) :

$$-g'(\rho) + \frac{f''(\theta)}{r} + [f(\theta) + g(\rho)]\frac{1}{r} \geqslant 0. \tag{45}$$

15 — Discontinuité de la vitesse

Ce qui a été dit pour le problème des vitesses concerne les solutions continues en vitesses dans une zone plastique où le champ de contraintes est connu continu.

Nous abordons maintenant le problème des solutions en vitesse admettant des discontinuités, le champ de contraintes étant, lui, continu. Il s'agit de solutions faibles en vitesse (1).

Le champ de contraintes étant connu, le réseau de caractéristiques est fixé. Cela correspond au fait, qu'une fois les contraintes déterminées, le problème pour les vitesses, est linéaire.

On sait (*cf.* Courant et Hilbert [5] II pages 486 et la suite) que pour un problème linéaire hyperbolique, les lignes de discontinuité des solutions faibles sont nécessairement des caractéristiques ; on obtient une condition de saut et une équation de propagation de la discontinuité le long de la caractéristique.

Nous en déduisons que :

1° Les lignes de discontinuité de vitesses sont nécessairement des caractéristiques.

2° Le flux de vitesse à travers la ligne de discontinuité devant être conservé par suite de l'incompressibilité du matériau, *la discontinuité est nécessairement tangentielle.* Ce n'est autre que la condition de saut annoncée plus haut.

3° Si pour fixer les idées, la ligne de discontinuité de u est une ligne α, de part et d'autre de cette ligne, au voisinage immédiat, on peut appliquer l'équation de Geiringer :

$dv_\alpha - v_\beta d\theta = 0$ suivant la ligne α, v_β étant continu, on voit que :

$$d[v_\alpha] = 0 \quad (2).$$

C'est l'équation de propagation.

La discontinuité de vitesse est constante le long de la ligne de discontinuité.

---

(1) La nécessité de prendre en considération comme solutions du problème physique les solutions faibles du problème mathématique apparaît dans pratiquement tous les exemples ; elle est clairement suggérée par l'expérience (localisation de la déformation le long de lignes de glissement).

(2) Le crochet désigne la discontinuité.

Enfin la condition de possibilité correspondant à $\lambda \geqslant 0$ donne :

si on franchit la ligne α (resp. β) dans le sens de la ligne β (resp. α), *la discontinuité de* v_α (resp. v_β) *doit être positive.*

On remarque que les lignes caractéristiques qui sont les lignes de cisaillement maximal, apparaissent comme les lignes de glissement possibles. Cela est conforme à certaines expériences de Mécanique des Sols [2, 9].

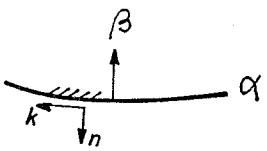

FIG. IV.11.

16 — Discontinuité du champ de contraintes

Comme nous l'avons annoncé au § 11 nous traitons maintenant des solutions faibles en contraintes que l'on est conduit à considérer dans la résolution de certains problèmes.

Le problème en contraintes est quasi-linéaire, et à la forme d'une loi de conservation. Nous renvoyons à [5]-II, p. 488-490, pour l'étude mathématique dont les résultats sont les suivants :

— les lignes de discontinuité ne sont pas des caractéristiques ;

— on peut obtenir des solutions faibles, avec discontinuités, même si les données sur (C) sont continues ;

— on obtient des conditions de saut, qui ici correspondent à la continuité des contraintes appliquées sur la surface de discontinuité, mais celles-ci ne suffisent pas à déterminer une solution discontinue unique, on doit en pratique se donner des indications sur la forme de la ligne de discontinuité.

Du point de vue des vitesses, il ne peut y avoir de discontinuité de vitesse le long d'une ligne de discontinuité des contraintes. Celle-ci doit être considérée comme la limite d'une zone rigide infiniment mince, (*cf.* [10] et annexe *a*, § 7.2, du présent chapitre, (1).

(1) C'est ce qui précise la signification des solutions faibles en contraintes vis-à-vis du problème physique.

C. ETUDE D'UN EXEMPLE

17 — Le problème posé

Nous allons maintenant étudier un exemple afin de voir comment toutes les notions que nous avons introduites au fil des paragraphes précédents interviennent.

Nous considérons le problème de la butée d'une paroi rigide lisse sur un massif plastique non pesant, obéissant au critère de Tresca.

Les conditions à la limite sont les suivantes (fig. 12).

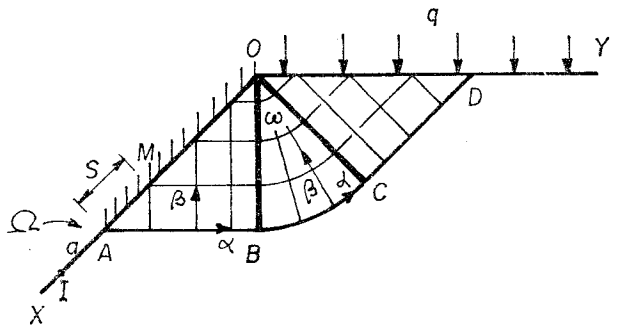

FIG. IV.12.

à l'infini les vitesses sont nulles :

sur OY : $\sigma = -q, \quad \tau = 0$

sur OX : $\begin{cases} s > 0 : \tau = 0, & u_n = \Omega(a+s) \\ s < 0 : \tau = 0, & \sigma = 0 \end{cases}$

$IM = a+s$

18 — Construction de la solution

On cherche à construire une solution correspondant à un écoulement du sol vers le haut, c'est-à-dire où la zone plastique aille de AO à OY.

Partons alors de OY :

Appliquant la méthode du § 8, on voit que dans l'angle $(OC, OY) = \pi/4$ on a nécessairement un champ homogène puisque $\tau = 0$ et $\sigma =$ Cte sur OY.

Deux tels équilibres sont possibles qui correspondent à ce que OC soit caractéristique α ou β. (Deux cercles de Mohr possibles). Ici il est nécessaire de faire intervenir les vitesses (et donc la loi de comportement) : le mouvement du matériau devant s'effectuer à partir de OA vers la surface OY, il faut que σ qui est contrainte principale, soit la plus grande traction ; OC est donc une ligne β (1).

A ce champ homogène on ne peut raccorder qu'un champ semi-homogène, dans lequel les caractéristiques seront les droites ; toute ligne β de ce champ semi-homogène, qui rencontre AO doit faire avec AO un angle de $\pi/4$, ($\tau = 0$ sur AO) : ces lignes sont donc des droites parallèles. On a sous AO un autre champ homogène OAB.

Reste l'angle BOC où nous devons raccorder les deux champs homogènes. Si on fait l'hypothèse d'un raccordement continu (ceci afin d'obtenir une solution continue), cela se fait avec un éventail de Prandtl de sommet O (2), d'ouverture ω.

On obtient alors facilement la contrainte sur OA; elle est normale uniforme. Sa valeur se calcule en utilisant la relation le long des caractéristiques α de OY à OX :

$$\text{sur } OY, \text{ on a : } p = -\sigma_1 + k = q + k$$

d'où sur OA : $p = (q+k) + 2k\omega$

et la pression sur OA est :

$$\boxed{-\sigma_2 = p + k = q + 2k(1+\omega)} \tag{46}$$

19 — Calcul des vitesses

Au-dessous de $ABCD$, le massif, réputé rigide, est donc immobile d'après les conditions à l'infini.

Les équations de Geiringer (38) montrent que v_β est constant le long de chaque ligne β.

(1) Ce raisonnement n'est pas parfaitement rigoureux et fait appel à l'intuition ; mais il n'est pas indispensable. On peut laisser en suspens la question des noms des caractéristiques (α ou β) et étudier les deux équilibres possibles qui fournissent deux valeurs distinctes pour la pression sur OA ; cette question se règle lorsque l'on considère le problème pour les vitesses : il faut que (39) soit vérifiée en tout point et cela se révèle possible pour un choix des noms α, β (au plus car il se peut en effet qu'aucun choix ne permette de satisfaire (39) partout).

(2) O n'est pas à l'intérieur du domaine plastique, il est à la frontière en accord avec le § 10.

D'autre part, v_β est continu à la traversée des lignes α en particulier de la ligne $ABCD$. Comme $v_\beta = 0$, au-dessous de $ABCD$, $v_\beta = 0$ aussi sur $ABCD$ en zone plastique. On en déduit que $v_\beta = 0$ dans toute la zone plastique.

Pour calculer v_α, on part de OA.

Dans OAB : $v_\alpha =$ Cte le long de chaque ligne α (38). Sur OA, on a $u_n = \Omega(a+s)$; puisque $v_\beta = 0$, il y a glissement du sol sous OA (ce qui est admissible puisque OA est lisse), de A vers O, et :

$$v_\alpha = \Omega(a+s)\sqrt{2} \tag{47}$$

avec les notations du § 14.1 (fig. 13).

$$v_\alpha = \Omega(a\sqrt{2}+2y) = f(y) \text{ de } (40)$$

et on vérifie que $f'(y) \geqslant 0$.

Dans OBC, $v_\alpha =$ Cte le long de chaque ligne α d'après (38) et la continuité de v_α à la traversée de OB en fixe la valeur.

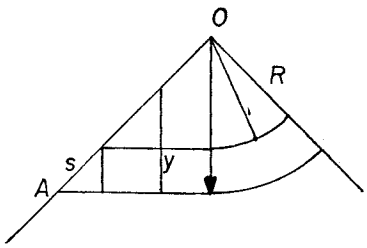

FIG. IV.13.

d'où $v_\alpha = \Omega(a\sqrt{2}+2(R-r)) = g(\rho) = g(r)$ avec les notations du § 14.2.

On vérifie que $g(\rho)-rg'(\rho) \geqslant 0$.

Dans OCD, le champ est le même que dans OAB.

Enfin, il y a discontinuité de la vitesse le long de $ABCD$:

$[v_\alpha] = \Omega a\sqrt{2}$, qui est positive quand on franchit $ABCD$ dans le sens des lignes β.

20 — Cas particulier

La figure 14 représente le cas particulier où $\omega = \pi/2$, $q = 0$, et I est à l'infini, c'est-à-dire que la paroi est animée d'un mouvement de translation vertical. L'écoulement peut se faire aussi bien à droite de A', qu'à gauche de A puisque I est à l'infini.

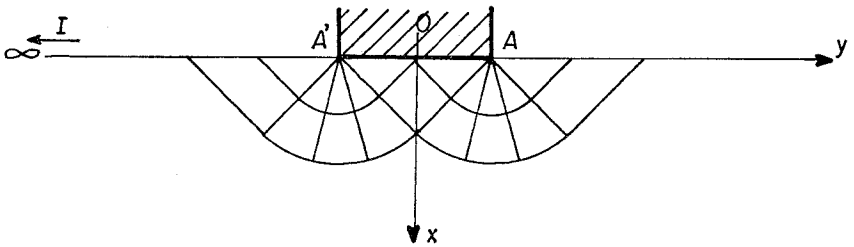

FIG. IV.14.

On trouve pour la pression la valeur :

$$\boxed{-\sigma_2 = (\pi+2)k.}$$

De plus cette solution est valable quel que soit le frottement sous la paroi : c'est la symétrie qui impose que l'équilibre sous la paroi soit homogène. (S'il y a du frottement, la distribution de vitesses est nécessairement la distribution symétrique ; alors que s'il n'y en a pas, la distribution de vitesses dépend d'une fonction non décroissante arbitraire de y : la vitesse de glissement du sol sous la paroi).

Comparaison avec l'expérience :

Ce problème schématise le test de dureté, et donne la relation $\Delta = 2{,}57$ T entre la dureté et la résistance à la traction.

Les calculs ont pu être faits dans le cas de la symétrie de révolution, ce qui approche mieux le problème pratique et donnent :

$\Delta = 2{,}85$ T dans le cas du poinçon lisse ;

$\Delta = 3$ T dans le cas du poinçon parfaitement rugueux.

L'expérience donne pour la dureté Brinell : $\Delta = 2{,}92$ T, ce qui montre l'intérêt des solutions données par la théorie du matériau rigide plastique.

21 — Remarques sur la solution obtenue

Revenant au cas général du § 19, la solution ne peut être valable que si q n'est pas trop grand. En effet si q devient trop grand, il est intuitif que le matériau a tendance à s'écouler à gauche de A vers AX.

La solution présentée est-elle complète ? Pas tout à fait. Nous n'avons pas considéré la zone réputée rigide sous $ABCD$ du point de vue des

contraintes : il reste, pour pouvoir dire que le problème est résolu, à y déterminer le champ des contraintes qui doit satisfaire :

— les équations d'équilibre,

— les conditions à la limite sur les contraintes et ne pas violer le critère de plasticité; il suffit même d'ailleurs de prouver qu'il est possible de trouver un tel champ (qui dans la suite sera appelé champ de contraintes *licite*) (1).

La théorie des charges limites que nous exposerons au chapitre suivant permettra précisément d'interpréter clairement les résultats ainsi obtenus.

22 — Cas du matériau de Coulomb

Nous étudierons le même problème dans le cas du matériau de Coulomb non pesant.

Conformément aux § 2, 3, nous ne considérons que le point de vue du champ des contraintes, qui ne nécessite pas d'avoir totalement précisé la loi de comportement. (L'annexe *a* de ce chapitre contient tous les éléments permettant une étude en contraintes et en vitesses). A noter que dans les ouvrages classiques traitant du matériau de Coulomb (comme [22], [23]), il n'est pas d'usage d'envisager le champ des vitesses.

Nous ne reprenons pas dans le détail les raisonnements faits pour la construction de la solution. La figure 12 est modifiée (fig. 15).

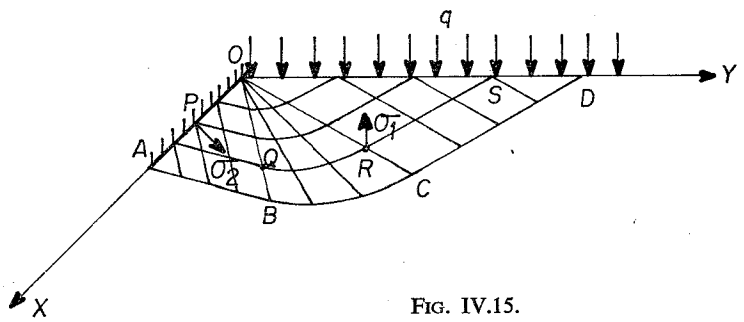

FIG. IV.15.

Les caractéristiques ne sont pas orthogonales.

Comme dans le cas du matériau de Tresca, la contrainte appliquée sur OA est contrainte principale (de même la contrainte sur OY). Il reste à savoir si cette contrainte est majeure ou mineure (i.e. σ_1 ou σ_2).

(1) On peut montrer que ceci est effectivement possible si q n'est pas trop grand [19].

Au § 17, cette alternative a été levée en faisant intervenir le champ des vitesses : le problème posé étant celui dans lequel la plaque « s'enfonce » dans le sol, la contrainte sur OA est nécessairement σ_2.

Habituellement dans le cas du matériau de Coulomb (pour lequel la loi de comportement est laissée imprécise) ce type d'alternative est levé par référence à la solution du même problème pour le matériau de Tresca (standard); le résultat correspond d'ailleurs ici à celui obtenu en levant l'alternative en faisant intervenir la loi de comportement si celle-ci est du type indiqué en annexe (matériau de Coulomb non nécessairement standard).

Cela étant, dans OCD le champ est homogène et $\sigma = -q = \sigma_1$ d'où $(OC, OY) = \pi/4-\phi/2$; dans OAB, le champ est homogène et la pression n sous la paroi est la plus grande pression : $n = -\sigma_2$ et

$$(OA, OB) = \pi/4+\phi/2;$$

C'est *l'équilibre de butée.*

Le champ OBC est semi-homogène (spirales logarithmiques).

La contrainte sur OA est normale uniforme. On la calcule en utilisant les relations le long des caractéristiques.

En S sur OY, on a : $-p = \sigma_1 - R$

d'où : $$p = q+(H+p)\sin\phi$$

et d'après (29) :

$$\Sigma_S = -\frac{\operatorname{cotg}\phi}{2}\operatorname{Log}(H+p) = -\frac{\operatorname{cotg}\phi}{2}\operatorname{Log}\frac{H+q}{1-\sin\phi}$$

$$\Sigma_S = \Sigma_R, \qquad \theta_S = \theta_R = \theta_Q+\omega.$$

En P sur OX:

$$-p = \sigma_2+R$$

d'où :

$$p = n-(H+p)\sin\phi$$

et :

$$\Sigma_P = -\frac{\operatorname{cotg}\phi}{2}\operatorname{Log}\frac{H+n}{1+\sin\phi}$$

$$\Sigma_P = \Sigma_Q, \qquad \theta_P = \theta_Q.$$

En appliquant (27) : $\Sigma-\theta = \text{Cte}$ le long des lignes α. D'où :

$$\boxed{(n+H) = (q+H)\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}\,e^{2\omega\operatorname{tg}\phi}} \tag{48}$$

pour $\omega = \pi/2$, c'est le problème de la force portante d'une fondation sur un sol non pesant on trouve :

$$\boxed{p_{\max} = H + (q+H)\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}\,e^{\pi\,\mathrm{tg}\,\phi}} \tag{49}$$

qui contient les termes de surcharge et de cohésion [13].

Ce qui a été dit au § 20, est encore valable ici : il manque, pour avoir une solution du problème des contraintes, la mise en évidence d'un champ de contraintes licite au-dessous de *ABCD*.

On verra que la théorie des charges limites ne pourra en toute rigueur donner aucun renseignement pour ce type de solution pour le matériau de Coulomb et que l'interprétation des résultats obtenus se fait, elle aussi, par référence à la solution du même problème pour le matériau de Tresca.

D. USAGES PARTICULIERS DANS L'ÉTUDE DU MATÉRIAU DE COULOMB

23 — Méthode de superposition. Théorème des états correspondants

23.1. Méthode de superposition

Le procédé de résolution que nous avons exposé dans le cas général (§ 7 et 8) permet d'étudier directement en un seul calcul le problème du matériau de Coulomb pesant, cohérent, avec ou sans surcharge de surface.

On préfère habituellement pour les calculs de force portante ou des coefficients de poussée et butée, effectuer une décomposition du problème en appliquant la méthode de superposition [13, 4].

Cherchant par exemple la force portante d'une fondation sur un sol pesant, $\phi \neq 0$, $C = 0$ avec une surcharge de surface, on étudie séparément :

a) *Le problème de la force portante pour le matériau pesant sans surcharge :*

---

(1) Utilisant les résultats de [20] suivant la même méthode que dans [19], on peut montrer que cela est possible si q n'est pas trop grand.

On met en évidence un champ de contraintes σ^1 qui satisfait les équations d'équilibre avec la force de masse, les conditions à la limite avec contraintes imposées nulles à la surface,

$f(\underline{\sigma}^1) = 0$ dans la zone plastique,

$f(\underline{\sigma}^1) \leqslant 0$ en dehors (1).

b) *Le problème de la force portante pour le matériau non pesant avec surcharge :*

On met en évidence un champ de contraintes σ^2 qui satisfait les équations d'équilibre sans force de masse, les conditions à la limite avec contrainte sur la surface égale à la surcharge et $f(\underline{\sigma}^2) = 0$ dans la zone plastique (qui peut être différente de celle de σ^1) et $f(\underline{\sigma}^2) \leqslant 0$ en dehors (1).

Alors le champ de contraintes $\sigma = \sigma^1 + \sigma^2$ satisfait : les équations d'équilibre avec la force de masse.

les conditions à la limite avec surcharge, et par suite de la forme de f :

$$f(\underline{\sigma}) = f(\underline{\sigma}^1 + \underline{\sigma}^2) \leqslant 0 \text{ partout.}$$

(le domaine d'élasticité du matériau, $f(\underline{\sigma}) < 0$, est un cône convexe de sommet O). En un point donné on n'a $f(\underline{\sigma}^1 + \underline{\sigma}^2) = 0$ que si $f(\underline{\sigma}^1) = f(\underline{\sigma}^2) = 0$ et si les deux tenseurs $\underline{\sigma}^1$ et $\underline{\sigma}^2$ ont les mêmes directions principales ordonnées, donc les mêmes facettes marginales $|\tau| = h(\sigma)$.

C'est un champ en équilibre surabondant ou limite.

Ainsi *la force portante obtenue par superposition est une approximation de la force portante réelle qui va dans le sens de la sécurité.*

A noter que la méthode de superposition est également valable pour le matériau de Coulomb avec cohésion ; dans la démonstration dans ce cas, le critère f' intervenant pour $\underline{\sigma}^1$ est le critère du matériau pulvérulent correspondant, sans cohésion, et, pour $\underline{\sigma}^2$, c'est f, le critère du matériau avec cohésion. On a alors :

$$f'(\underline{\sigma}^1) \leqslant 0 \text{ et } f(\underline{\sigma}^2) \leqslant 0 \qquad f(\underline{\sigma}^1 + \underline{\sigma}^2) = f(\underline{\sigma}) \leqslant 0$$

l'égalité $f(\underline{\sigma}) = 0$ n'étant obtenue que si $f'(\underline{\sigma}^1) = f(\underline{\sigma}^2) = 0$, $\underline{\sigma}^1$ et $\underline{\sigma}^2$ ayant les mêmes directions principales ordonnées.

---

(1) En fait, ainsi que nous l'avons dit, on n'étudie pas les contraintes en dehors des zones plastiques ; on fait l'hypothèse heuristique que le champ de contraintes peut être prolongé dans chaque zone en respectant les équations d'équilibre et les conditions à la limite sans violer le critère de plasticité. Cette lacune est importante mais « ceci est une autre histoire » sur laquelle nous reviendrons au chapitre V.

23.2. Théorème des états correspondants

Si le matériau possède une cohésion, on applique le théorème des états correspondants [13, 4] qui permet de ramener le problème à celui d'un matériau pulvérulent avec une pression de confinement au contour égale à H.

En effet, si on introduit le tenseur $\underline{\sigma}'$ déduit de $\underline{\sigma}$ par :

$$\underline{\sigma}' = \underline{\sigma} - H\underline{1},$$

on est ramené pour ce tenseur, à un problème où on doit vérifier les mêmes équations d'équilibre avec forces de masse et les conditions aux limites modifiées par adjonction d'une pression normale égale à H, et le critère de plasticité est celui de Coulomb sans cohésion.

On tient compte alors de cette surcharge comme d'une surcharge quelconque.

L'utilisation du théorème des états correspondants n'est pas indispensable. On peut traiter simultanément sans difficulté le cas de la surcharge et de la cohésion pour le matériau non pesant (comme nous l'avons fait au § 22).

23.3. Conséquences

Dans le cas de la force portante, on obtient ainsi la classique formule de Terzaghi :

$$p_{\max} = \frac{F}{B} = qN_q + CN_c + \frac{1}{2}\gamma BN_\gamma. \tag{50}$$

Disposant des abaques de N_γ, N_q et N_c, en fonction de ϕ, on peut calculer $p_{\max}$ pour toute valeur de q, C, γB.

Cette décomposition est avantageuse. En effet, dans le calcul direct les différents paramètres sont mêlés et la formule pour $p_{\max}$ est nécessairement de la forme :

$$\mathcal{R}\,(p_{\max}/\gamma B, \quad q/\gamma B, \quad C/\gamma B, \phi) = 0$$

et par application du théorème des états correspondants

$$p_{\max} = q + (C + q \operatorname{tg} \phi) \cdot N\left(\frac{\gamma B}{C + q \operatorname{tg} \phi}, \phi\right) \tag{51}$$

Il serait donc nécessaire de disposer de la courbe représentative de la fonction N pour chaque valeur de ϕ, ce qui est évidemment moins commode pour une utilisation pratique.

24 — Etude d'un exemple pour le sol pesant sans cohésion

A titre d'exemple, pour mettre en évidence certaines particularités des problèmes pour le matériau de Coulomb pesant sans cohésion, nous allons étudier la butée d'une paroi lisse sur un talus (fig. 16).

La surface du sol est libre et inclinée à l'angle β sur l'horizontale, et la paroi a un fruit égal à λ.

C'est le problème que l'on doit associer à celui du § 22 dans l'application de la méthode de superposition ([1]).

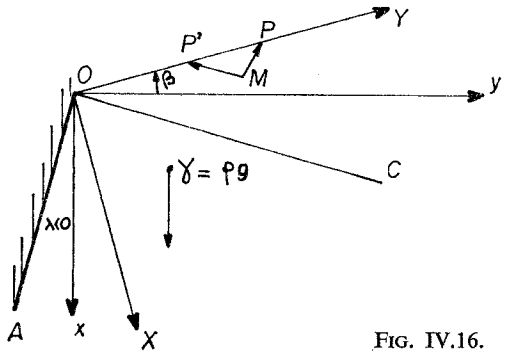

FIG. IV.16.

Les conditions à la limite sont :

sur OY : $\sigma = \tau = 0$;

sur OX : $\tau = 0$, $\sigma = ?$

Il n'est pas question en toute rigueur d'imposer des conditions sur les vitesses puisque le problème en vitesses ne sera pas abordé, s'agissant du matériau de Coulomb; toutefois en indiquant qu'il s'agit de l'équilibre de butée, nous précisons que le mouvement de la paroi lisse OA se fait vers la droite.

Nous cherchons une solution analogue à celle des § 18 et 22.

Partons de OY.

Une particularité se présente immédiatement : on a $\sigma = \tau = 0$, d'où $p = 0$, et le cercle de Mohr d'équilibre limite a un rayon R nul, le long de OY.

(1) Dans le cas du § 22 l'inclinaison de la surface libre ($\beta \neq 0$) n'entraînerait aucune complication par rapport à la solution proposée.

On ne connaît donc sur OY que la valeur de $p = 0$, θ n'étant pas donné.

En fait, on démontre [7] que la valeur de θ est fixée.

La surface libre est une ligne de points singuliers en lesquels le déterminant intervenant dans la résolution du problème de Cauchy est nul. Il n'y a de solution au problème que si une condition est remplie : cette condition fixe la valeur de θ.

On peut comprendre l'origine de ce résultat de la façon suivante :

supposant θ connu sur OY, on considère deux points P et P', infiniment voisins et on cherche à appliquer la méthode des caractéristiques (fig. 16) ; les équations (24) et (25) discrétisées en prenant pour R sa valeur à la surface qui est nulle, conduisent à deux équations linéaires pour une seule inconnue, la valeur de p en M : il est donc nécessaire qu'elles soient compatibles.

Plus rigoureusement : le long de OY on a : $\mathrm{d}p = 0$, soit :

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\sin\beta + \frac{\partial p}{\partial y}\cos\beta = 0$$

de (17) et (18), on tire :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma\,\frac{1+\sin\phi\cos 2\theta}{\cos^2\phi}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \gamma\,\frac{\sin\phi\sin 2\theta}{\cos^2\phi}$$

d'où en portant dans $\mathrm{d}p = 0$:

$$\sin(2\theta-\beta) = \frac{\sin\beta}{\sin\phi}.$$

On en tire les valeurs possibles pour θ :

soit $$(Ox, \sigma_1) = \theta = \pi + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Arc}\sin\frac{\sin\beta}{\sin\phi} \tag{52}$$

soit $$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Arc}\sin\frac{\sin\beta}{\sin\phi}. \tag{53}$$

Le choix entre ces deux valeurs possibles correspond à ceux qui ont déjà été faits dans les cas du matériau de Tresca et du matériau de Coulomb non pesant. La levée de l'indétermination s'effectue comme il a été dit au § 22. On aboutit à la règle suivante : pour la butée on doit prendre la solution qui correspond à la force la plus grande sur l'écran OA, c'est l'expression (52) : dans laquelle σ_1 est la plus proche de la normale à la surface libre que dans (53) qui correspond donc au cas de la poussée.

Le champ est alors connu dans le domaine de dépendance de OY : en effet il y a apparemment indétermination et la valeur de la dérivée normale de θ le long de OY semble pouvoir être choisie arbitrairement puisque dans (17) et (18) : $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ et $\frac{\partial\theta}{\partial y}$ ont des coefficients nuls.

En fait cette valeur est fixée et est nécessairement nulle : il est commode pour le démontrer de rapporter (17) et (18) à OX et OY : $\frac{\partial\theta}{\partial Y}$, $\frac{\partial p}{\partial Y}$ et les dérivées d'ordre supérieur en Y sont nulles sur OY; (17) et (18) doivent être vérifiées dans toute la zone en équilibre limite : en écrivant que les équations tirées de (17) et (18) par dérivation sont vérifiées on obtient :

$$\frac{\partial\theta}{\partial X} = 0.$$

Dans ce champ, θ est constant, les caractéristiques sont des droites, et les contraintes ne dépendent que de X c'est *l'équilibre de Rankine*, dans l'angle (OY, OC).

Il reste à déterminer la solution dans l'angle (OC, OA).

Pour cela on connaît les valeurs de p et θ sur la caractéristique OC et une relation (connaissance de θ) sur la courbe non caractéristique OA :

$$\theta = \pi+\lambda \qquad \text{(paroi lisse).}$$

Il est à remarquer que O est nécessairement un point de discontinuité de la solution : θ y a deux valeurs distinctes : (52) et $\theta = \pi+\lambda$.

Pour les matériaux de Tresca et de Coulomb non pesant, cette singularité des conditions à la limite, a été satisfaite en introduisant un éventail de Prandtl au point O dans la solution.

Ici la résolution s'appuie sur une propriété d'invariance par homothétie de centre O.

En effet, montrons qu'une solution de la forme :

$$p = \gamma r S(\omega), \quad \theta = \theta(\omega) \tag{55}$$

convient.

S'agissant du matériau de Coulomb sans cohésion on a en zone plastique :

$$R = p \sin\phi$$

d'où en portant dans (13) :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -p(1-\sin\phi\cos 2(\theta-\omega)) \\ \sigma_\omega &= -p(1+\sin\phi\cos 2(\theta-\omega)) \\ \tau_{\omega r} &= \quad p\sin\phi\sin 2(\theta-\omega) \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

p et θ ayant la forme (55), les conditions à la limite sur OC et OA sont satisfaites car elles sont homothétiques de centre O : θ est indépendant de r sur OC et OA, et les contraintes sur OC sont proportionnelles à r (intégration de (24) sur OC).

Les équations d'équilibre en coordonnées polaires s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\omega}}{\partial \omega} + \frac{\sigma_r - \sigma_\omega}{r} + \gamma_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\omega}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\omega}{\partial \omega} + \frac{2\tau_{r\omega}}{r} + \gamma_\omega &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

où :

$$\gamma_r = \gamma \cos \omega$$
$$\gamma_\omega = -\gamma \sin \omega$$

On voit que la forme de solution (55) est acceptable : les termes en r disparaissent et (57) se réduit au système (58) de deux équations différentielles du 1er ordre pour $S(\omega)$ et $\theta(\omega)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dS}{d\omega} &= \frac{S \sin 2(\theta-\omega) - \sin(2\theta-\omega)}{\cos 2(\theta-\omega) + \sin \phi} \\ \frac{d\theta}{d\omega} &= \frac{-\cos \omega - \sin \phi \cos(2\theta-\omega) + S \cos^2 \phi}{2S \sin \phi \,[\cos 2(\theta-\omega) + \sin \phi]} \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

(58) est à résoudre avec les données de $S(\omega)$ et $\theta(\omega)$ sur OC, et de $\theta(\omega)$ sur OA : soit apparemment une donnée excédentaire. En fait comme OC est une caractéristique et que les données de p et de θ sur OC sont caractéristiques, le système (58) est indéterminé au départ de OC avec ces données et il faut faire intervenir la donnée sur OA pour déterminer la solution, (méthode dite du tir).

On obtient ainsi $S(\omega)$ d'où p, et $\theta(\omega)$.

La solution ainsi obtenue est l'unique solution continue du problème. Elle est homothétique de centre O, et la répartition des contraintes sur l'écran est triangulaire.

Le réseau de caractéristiques a l'allure indiquée sur la figure 17, homothétique de centre O.

On doit remarquer que à la différence du cas du § 22, il n'y a pas d'éventail en O : une seule caractéristique β en O c'est OC, et O est un point de discontinuité.

Du point de vue de la Mécanique des Sols, la solution de ce problème fournit la valeur du coefficient du terme de pesanteur dans le problème de la butée.

Nous ne développerons pas plus ces questions auxquelles de nombreux traités ont été consacrés.

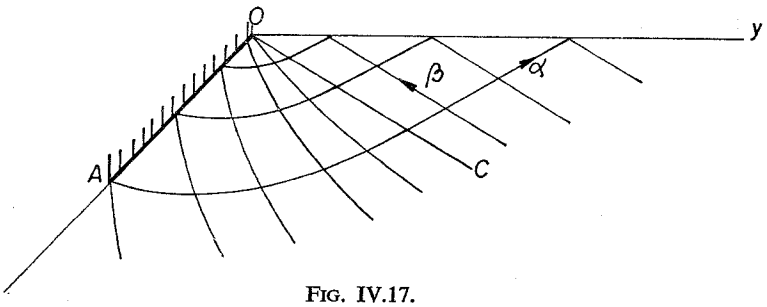

FIG. IV.17.

Des solutions à de nouveaux problèmes continuent d'être publiées : l'apparition des calculateurs électroniques a en effet ouvert de grandes possibilités dans ce domaine, car les calculs se faisaient encore, il n'y a pas si longtemps, au moyen de la machine électrique et de la table à dessiner.

On trouvera en particulier dans les ouvrages de Sokolovski [22, 23] bon nombre de solutions. (Voir aussi les travaux effectués à la Faculté des Sciences de Grenoble par MM. Kravtchenko, Biarez, Auriault, Nègre, Sibille, Stutz...).

RÉFÉRENCES — CHAPITRE IV

[1] B.G. BEREZANCEW (1952). — *Problème de l'équilibre limite d'un milieu pulvérulent en symétrie axiale.* Ed. litt. tech. théor., Moscou.

[2] J.P. BOEHLER et A. SAWCZUK (1970). — *Equilibre limite des sols anisotropes.* Journal de Mécanique, *9, 1,* pp. 5-33.

[3] M. BONNEAU (1947). — Ann. Pts et Ch., sept. oct. 1947, pp. 609-653.

[4] A. CAQUOT et J. KERISEL (1966). — *Traité de Mécanique des Sols. 4e édition,* Gauthier-Villars, Paris.

[5] R. COURANT et D. HILBERT (1962). — *Methods of Mathematical Physics.* Vol. II, Inter. Sc. Publ. N.Y.

[6] A.D. COX, G. EASON, H.G. HOPKINS (1961). — *Axially symmetric plastic deformations in soils.* Phil. Trans. Roy. Soc., London, A, 1036, *254,* pp. 1-45.

[7] J. FERRANDON (1951). — Techniques de l'Ingénieur. *Construction I,* Mécanique des Sols, p. 220.

8/ [~~8~~] A. HAAR et Th. KÁRMÁN (1909). — *Zur Theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien.* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl., pp. 204-218.

[9] P. HABIB (1953). — *Etude de l'orientation du plan de rupture et de l'angle de frottement interne de certaines argiles.* C.R. 3e Cong. Int. Méc. Sols, Zürich, *1,* pp. 28-31.

[10] R. HILL (1950). — *The Mathematical theory of plasticity.* Clarendon Press, Oxford.

[11] R. HILL (1949). — *The theory of plane plastic strain for anisotropic metals.* Proc. Roy. Soc., A, *198*, pp. 428-437.

[12] G. de JOSSELIN DE JONG (1959). — *Statics and kinematics in the failable zone of a granular material.* Uitgeverij-Delft.

[13] J. LEGRAND (1970). — *Cours de Mécanique des Sols.* E.N.P.C.

[14] J. MANDEL et F. PARSY (1961). — *Quelques problèmes tridimensionnels de la théorie du corps parfaitement plastique.* Sem. Plast. Ec. Polytechnique, P.S.T., n° 116, pp. 105-127.

[15] J. MANDEL (1966). — *Sur les équations d'écoulement des sols idéaux en déformation plane et le concept de double glissement.* J. Mech. Phys. Sol., *14*, 6, pp. 303-308.

[16] J. MANDEL (1942). — *Equilibres par tranches planes des Solides à la limite d'écoulement.* Thèse (Louis Jean, Gap), *cf.* aussi Travaux, juin, juillet, décembre 1943.

[17] R. NÈGRE (1968). — *Contribution à l'étude de l'équilibre limite des sols et des matériaux pulvérulents et cohérents.* Thèse Doc. ès-Sc., Grenoble.

[18] D. RADENKOVIC (1961). — *Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée.* C.R. Ac. Sc. Paris, *252*, pp. 4103-4104.

[19] J. SALENÇON (1972). — *Butée d'une paroi lisse sur un massif plastique : Solutions statiques.* J. Mécanique, vol. 11, n° 1, pp. 135-146.

[20] J. SALENÇON (1972). — *Prolongement des champs de Prandtl dans le cas du matériau de Coulomb,* Archives of Mechanics, vol. 25, n° 4, pp. 643-648.

[21] R.T. SHIELD (1955). — *On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry.* Proc. Roy. Soc., 233 A, nr. 1193, pp. 267-287.

[22] V.V. SOKOLOVSKI (1960). — *Statics of soil media.* Butterworths Sc. Publ. Londres.

[23] V.V. SOKOLOVSKI (1965). — *Statics of granular media.* Pergamon Press.

[24] A.J.M. SPENCER (1964). — *A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions.* J. Mech. Phys. Sol., *12*, 5, pp. 337-351.

[25] W. SZCZEPINSKI (1967). — *Wstep do analisy procesow obrobki.* Inst. Podst. Probl. Techn. - Ac. Sc. Polon.

[26] G.P. TSCHEBOTARIOFF et J.R. BAYLISS (1948). — *Determination of the shearing strength of varved clays and their sensibility to remolding.* C.R. 2e Congr. Int. Mec. Sols, Rotterdam, 1, pp. 203-207.

BENT HANSEN. — *A theory of plasticity for ideal frictionless material.* Thèse.

J.R. BOOKER et E.H. DAVIS (1972). — *A general treatment of plastic anisotropy under conditions of plane strain.* Jl Mech. Phys. Solids, vol. 20, n° 4, pp. 239-250.

A. CAQUOT et J. KERISEL (1953). — *Sur le terme de surface dans le calcul des fondations en milieu pulvérulent.* C.R. 3e Congr. Int. Mec. Sols, Zürich, vol. 1, pp. 336-337.

I.F. COLLINS (1970). — *A slip line field analysis of the deformation at the confluence of two glacier streams.* Jl of Glaciology, vol. 9, n° 56, pp. 169-193.

Y. d'ESCATHA et J. MANDEL (1971). — *Profondeur critique d'éboulement d'un souterrain.* C.R. Ac. Sc., Paris, A, *273*, pp. 470-473.

R. HILL (1967). — *On the vectorial superposition of Hencky-Prandtl nets.* Jl Mech. Phys. Solids, vol. 15, n° 4, pp. 255-262.

HON YIM KO et L.W. DAVIDSON (1973). — *Bearing capacity of footings in plane strain.* Jl Soil Mech. and Found. Div., ASCE, vol. 99, n° SM1, pp. 1-23.

H. LUNDGREN et K. MORTENSEN (1953). — *Determination by the theory of plasticity of the bearing capacity of continuous footings on sand.* Proc. 3rd Int. Conf. Soil Mech., Zürich, vol. 1, pp. 409-412.

J. MANDEL (1969). — *Cours de Science des Matériaux.* Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

G. MEYERHOF (1950-1951). — *The ultimate bearing capacity of foundation.* Géotechnique, vol. 2, n° 4, pp. 301-332.

A. NADAI. (1950, 1963). — *Theory of flow and fracture of solids.* Vol. I, II, Mc Graw-Hill, N.Y.

NGUYEN CHANH (1968). — *Etude expérimentale de la poussée et de la butée des terres.* Ann. des Ponts et Chaussées, n° 3, 1968, pp. 225-236.

V.V. SOKOLOVSKI (1962). — *Complete plane problems of plastic flow.* Jl Mech. Phys. Solids, vol. 10, pp. 353-364.

V.V. SOKOLOVSKI (1963). — *Limit equilibrium of granular medium with variable weight.* Jl. Mech. Phys. Solids, vol. 11, n° 6, pp. 395-410.

A. WINZER et G.F. CARRIER (1949). — *Discontinuities of stress in plane plastic flow.* Jl. Appl. Mech., Trans. ASME, vol. 16, pp. 346-348.

ANNEXES AU CHAPITRE IV

A. Problèmes d'écoulement libre en déformation plane pour le matériau plastique isotrope non homogène.

B. Problèmes d'écoulement plastique libre en symétrie axiale pour les matériaux dont le critère de plasticité est du type « courbe intrinsèque ».

A. PROBLÈMES D'ÉCOULEMENT LIBRE EN DÉFORMATION PLANE POUR LE MATÉRIAU PLASTIQUE ISOTROPE, NON HOMOGÈNE

1 — Généralités

Considérant un matériau rigide-plastique isotrope non-homogène, nous allons étudier les problèmes d'écoulement libre en déformation plane en supposant qu'il y a homogénéité perpendiculairement au plan de la déformation.

Comme dans le cas de l'homogénéité on démontre que si le matériau est « standard » (c'est-à-dire vérifie le principe du travail maximal) tout critère de plasticité se ramène, pour les problèmes de déformation plane, à un critère courbe intrinsèque dans le plan de la déformation.

D'autre part, si le critère du matériau est du type courbe intrinsèque, il suffit que le plan de la déformation contienne les contraintes principales extrêmes pour que la conclusion précédente soit encore valable ; condition qui peut résulter d'hypothèses relativement larges sur la loi de comportement plastique.

Nous étudions dans la suite, les problèmes de déformation plane dans le cas des matériaux pour lesquels le critère de plasticité se traduit par un critère courbe intrinsèque dans le plan de la déformation, critère dont l'expression varie avec le point.

2 — Le problème pour les contraintes. Cas général

2.1. Lignes caractéristiques des contraintes

Pour les contraintes dans la zone plastique on a le système :

$$\begin{cases} f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, x, y) = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho X = 0 & (2) \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho Y = 0 & (3) \end{cases}$$

où le critère f dépend explicitement du point (x, y) (1). On suppose l'existence de dérivées premières continues de f en x et y.

En introduisant les paramètres R, p, θ, les contraintes σ_x, σ_y, τ_{xy} ont pour expression :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -p + R\cos 2\theta \\ \sigma_y &= -p - R\cos 2\theta \\ \tau_{xy} &= \quad R\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$(p = -(\sigma_1+\sigma_2)/2, \quad R = (\sigma_1-\sigma_2)/2, \quad \theta = (Ox, \sigma_1)).$$

Le critère de plasticité, courbe intrinsèque dans le plan, se résout sous la forme :

$$R = R(p, x, y) \tag{5}$$

et l'angle ϕ défini sur la figure 1, pour la courbe intrinsèque au point (x, y) permet d'évaluer la dérivée :

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \sin\phi. \tag{6}$$

(1) est équivalente à (4) et (5) ; et (2) et (3) sont transformées en :

$$-\frac{\partial p}{\partial x}(1-\sin\phi\cos 2\theta) - 2R\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} + \sin\phi\frac{\partial p}{\partial y}\sin 2\theta + 2R\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial R}{\partial x}\cos 2\theta + \frac{\partial R}{\partial y}\sin 2\theta + \rho X = 0 \tag{7}$$

(1) x, y : système de coordonnées orthogonales de référence. X et Y sont les composantes sur ces axes de la force de masse F.

$$+\frac{\partial p}{\partial x}\sin\phi\sin 2\theta + 2R\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}(1+\sin\phi\cos 2\theta) + 2R\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial R}{\partial x}\sin 2\theta - \frac{\partial R}{\partial y}\cos 2\theta + \rho Y = 0 \qquad (8)$$

R, ϕ, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, sont des fonctions connues de p, x et y. p et θ sont des fonctions inconnues des deux variables x et y.

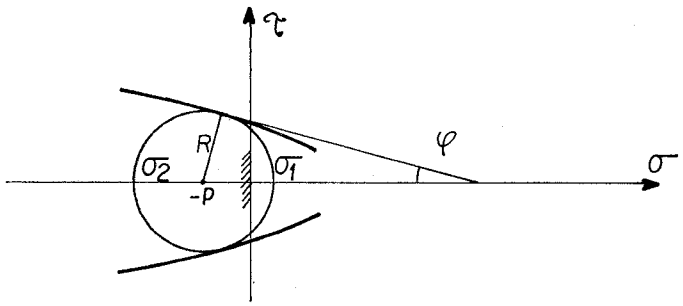

FIG. *A*.IV.*a*-1.

Le système (7, 8) est du même type et possède les mêmes propriétés que celui obtenu dans le cas de l'homogénéité.

Les caractéristiques ont encore pour pente :

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\left[\theta \pm \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right] \qquad (9)$$

et on désigne par β (resp. α) ces directions, qui correspondent aux points de contact du cercle de Mohr avec la courbe intrinsèque du point (x, y) : ce sont les facettes sur lesquelles

$$|\tau| = h(\sigma, x, y) \qquad (10)$$

(équation de la courbe intrinsèque).

Les relations le long des caractéristiques s'obtiennent de façon classique : ainsi pour la ligne α, par exemple en plaçant les axes x et y selon $M\alpha$ et sa normale et en combinant (7) et (8) :

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\cos\phi - 2R\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} + \rho(X\cos\phi + Y\sin\phi) = 0 \qquad (11)$$

où n'interviennent que les dérivées en x des fonctions inconnues p et θ $\left(\frac{\partial R}{\partial y}\text{ est connue}\right)$.

2.2. Système de coordonnées lié aux lignes caractéristiques

Introduisons alors un système de coordonnées lié aux lignes α et β.

Soient X^α et X^β des coordonnées dont les lignes α et β sont les lignes coordonnées (fig. 2), E_α et E_β en chaque point M, les vecteurs de la base locale liée à ce système :

$$E_\alpha = \frac{\partial M}{\partial X^\alpha}, \qquad E_\beta = \frac{\partial M}{\partial X^\beta}.$$

Un vecteur en M s'écrit $\mathrm{d}M = \mathrm{d}X^\alpha E_\alpha$.

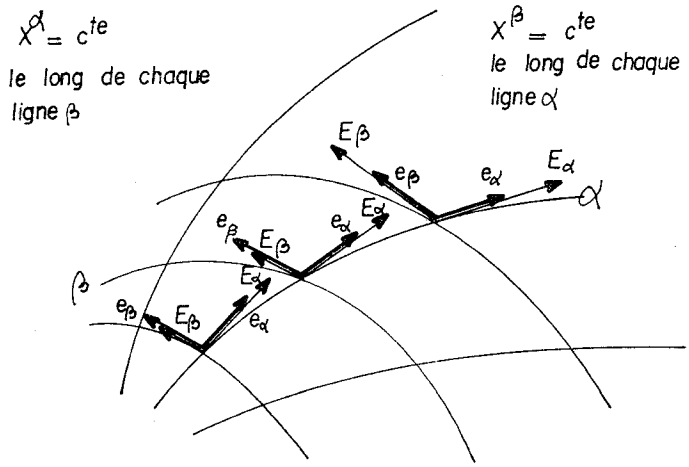

FIG. *A*.IV.*a*-2.

On considère alors la base normée associée :

$$e_\alpha = E_\alpha/|E_\alpha|, \qquad e_\beta = E_\beta/|E_\beta|$$

et $\mathrm{d}M = \mathrm{d}x^\alpha e_\alpha$. (Les x^α sont des coordonnées non holonômes). e^α, e^β est la base duale (associée par le produit scalaire euclidien) et :

$$\mathrm{d}M = \mathrm{d}x_\alpha e^\alpha \text{ (1)}.$$

On pose :

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad \text{et} \quad \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

(1) Les coordonnées contravariantes $\mathrm{d}x^\alpha$, $\mathrm{d}x^\beta$ sont les coordonnées obliques de $\mathrm{d}M$ sur la base e_α, e_β normée tangente aux lignes α, β ; $\mathrm{d}x_\alpha$, $\mathrm{d}x_\beta$ sont les projections orthogonales de ce même vecteur sur cette base.

2.3. Relations le long des caractéristiques

(11) s'écrit alors :

$$\partial_\alpha p + \frac{2R}{\cos\phi}\,\partial_\alpha\theta - [\rho F^\alpha + \partial^\beta R] = 0 \tag{12}$$

$$\boxed{\mathrm{d}p + \frac{2R}{\cos\phi}\,\mathrm{d}\theta - \left(\rho F^\alpha + \frac{\partial R}{\partial x_\beta}\right)\mathrm{d}x^\alpha = 0} \quad (^1) \tag{13}$$

est la relation le long de la caractéristique α.

De même on trouve le long d'une caractéristique β :

$$\boxed{\mathrm{d}p - \frac{2R}{\cos\phi}\,\mathrm{d}\theta - \left[\rho F^\beta + \frac{\partial R}{\partial x_\alpha}\right]\mathrm{d}x^\beta = 0} \tag{14}$$

Ces équations sont, pour le matériau non homogène de courbe intrinsèque quelconque, les homologues des équations de Kötter pour le matériau de Coulomb homogène.

On voit que ces équations se déduisent de celles obtenues dans le cas homogène en remplaçant $R(p)$ et $\phi(p)$ par $R(p, x, y)$ et $\phi(p, x, y)$ et en ajoutant des forces de masse fictives (^{2}).

3 — Cas du matériau de Tresca

Dans le cas d'un matériau de Tresca de cission limite variable $k(x, y)$, on obtient (voir aussi [5]) :

$$\partial^\alpha R = \frac{\partial k}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial k}{\partial x}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\partial k}{\partial y}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

---

(1) Les composantes obliques suivant $M\alpha$, $M\beta$ d'un vecteur de coordonnées X, Y suivant des axes Ox, Oy orthogonaux quelconques ont pour expression :

$$F^\alpha = \frac{1}{\cos\phi}\left[X\sin\left\{\theta + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right\} - Y\cos\left\{\theta + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right\}\right]$$

$$F^\beta = \frac{1}{\cos\phi}\left[-X\sin\left\{\theta - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right\} + Y\cos\left\{\theta - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right\}\right]$$

d'où les formules donnant $\dfrac{\partial R}{\partial x_\alpha} = \partial^\alpha R$ et $\dfrac{\partial R}{\partial x_\beta} = \partial^\beta R$ en fonction de $\dfrac{\partial R}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial R}{\partial y}$.

(2) Prendre garde à l'intervertion : les forces de volume fictives ne dérivent pas du potentiel R.

$$\partial^\beta R = \frac{\partial k}{\partial x_\beta} = -\frac{\partial k}{\partial x}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\partial k}{\partial y}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Les lignes α et β sont orthogonales et $dx^\alpha = dx_\alpha$, $F^\alpha = F_\alpha$, etc.
Les équations (13) et (14) s'écrivent :

$$dp + 2k(x, y)d\theta - \left(\frac{\partial k}{\partial x_\beta} + \rho F^\alpha\right) dx^\alpha = 0 \qquad \text{ligne } \alpha\,;$$

$$dp - 2k(x, y)d\theta - \left(\frac{\partial k}{\partial x_\alpha} + \rho F^\beta\right) dx^\beta = 0 \qquad \text{ligne } \beta.$$

En supposant que les forces de masse dérivent du potentiel V :

$F^\alpha = F_\alpha = -\dfrac{\partial V}{\partial x_\alpha}$ et l'on a :

$$\left.\begin{aligned} &d(p+\rho V) + 2kd\theta - \frac{\partial k}{\partial x_\beta} dx^\alpha = 0, \quad \text{ligne } \alpha \\ &d(p+\rho V) - 2kd\theta - \frac{\partial k}{\partial x_\alpha} dx^\beta = 0, \quad \text{ligne } \beta \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

4 — Cas du matériau de Coulomb

Pour le matériau de Coulomb non homogène on a :

$$R(p, x, y) = p \sin[\phi(x, y)] + C(x, y) \cdot \cos[\phi(x, y)]$$

d'où :

$$\partial R = \cos\phi \cdot \partial C + (p\cos\phi - C\sin\phi)\partial\phi.$$

En particulier, si le matériau a un angle de frottement interne constant et une cohésion variable, le réseau de caractéristiques est isogonal et les relations (13) et (14) s'écrivent :

$$dp + \frac{2R}{\cos\phi} d\theta - \left(\rho F^\alpha + \cos\phi \frac{\partial C}{\partial x_\beta}\right) dx^\alpha = 0, \qquad \text{ligne } \alpha\,;$$

$$dp - \frac{2R}{\cos\phi} d\theta - \left(\rho F^\beta + \cos\phi \frac{\partial C}{\partial x_\alpha}\right) dx^\beta = 0, \qquad \text{ligne } \beta.$$

5 — Le problème pour les vitesses

5.1. Loi de comportement

Le problème en contraintes peut être posé et résolu ainsi que nous l'avons fait, sans que la loi de comportement soit entièrement précisée sous réserve qu'elle satisfasse certaines conditions.

Il est évidemment nécessaire maintenant pour poser le problème en vitesses que la loi de comportement soit parfaitement définie.

Nous allons traiter le cas du matériau standard et nous verrons ensuite comment il est possible à partir de cette étude de traiter le cas de certains matériaux non standards.

Le problème en contraintes étant supposé résolu dans le cadre général du § 2, comment se pose le problème pour les vitesses ?

Le critère de plasticité bidimensionnel dans le plan de la déformation, apparaît aussi comme le potentiel plastique bidimensionnel ; on a :

$$\left.\begin{aligned} v_{11} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \\ v_{12} &= v_{21} = 0 \\ v_{22} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \\ \lambda &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

L'expression de F en fonction des contraintes principales s'obtient aisément ; en effet : $f = R - R(p)$ avec les définitions du § 2.1., soit :

$$f(\sigma_1, \sigma_2) \equiv \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - R\left(-\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right) \tag{17}$$

d'où d'après (6) :

$$\left.\begin{aligned} v_{11} &= \lambda(1 + \sin \phi) \\ v_{12} &= v_{21} = 0 \\ v_{22} &= -\lambda(1 - \sin \phi) \\ \lambda &\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

ϕ est connu en chaque point (x, y) par la résolution en contraintes effectuée préalablement et le problème pour les vitesses apparaît comme linéaire.

5.2. Caractéristiques des vitesses

Nous utilisons à nouveau les coordonnées x^α, x^β, définies au § 2.2.

Le tenseur v_{ij} a pour composantes :

$$\left.\begin{aligned}
v_{\alpha\alpha} &= \lambda\left[(1+\sin\phi)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left.-(1-\sin\phi)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\right]=0\\
v_{\alpha\beta} = v_{\beta\alpha} &= \lambda\left[(1+\sin\phi)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left.+(1-\sin\phi)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\right]=\lambda\cos^2\phi\\
v_{\beta\beta} &= \lambda\left[(1+\sin\phi)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left.-(1-\sin\phi)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{\phi}\right)\right]=0\\
&\qquad\lambda\geqslant 0
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Soit encore :

$$\left.\begin{aligned}
D_\alpha v_\alpha &= 0\\
D_\beta v_\beta &= 0\\
\frac{1}{2}(D_\alpha v_\beta + D_\beta v_\alpha) &\geqslant 0
\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

où les D désignent les dérivées covariantes dont les expressions sont les suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
D_\alpha v_\alpha &= \partial_\alpha v_\alpha - v_\alpha \operatorname{tg}\phi\,\partial_\alpha\left(\theta-\frac{\phi}{2}\right) - v_\beta\frac{1}{\cos\phi}\,\partial_\alpha\left(\theta-\frac{\phi}{2}\right)\\
D_\beta v_\alpha &= \partial_\beta v_\alpha - v_\alpha \operatorname{tg}\phi\,\partial_\beta\left(\theta-\frac{\phi}{2}\right) - v_\beta\frac{1}{\cos\phi}\,\partial_\beta\left(\theta-\frac{\phi}{2}\right)\\
D_\alpha v_\beta &= \partial_\alpha v_\beta + v_\alpha\frac{1}{\cos\phi}\,\partial_\alpha\left(\theta+\frac{\phi}{2}\right) + v_\beta \operatorname{tg}\phi\,\partial_\alpha\left(\theta+\frac{\phi}{2}\right)\\
D_\beta v_\beta &= \partial_\beta v_\beta + v_\alpha\frac{1}{\cos\phi}\,\partial_\beta\left(\theta+\frac{\phi}{2}\right) + v_\beta \operatorname{tg}\phi\,\partial_\beta\left(\theta+\frac{\phi}{2}\right)
\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

$\partial_\alpha\theta$ et $\partial_\beta\theta$ sont connus (résolution en contraintes), de même $\partial_\alpha\phi$ et $\partial_\beta\phi$ qui se décomposent en deux termes :

∂x^i

$$\partial_\alpha\phi = \partial_\alpha p \cdot \frac{\partial\phi}{\partial p} + \frac{\partial\phi}{\partial x^i} a^i_\alpha \quad (^1) \tag{22}$$

(terme de courbe intrinsèque + terme de non homogénéité).

5.3. Interprétation des résultats

$D_\alpha v_\alpha = 0$, signifie que la vitesse d'extension le long de la ligne α, est nulle.

La ligne α est donc une caractéristique pour les vitesses et

$$\boxed{D_\alpha v_\alpha = \partial_\alpha v_\alpha - v_\alpha \operatorname{tg}\phi\,\partial_\alpha\left(\theta - \frac{\phi}{2}\right) - v_\beta \frac{1}{\cos\phi}\,\partial_\alpha\left(\theta - \frac{\phi}{2}\right) = 0} \tag{23}$$

est la relation le long de cette caractéristique.

De même pour la ligne β avec

$$\boxed{D_\beta v_\beta = \partial_\beta v_\beta + v_\alpha \frac{1}{\cos\phi}\,\partial_\beta\left(\theta + \frac{\phi}{2}\right) + v_\beta \operatorname{tg}\phi\,\partial_\beta\left(\theta + \frac{\phi}{2}\right) = 0} \tag{24}$$

Enfin la condition :

$$\boxed{\begin{aligned} D_\alpha v_\beta + D_\beta v_\alpha = \partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta &- \left(v_\alpha \operatorname{tg}\phi + v_\beta \frac{1}{\cos\phi}\right)\partial_\beta\left(\theta - \frac{\phi}{2}\right) \\ &+ \left(v_\alpha \frac{1}{\cos\phi} + v_\beta \operatorname{tg}\phi\right)\partial_\alpha\left(\theta + \frac{\phi}{2}\right) \geqslant 0 \end{aligned}} \tag{25}$$

est la condition de positivité (de λ).

---

(1) x^i coordonnées orthogonales fixes dans lesquelles est définie la non homogénéité :

$$a^1_\alpha = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \qquad a^2_\alpha = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$$

$$a^1_\beta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \qquad a^2_\beta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

Dans le cas du critère de Tresca on reconnaît en (23, 24) les relations de Geiringer, et en (25) la condition de positivité du cas homogène (la non homogénéité n'intervient pas, dans ce cas, sur la forme de ces relations).

La détermination du champ de vitesses dans les zones plastiques se fera en règle générale en utilisant la méthode des caractéristiques (relations (23) et (24)), la condition (25) étant ensuite à vérifier en chaque point.

5.4. Hodographe

Il est commode de traduire ces résultats en introduisant le plan des vitesses (méthode développée par A.P. Green [3] dans le cas du matériau de Tresca homogène).

Les relations (23, 24) montrent qu'en un point, une ligne α (resp. β) et son image a (resp. b) sur l'hodographe (réseau image dans le plan u_x, u_y, du réseau α, β) sont orthogonales. On a donc nécessairement l'une des quatre configurations représentées à la figure 3 :

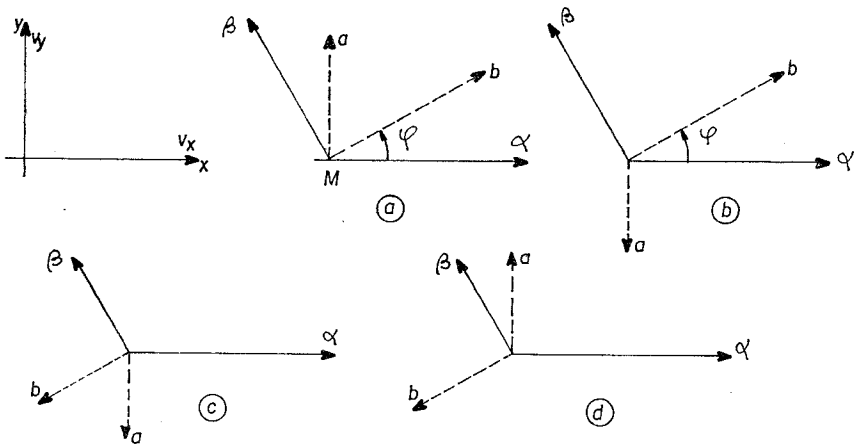

FIG. IV.a-3.

Soit $M+\overrightarrow{dM}$ un point du premier secteur (α, β), c'est-à-dire tel que $dx^\alpha > 0$, et $dx^\beta > 0$.

La condition de positivité (25) donne alors :

$$(D_\alpha v_\beta + D_\beta v_\alpha)\,dx^\alpha dx^\beta \geqslant 0 \tag{26}$$

Or $\quad D_\alpha v_\beta dx^\alpha = Dv_\beta$, compte tenu de (24) ; de même

$\quad D_\beta v_\alpha dx^\beta = Dv_\alpha$, compte tenu de (23).

Donc (26) s'écrit :

$$Dv_\alpha \mathrm{d}x^\alpha + Dv_\beta \mathrm{d}x^\beta = D\vec{u}(\mathrm{d}\vec{M})\cdot \mathrm{d}\vec{M} \geqslant 0 \tag{27}$$

et on voit aisément que, réciproquement, si (27) est satisfaite $\forall\ \mathrm{d}\vec{M}$ dans le secteur (α, β) ; (25) est vérifiée.

Il est clair que si l'on est dans la configuration *a*), (27) est certainement vérifiée ; dans *c*), (27) n'est certainement pas vérifiée ; il y a doute dans les configurations *b*) et *d*).

Ainsi la construction de l'hodographe fournit un moyen souvent très commode pour vérifier si la condition de positivité est satisfaite (résultat indiqué par Ewing et Hill [1] dans le cas du matériau de Tresca homogène).

5.5. Discontinuité de la vitesse

Le problème en vitesses étant hyperbolique linéaire, les lignes de discontinuité de la vitesse sont les caractéristiques du problème, c'est-à-dire les lignes α et β.

En écrivant (23, 24, 25) en termes de sauts, on obtient immédiatement :

(23) : Au franchissement d'une ligne β (i.e. en suivant une ligne α), on a :

$$[v_\alpha] = 0$$

la discontinuité ne porte que sur v_β.

(24) : De même au franchissement d'une ligne α

$$[v_\beta] = 0$$

la discontinuité ne porte que sur v_α.

Ce sont les conditions de saut.

Les équations de propagation de la discontinuité s'obtiennent en appliquant (23) ou (24) de part et d'autre de la ligne de discontinuité correspondante. Ainsi :

en suivant une ligne α :

$$D_\alpha[v_\alpha] = \partial_\alpha[v_\alpha] - [v_\alpha] \operatorname{tg} \phi \partial_\alpha \left(\theta - \frac{\phi}{2}\right) = 0$$

en suivant une ligne β :

$$D_\beta[v_\beta] = \partial_\beta[v_\beta] + [v_\beta] \operatorname{tg} \phi \partial_\beta \left(\theta + \frac{\phi}{2}\right) = 0$$

qui s'intègrent aisément si $\phi = \text{Cte}$.

Enfin par (25) on obtient les conditions de positivité :

au franchissement d'une ligne β dans le sens d'une ligne α :

$$[v_\beta] \geqslant 0,$$

de même : au franchissement d'une ligne α dans le sens d'une ligne β :

$$[v_\alpha] \geqslant 0.$$

En résumé :

franchissement de ligne α :	$[v_\beta] = 0$
	$[v_\alpha] \geqslant 0, \quad D_\alpha[v_\alpha] = 0$
si $\phi = \text{Cte}$	: $[v_\alpha] = [v_\alpha]_0 \exp[(\theta-\theta_0)\operatorname{tg}\phi]$
franchissement de ligne β :	$[v_\alpha] = 0$
	$[v_\beta] \geqslant 0, \quad D_\beta[v_\beta] = 0$
si $\phi = \text{Cte}$	: $[v_\beta] = [v_\beta]_0 \exp[-(\theta-\theta_0)\operatorname{tg}\phi]$

Sur l'hodographe les vecteurs représentant la discontinuité, sont nécessairement dirigés suivant Ma ou Mb de la configuration a).

On remarque que ce n'est que dans le cas du matériau de Tresca que la discontinuité de vitesse est tangente à la ligne de discontinuité.

5.6. Remarque sur l'interprétation de (23), (24), (25)

Afin de préparer l'étude des matériaux non standards nous ferons une remarque sur l'interprétation de (23), (24) et (25).

(23) et (24) signifient que la vitesse de déformation dans le plan (xy) a pour directions de vitesse d'extension nulle les lignes α et β faisant entre elles l'angle $\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)$ et bissectées par les directions principales de $\underline{\sigma}$:

La vitesse de déformation $\underline{v}$ a donc mêmes directions principales que $\underline{\sigma}$:

elle satisfait à la loi de comportement :

$$v_1 = \lambda(1+\sin\phi)$$
$$v_2 = -\lambda(1-\sin\phi)$$

et (24) indique que λ est positif : $\lambda \geqslant 0$.

6 — Cas de certains matériaux non standards

Nous envisageons maintenant les matériaux non homogènes et non standards :

— dont le critère de plasticité est du type courbe intrinsèque :

$$R = R(p, x, y) \tag{5}$$

(d'où : $\dfrac{\partial R}{\partial p} = \sin \phi(p, x, y)$ (6)) ;

— dont la loi du comportement est :

$\underline{v}$ a les mêmes directions principales que $\underline{\sigma}$ et

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \lambda(1+\sin \nu(p, x, y)) \\ v_2 &= 0 \\ v_3 &= -\lambda(1-\sin \nu(p, x, y)) \\ &\lambda \geqslant 0 \\ &\nu(p, x, y) \leqslant \phi(p, x, y) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$(\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3)$.

Ces matériaux sont une généralisation de ceux proposés par Bent Hansen dont nous avons parlé au chapitre I (§ 8).

D'après la loi de comportement, le plan de la déformation contient les contraintes principales extrêmes dans les zones plastiques. Ainsi le problème pour les contraintes se pose et se résout comme au § 2.

Une fois le champ de contraintes ainsi déterminé dans les zones plastiques, on doit y résoudre le problème pour les vitesses.

D'après la remarque du § 5.7, on voit que :

— en chaque point, la vitesse de déformation $\underline{v}$ doit admettre pour directions d'extension nulle les directions γ et δ faisant avec σ_1 l'angle

$$\mp \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \nu(p, x, y)\right) \text{ connu} \tag{29}$$

et le facteur λ doit être positif (fig. 4).

Autrement dit le problème pour les vitesses qui est encore hyperbolique linéaire admet pour lignes caractéristiques les lignes (γ, δ) de pentes :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg}\left[\theta \mp \left(\frac{\pi}{2} + \nu\right)\right] \tag{30}$$

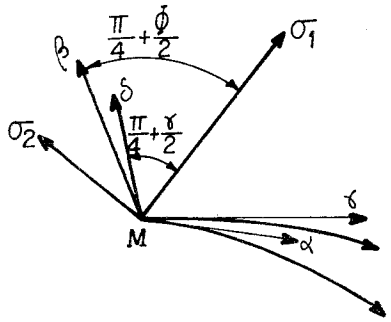

FIG. *A*.IV.*a*-4.

Les relations le long de ces caractéristiques sont :

$$D_\gamma v_\gamma = 0 \qquad \text{le long d'une ligne } \gamma \tag{31}$$

$$D_\delta v_\delta = 0 \qquad \text{le long d'une ligne } \delta \tag{32}$$

La condition de positivité de λ est :

$$D_\gamma v_\delta + D_\delta v_\gamma \geqslant 0 \tag{33}$$

(31, 32, 33) s'obtiennent à partir de (23, 24, 25) en y remplaçant (α, β, ϕ) par (γ, δ, ν) (1).

EXEMPLE : A titre d'exemple, considérons le problème du poinçonnement d'un demi-plan en matériau de Coulomb homogène non pesant, d'angle de frottement interne ϕ et dont l'angle de dilatation ν est nul (déformation sans variation de volume).

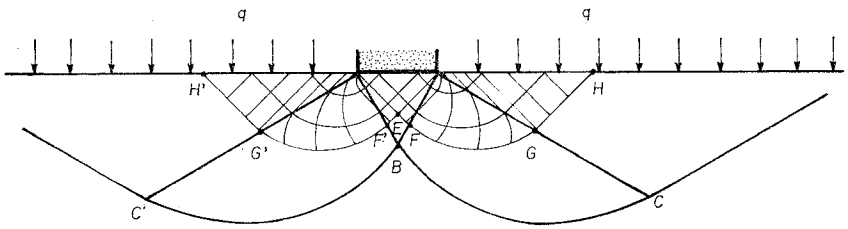

FIG. *A*.IV.*a*-5.

La figure 5 représente les réseaux de lignes (α, β) et (γ, δ) :

— le réseau de ligne (α, β) est classique : champs homogènes à caractéristiques rectilignes, et éventail de Prandtl (rayons vecteurs et spirales logarithmiques) ;

(1) Pour l'utilisation de l'hodographe (§ 5.5) il y a lieu de remplacer (α, β, ϕ, a, b) par (γ, δ, ν, c, d).

— le réseau de lignes (γ, δ) est un réseau de lignes orthogonales :
droites dans $AFEF'A'$, AGH, $A'G'H'$,
spirales logarithmiques dans AFG et $A'F'G'$.

Pour la pression sur $A'A$ on trouve le résultat usuel :

$$p_{\max} = -H + (q+H)\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}\,e^{\pi \operatorname{tg}\phi}$$

Le champ de vitesses s'obtient par intégration numérique des équations de Geinringer (ou construction de l'hodographe) dans le domaine $A'EFGHA$ (et symétrique) ; il resterait à vérifier la positivité (de λ) : cette vérification serait à faire numériquement car on est dans un cas douteux de la figure 3 (1).

7 — Discontinuité du champ des contraintes

Les solutions considérées au § 2 pour le problème en contraintes, sont uniquement des solutions où le champ de contraintes est continu. On peut dans certains problèmes être amené à envisager des solutions faibles en contraintes, c'est-à-dire admettant des discontinuités du champ des contraintes le long de lignes.

Nous allons examiner ces solutions d'abord du point de vue des contraintes, puis du point de vue du champ de vitesses de déformation pour déterminer quelles sont les conditions à satisfaire pour le champ des vitesses le long d'une ligne de discontinuité de contraintes.

7.1. Conditions pour les contraintes

Le problème pour les contraintes, défini par (7.8), est hyperbolique quasi linéaire. On sait que :

1) les lignes de discontinuité des solutions faibles pour un tel problème ne sont pas les caractéristiques ;

2) on peut obtenir des solutions faibles, même à partir de données continues ;

3) il existe des conditions de saut, mais celles-ci ne suffisent pas à déterminer la solution faible, il est nécessaire de faire intervenir une condition supplémentaire pour localiser la (ou les) discontinuité(s).

(1) Pour $\nu = 0$ il y a équivalence entre la condition $\lambda \geqslant 0$ (en général plus restrictive) et la condition thermodynamique de non négativité de la puissance dissipée. DRESCHER (1972, 1973) a montré que cette condition n'est ici pas vérifiée.

Conditions de saut :

Les conditions de saut pour le champ de contraintes, s'obtiennent en écrivant la continuité de la contrainte appliquée à la surface de discontinuité.

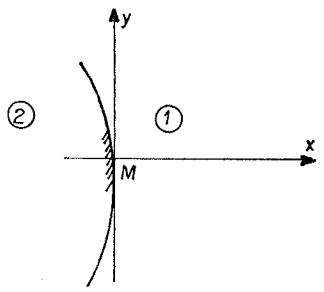

FIG. *A*.IV.*a*-6*a*.

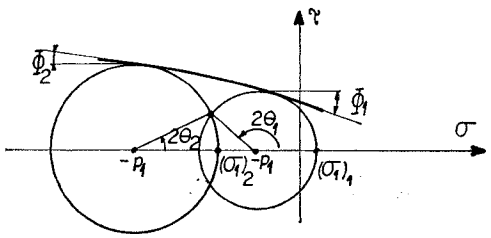

FIG. *A*.IV.*a*-6*b*.

Plaçant pour la commodité l'axe Ox suivant la normale en M à la surface de discontinuité, il vient :

$$\left.\begin{aligned} -p_1 + R(p_1, x, y) \cos 2\theta_1 &= -p_2 + R(p_2, x, y) \cos 2\theta_2 \\ R(p_1, x, y) \sin 2\theta_1 &= R(p_2, x, y) \sin 2\theta_2 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Dans le cas particulier du matériau de Coulomb (ϕ indépendant de p), (34) conduit à :

$$\sin(\theta_1 - \theta_2)\,[\sin\phi \cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2)] = 0 \tag{35}$$

d'où en éliminant la solution correspondant au champ continu la relation entre θ_1 et θ_2 dans le cas de la discontinuité :

$$\sin\phi \cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 \tag{36}$$

d'où :

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \operatorname{cotg}\theta_1 \frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi}$$

La représentation de la figure 6*b* montre très bien que dans le cas d'une courbe intrinsèque (convexe et « ouverte » dans la direction $\sigma < 0$) quelconque, les valeurs θ_1 et θ_2 solutions de (34) correspondant à la discontinuité se situent par rapport aux valeurs :

$$\phi_1 = \phi(p_1, x, y) \qquad \text{et} \qquad \phi_2 = \phi(p_2, x, y) \tag{37}$$

comme l'indique le tableau suivant (38) :

θ_1	$\frac{\pi}{2} > \theta_1 > \frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2} > \theta_1 > -\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2}$	$-\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} > \theta_1 > -\frac{\pi}{2}$
	$\frac{\pi}{2} \searrow \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \searrow 0 \searrow -\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \searrow -\frac{\pi}{2}$		
θ_2	$0 \nearrow \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \nearrow \pi/2 \nearrow \frac{3\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \nearrow \pi$		
	$0 < \theta_2 < \frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2} < \theta_2 < \frac{3\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2}$	$\frac{3\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} < \theta_2 < \pi$

7.2. Interprétation de la ligne de discontinuité pour les contraintes

On peut considérer la ligne de discontinuité du champ de contraintes comme la limite d'une zone de transition infiniment mince dans laquelle se fait le raccord entre deux champs de contraintes continus et à la limite

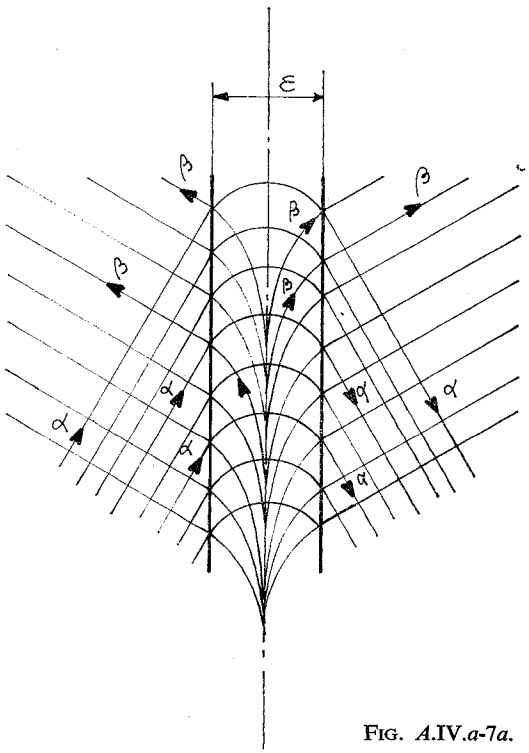

FIG. *A*.IV.*a*-7*a*.

d'écoulement, produisant sur les deux faces de la zone des contraintes opposées (fig. 7). Dans cette zone le champ de contraintes ne peut être en tout point à la limite d'écoulement : en effet s'il en était ainsi une famille de lignes caractéristiques des contraintes y aurait nécessairement une enveloppe comme le schématise la figure 7*a* et un tel champ ne saurait exister d'après le théorème de Bonneau (*cf.* Annexe du chapitre V).

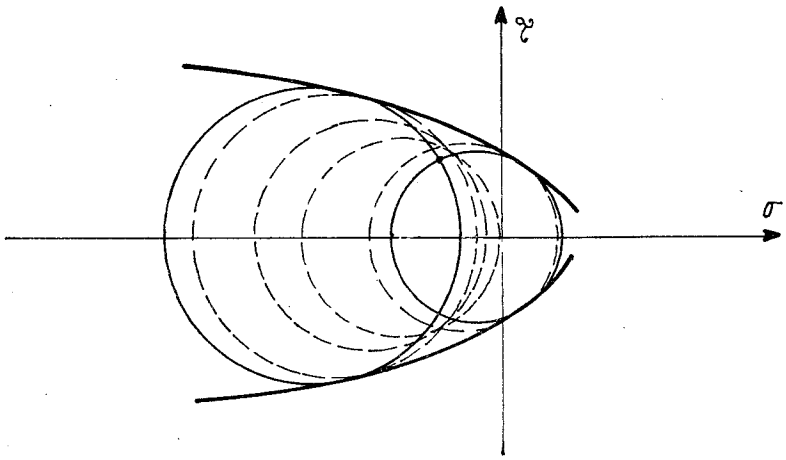

FIG. *A*.IV.*a*-7*b*.

La zone de transition comporte donc une partie où le critère n'est pas atteint. Il s'agit (Hill [4]) d'un noyau central dans lequel se produit la plus grande partie de la transition ; les contraintes τ_{xy} et σ_{xx} varient peu à la traversée de la zone de transition et le cercle de Mohr représentatif de l'état de contraintes passe toujours dans un voisinage très petit du point (σ, τ) correspondant à la contrainte appliquée sur les faces de la zone dans les états (1) et (2), (fig. 7*b*) (1).

7.3. Conditions pour les vitesses

7.3.1. Discontinuité de la vitesse le long de (C) dans un domaine.

Comme nous l'avons dit (§ 5), une fois le problème en contraintes résolu, le problème pour les vitesses est hyperbolique linéaire.

(1) C'est bien ainsi d'ailleurs qu'apparaissent les lignes de discontinuité du champ des contraintes dans les résolutions de quelques problèmes élastoplastiques effectuées pour le matériau de Tresca standard : chargement d'un coin aigu par exemple [6].

Un théorème classique permet alors d'affirmer que, dans chaque domaine où le champ de contraintes est continu, les lignes de discontinuité pour les vitesses ne peuvent être que les caractéristiques du problème pour les vitesses.

Soit (C) une ligne de discontinuité du champ de contraintes. D'après ce qui vient d'être dit, il ne peut y avoir discontinuité de la vitesse le long de (C) dans le domaine (1) (resp. (2)) que si (C) est une caractéristique pour les vitesses dans le domaine (1) (resp. (2)).

D'où :

1) *Dans le cas du matériau standard,* on sait que les caractéristiques des vitesses sont identiques aux caractéristiques des contraintes (§ 5.4) et il s'ensuit d'après le § 7.1 que (C) n'est pas caractéristique des vitesses.

Il ne saurait y avoir de discontinuité de la vitesse le long de (C) ni dans le domaine (1), ni dans le domaine (2).

2) *Dans le cas du matériau non standard,* nous adoptons une loi de comportement du type (28).

Le matériau ayant une courbe intrinsèque (convexe, ouverte dans la direction $\sigma > 0$) quelconque, nous supposons que, outre la condition

$$v(p, x, y) \leqslant \phi(p, x, y)$$

v est une fonction non croissante de p.

Dans ces conditions, en posant

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v(p_1, x, y) \\ v_2 &= v(p_2, x, y) \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

et

on peut situer θ_1 et θ_2 par rapport à ϕ_1, ϕ_2, v_1, v_2 comme l'indique le tableau (40) :

θ_1	$\frac{\pi}{2} > \theta_1 > \frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2} > \theta_1 > -\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2}$	$-\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_1}{2} > \theta_1 > -\frac{\pi}{2}$
	$\frac{\pi}{2} > \theta_1 > \frac{\pi}{4} - \frac{v_1}{2}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{v_1}{2} > \theta_1 > -\frac{\pi}{4} + \frac{v_1}{2}$	$-\frac{\pi}{4} + \frac{v_1}{2} > \theta_1 > -\frac{\pi}{2}$
	$\frac{\pi}{2} \searrow \frac{\pi}{4} - \frac{v}{2} \searrow \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$	$\searrow 0 \searrow$	$-\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \searrow -\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2} \searrow -\frac{\pi}{2}$
θ_2	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \nearrow \frac{\pi}{4} - \frac{v}{2} \nearrow \frac{\pi}{2}$	$\nearrow \frac{3\pi}{4} + \frac{v}{2} \nearrow \frac{3\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \longrightarrow$	π
	$0 < \theta_2 < \frac{\pi}{4} - \frac{v_2}{2}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{v_2}{2} < \theta_2 < \frac{3\pi}{4} + \frac{v_2}{2}$	$\frac{3\pi}{4} + \frac{v_2}{2} < \theta_2 < \pi$
	$0 < \theta_2 < \frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2} < \theta_2 < \frac{3\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2}$	$\frac{3\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} < \theta_2 < \pi$

D'après le § 6, les lignes caractéristiques pour les vitesses ne sont plus dans ce cas identiques aux caractéristiques pour les contraintes.

(C) sans être caractéristique pour les contraintes, peut être caractéristique pour les vitesses dans le domaine (1) ou dans le domaine (2). Cela se produit :

domaine (1) : si $|\theta_1| = \frac{\pi}{4} - \frac{v_1}{2}$ (41)

domaine (2) : si $\theta_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{v_2}{2}$ ou $\theta_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{v_2}{2}$ (42)

(40) montre que (41) et (42) ne peuvent être réalisées simultanément.

Ainsi dans le cas du matériau non standard du type indiqué, il peut y avoir discontinuité de la vitesse le long de (C) dans le domaine (1) (resp. (2)), si le long de (C) (41) (resp. (42)) est satisfaite.

(C) est alors une caractéristique des vitesses dans le domaine (1) (resp. (2)) et la discontinuité de vitesse est régie par les équations du § 5.6.

7.3.2. Discontinuité de la vitesse d'un domaine à l'autre à la traversée de (C).

Interprétant la ligne de discontinuité pour les contraintes comme au § 7.2, on cherche à voir si cette zone permet également une transition pour les vitesses correspondant à une discontinuité $[\vec{u}]$ de la vitesse du domaine (1) au domaine (2).

Cette transition ne peut avoir lieu que dans les parties plastiques de la zone, ce qui d'après les conclusions du § 7.2. nous ramène au problème précédent : c'est-à-dire qu'il s'agit d'une discontinuité de la vitesse le long de (C) dans le domaine (1) ou dans le domaine (2).

Il n'y a pas de discontinuité de la vitesse d'un domaine à l'autre à la traversée d'une ligne de discontinuité du champ de contraintes.

7.3.3. Inextensibilité de la ligne de discontinuité du champ de contraintes

On a : $[\vec{u}] = 0$.

La vitesse étant continue, ses dérivées tangentiellement à la ligne de discontinuité des contraintes sont également continues (relations d'Hadamard), soit :

$$[u_{x,y}] = 0$$
$$[u_{y,y}] = 0.$$

D'où pour le tenseur des vitesses de déformation :

$$[v_{yy}] = 0. \tag{43}$$

Conséquences :

Nous adoptons une loi de comportement du type (28).

On a, de part et d'autre de la ligne de discontinuité :

$$\left.\begin{aligned} v_{yy} = (v_1)\sin^2\theta + (v_2)\cos^2\theta = \lambda\,[\sin v(p, x, y) - \cos 2\theta] \\ \lambda \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

et (43) devient :

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\,[\sin v(p_1, x, y) - \cos 2\theta_1] = \lambda_2\,[\sin v(p_2, x, y) - \cos 2\theta_2] \\ \lambda_1 \geqslant 0, \qquad \lambda_2 \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Selon les valeurs de p_1 et p_2 (d'où θ_1 et θ_2 par (34)), il sera ou ne sera pas possible de trouver des valeurs de $\lambda > 0$ telles que (45) soit satisfaite ; si cela n'est pas possible la seule solution sera $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, d'où :

$$(\underline{v})_1 = (\underline{v})_2 = 0 \tag{46}$$

les tenseurs des vitesses de déformation sont nuls de part et d'autre de la ligne de discontinuité des contraintes, et celle-ci est inextensible.

Examinons d'abord le cas du matériau standard de courbe intrinsèque (convexe) quelconque ; on a pour chaque valeur de p :

$$v(p, x, y) = \phi(p, x, y).$$

Il sera possible de trouver des valeurs λ_1 et $\lambda_2 > 0$ si les solutions θ_1 et θ_2 de (34) correspondant à la discontinuité sont telles que :

$$\rho(\theta_1, \theta_2) = \frac{\cos 2\theta_1 - \sin\phi_1}{\cos 2\theta_2 - \sin\phi_2} > 0 \tag{47}$$

On voit immédiatement d'après (38) que l'on a toujours :

$$\rho(\theta_1, \theta_2) \leqslant 0.$$

Donc la seule solution de (46) est :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

d'où :

$$(\underline{v})_1 = (\underline{v})_2 .$$

Ainsi, pour le matériau standard de courbe intrinsèque (convexe) quelconque, la ligne de discontinuité de contraintes est inextensible ([1]).

(1) Ce résultat généralise celui de Geiringer [2].

Passons maintenant au cas du matériau non standard du type indiqué au § 7.3.1.

On doit étudier le signe du rapport :

$$\rho(\theta_1, \theta_2, v_1, v_2) = \frac{\cos 2\theta_1 - \sin v_1}{\cos 2\theta_2 - \sin v_2} \tag{48}$$

En se reportant au tableau (40), on voit que ρ n'est pas toujours négatif.

Ainsi, dans le cas du matériau non standard la condition (45) n'équivaut à l'inextensibilité de la ligne de discontinuité que pour certaines valeurs de θ_1 et θ_2 parmi les solutions de (34).

Pour le matériau de Coulomb (ϕ et v indépendants de p), on aura $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ si θ_1 et θ_2 solutions de (36) vérifient :

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqslant |\theta_1| &< \left(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2}\right) \\ \frac{\pi}{4} + \frac{v}{2} < \left|\frac{\pi}{2} - \theta_2\right| &\leqslant \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

RÉFÉRENCES

[1] D.J.F. Ewing et R. Hill (1967). — *The plastic constraint of V. notched tension bars.* J. Mech. Phys. Solids, *15*, 2, pp. 115-124.

[2] H. Geiringer (1953). — *Some recent results in the theory of an ideal plastic body.* Advances in Applied Mechanics, Ac. Press, New York.

[3] A.P. Green (1954). — *On the use of hodographs in problems of plane plastic strain,* J. Mech. Phys. Solids, *2*, 2, pp. 73-80.

[4] R. Hill (1950). — *The Mathematical theory of Plasticity*, p. 160, Clarendon Press, Oxford.

[5] A.I. Kuznetzov (1958). — *The problem of torsion and plane strain of non homogeneous plastic bodies.* Arch. Mech. Stos., 4, pp. 447-462.

[6] J. Najar, J. Rychlewski et G.S. Shapiro (1966). — *On the problems of the elastic-plastic state of an infinite wedge.* Bull. Ac. Pol. Sc., *14*, 9, pp. 515-522.

D. Berthet, J.C. Hayot et J. Salençon (1972). — *Poinçonnement d'un milieu semi-infini en matériau plastique de Tresca non-homogène.* Archives of Mechanics, vol. 24, n° 1, pp. 127-138.

A. Drescher (1972). — *Some remarks on plane flow of granular media.* Archives of Mechanics, vol. 24, n° 5-6, pp. 837-848.

A. Drescher (1971). — *A note on plane flow of granular media.* Problèmes de la Rhéologie, Symp. Franco-Polonais, Varsovie 1971, pp. 135-144.

G. Favretti (1965). — *Impronta di un punzone rigido su un materiale non omogeneo.* Ingegniaria Meccanica, vol. 14, n° 9, pp. 37-50.

R.G. JAMES et P.L. BRANSBY (1971). — *A velocity field for some passive earth pressure problems.* Géotechnique, vol. 21, n° 1, pp. 61-83.

A.W. JENIKE et R.T. SHIELD (1959). — *On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure.* Jl. Appl. Mech., Trans. ASME, vol. 27, pp. 599-602.

E.H. LEE (1950). — *On stress discontinuities in plane plastic flow* Proc. 3rd Symp. Appl. Math., McGraw Hill ed., pp. 213-228.

W. OLSZAK et J. RYCHLEWSKI (1962). — *Geometrical properties of stress fields in plastically non-homogeneous bodies under conditions of plane strain.* Proc. Int. Symp. 2nd ord. effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics, Haifa.

W. OLSZAK, J. RYCHLEWSKI et W. URBANOWSKI (1962). — *Plasticity under non homogeneous conditions.* Advances in applied mechanics, Ac. Press, N.Y., pp. 132-214.

J. OSTROWSKA (1968). — *Initial plastic flow of semi-space with a strong layer non homogeneity.* Arch. Mech. Stos., vol. 20, n° 6, pp. 651-668.

W. PRAGER (1955). — *The sign of plastic power in the graphical treatment of problems of plane plastic-flow.* Quart. Appl. Math., vol. 13, n° 3, pp. 333-335.

J. RYCHLEWSKI (1966). — *Plane plastic flow for jump non-homogenity.* Int. Jl. Non-Linear Mech., vol. 1, pp. 57-78.

J. SALENÇON, M. BARBIER et M. BEAUBAT (1973). — *Force portante d'une fondation sur sol non-homogène.* C.R. 8e Congr. Int. Meca. Sols, Moscou, vol. 1.3, pp. 219-224.

A.A. SERRANO (1972). — *El metodo de los campos associados.* C.R. 5e Congr. Europ. Mec. Sols, pp. 77-84.

R.T. SHIELD (1953). — *Mixed boundary value problems in soil mechanics.* Quart. Appl. Math., vol. 11, pp. 61-75.

A. WINZER et G.F. CARRIER (1948). — *The interaction of discontinuities surfaces in plastic fields of stress.* Jl. Appl. Mech. Trans. ASME, vol. 15, pp. 261-264.

A. WINZER et G.F. CARRIER (1949). — *Discontinuities of stress in plane plastic flow.* Jl. Appl. Mech., Trans. ASME, vol. 16, pp. 346-348.

B. PROBLÈMES D'ÉCOULEMENT PLASTIQUE LIBRE EN SYMÉTRIE AXIALE POUR LES MATÉRIAUX DONT LE CRITÈRE DE PLASTICITÉ EST DU TYPE « COURBE INTRINSÈQUE »

1 — Généralités

Cette annexe a pour but de donner, en harmonie de notations avec le reste du chapitre IV, des indications sur les problèmes de plasticité en symétrie axiale pour les matériaux obéissant à un critère de plasticité de type « courbe intrinsèque », en faisant l'hypothèse de Haar-Karman, comme cela est courant en mécanique des sols.

La rédaction ne reprendra donc pas les détails de raisonnements déjà faits dans le chapitre IV ou dans l'annexe précédente, de même que certains problèmes concernant les lignes de discontinuités seraient à étudier comme dans l'annexe sur les problèmes plans.

2 — Le problème pour les contraintes

2.1. Position du problème. Hypothèse de Haar-Karman

Soient r, ω, z les coordonnées cylindriques.

On considère les problèmes d'écoulement plastique libre pour lesquels la distribution des contraintes a les propriétés suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} 1)\ \text{symétrie axiale autour de } Oz : \underline{\sigma} \text{ indépendant de } \omega. \\ 2)\ \sigma_{r\omega} = \sigma_{z\omega} = 0 : \sigma_{\omega\omega} \text{ est contrainte principale.} \end{cases}$$

Le champ de contrainte σ devant satisfaire les conditions d'équilibre, cela nécessite en particulier que :

1) il n'y a pas de composante tangentielle de la force de masse

$$F_\omega = 0.$$

2) les conditions à la limite sont compatibles avec $\sigma_{r\omega} = \sigma_{z\omega} = 0$ ($T_\omega = 0$ sur les facettes normales à Oz et à Or).

3) les forces de masse et les conditions à la limite sont à symétrie de révolution autour de Oz :

$$F_r \text{ et } F_z \text{ indépendants de } \omega$$

données T_r et T_z sur un plan normal à Oz, indépendantes de ω (de même sur un cylindre d'axe Oz).

Cela étant, le champ de contraintes doit satisfaire les deux équations d'équilibre :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\omega}{r} + \rho F_r = 0 \\ &\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho F_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

2/

Le matériau, isotrope, est supposé avoir un critère de plasticité de type courbe intrinsèque. Il n'est pas nécessairement homogène mais il est nécessaire pour que (1) soit vraie, que le critère de plasticité soit indépendant de ω.

Avec les notations usuelles :

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 \tag{3}$$

$$p = -(\sigma_1 + \sigma_3)/2 \tag{4}$$

$$R = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 \tag{5}$$

le critère est de la forme :

$$R = R(p, r, z). \tag{6}$$

D'après (1), σ_ω est contrainte principale. On fait l'hypothèse de Haar-Karman [3] selon laquelle le *régime d'écoulement en zone plastique est un régime d'arête, σ_ω étant égale à l'une des contraintes principales dans le plan méridien* :

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_\omega = \sigma_2 \\ \text{et} \quad &(\sigma_2 = \sigma_1 \text{ ou } \sigma_2 = \sigma_3) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

L'intérêt de cette hypothèse est exposé dans [2, 4, 6].

Posant : $\theta = (Or, \sigma_1)$ il vient :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -p + R\cos 2\theta \\ \sigma_z &= -p - R\cos 2\theta \\ \sigma_{rz} &= R\sin 2\theta \\ \sigma_\omega &= -p - \varepsilon R \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\text{où} \quad \left.\begin{aligned} \varepsilon = -1 \quad &\text{correspond à} \quad \sigma_\omega = \sigma_1 \\ \varepsilon = +1 \quad & \qquad\qquad\quad \sigma_\omega = \sigma_3 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(*cf.* [1] avec des conventions de signes différentes).

Dans les zones plastiques, on a :

$$R = R(p, r, z) \tag{6}$$

et

$$\partial R/\partial p = \sin\phi(p, r, z) \tag{10}$$

d'où pour le champ de contraintes dans la zone plastique, le système d'équations aux dérivées partielles obtenu en portant (6, 8, 10) dans (2) :

$$-\frac{\partial p}{\partial r}(1 - \sin\phi\cos 2\theta) - 2R\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial r} + \sin\phi\sin 2\theta\frac{\partial p}{\partial z} + 2R\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial z}$$
$$+\frac{\partial R}{\partial r}\cos 2\theta + \frac{\partial R}{\partial z}\sin 2\theta + R\frac{\cos 2\theta + \varepsilon}{r} + \rho F_r = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}\sin\phi\sin 2\theta + 2R\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial z}(1 + \sin\phi\cos 2\theta) + 2R\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial z}$$
$$+\frac{\partial R}{\partial r}\sin 2\theta - \frac{\partial R}{\partial z}\cos 2\theta + R\frac{\sin 2\theta}{r} + \rho F_z = 0 \tag{12}$$

Le système (11, 12) est, aux notations près, identique à celui obtenu dans l'annexe sur les problèmes plans ; deux termes supplémentaires sont apparus, dus à la symétrie axiale, qui sont pris en compte comme des forces de masse.

Le système (11, 12) est hyperbolique quasi linéaire ; en chaque point du plan méridien passent deux lignes caractéristiques :

$$\mathrm{d}z/\mathrm{d}r = \mathrm{tg}\,[\theta \mp (\pi/4 + \phi/2)] \quad (\text{lignes } \alpha, \beta). \tag{13}$$

Les relations le long des caractéristiques sont :

$$\mathrm{d}p + \frac{2R}{\cos\phi}\,\mathrm{d}\theta - \left\{\rho F^\alpha + \frac{\partial R}{\partial x_\beta} - \frac{R}{r\cos\phi}\left[\sin\left(\theta - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \varepsilon\sin\left(\theta + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right)\right]\right\}\mathrm{d}x^\alpha = 0 \tag{14}$$

$$\mathrm{d}p - \frac{2R}{\cos\phi}\,\mathrm{d}\theta - \left\{\rho F^\beta + \frac{\partial R}{\partial x_\alpha} + \frac{R}{r\cos\phi}\left[\sin\left(\theta + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \varepsilon\sin\left(\theta - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right)\right]\right\}\mathrm{d}x^\beta = 0 \tag{15}$$

3 — Le problème pour les vitesses

On désigne par u_r, u_ω, u_z les composantes de la vitesse.

On rappelle les expressions (16) :

$$\begin{gathered} v_{rr} = \frac{\partial_u}{\partial r}, \quad v_{\omega\omega} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\omega}{\partial \omega} + \frac{u_r}{r}, \quad v_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ 2v_{\omega_z} = \frac{\partial u_\omega}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \omega}, \quad 2v_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, \\ 2v_{r\omega} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \omega} + \frac{\partial u_\omega}{\partial r} - \frac{u_\omega}{r} \end{gathered} \tag{16}$$

Le problème en contraintes étant résolu dans les zones plastiques on cherche à y résoudre le problème pour les vitesses.

3.1. Cas du matériau standard

On suppose que le matériau obéit au principe de travail maximal. $\underline{v}$ qui a mêmes directions principales que $\underline{\sigma}$ a pour valeurs principales :

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \left(\lambda + \frac{1+\varepsilon}{2}\mu\right)(1+\sin\phi) \\ v_3 &= -\left(\lambda + \frac{1-\varepsilon}{2}\mu\right)(1-\sin\phi) \\ v_{\omega\omega} &= -\varepsilon\mu(1-\varepsilon\sin\phi) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\lambda \geqslant 0, \qquad \mu \geqslant 0, \qquad \varepsilon = \pm 1. \tag{18}$$

3.1.1. Calcul de u_ω

$v_{\omega\omega}$ étant valeur principale, on a :

$$v_{r\omega} = v_{z\omega} = 0. \tag{19}$$

Si on fait l'hypothèse que le champ de vitesses est également à symétrie axiale (à condition que cette hypothèse soit compatible avec les conditions aux limites), (16) et (19) entraînent :

$$\frac{\partial u_\omega}{\partial z} = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial u_\omega}{\partial r} - \frac{u_\omega}{r} = 0 \tag{21}$$

d'où u_ω de la forme $$u_\omega = \alpha r \tag{22}$$
représentant une rotation d'ensemble autour de Oz.

3.1.2. Dans le plan méridien

On considère la base normée tangente en chaque point aux lignes α et β. On obtient à partir de (17) :

$$v_{\alpha\alpha} = \varepsilon \frac{\mu}{2} \cos^2 \phi \tag{23}$$

$$v_{\beta\beta} = \varepsilon \frac{\mu}{2} \cos^2 \phi \tag{24}$$

$$v_{\alpha\beta} = \left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right) \cos^2 \phi \tag{25}$$

Tirant μ de $(17)_3$ et compte tenu de l'expression de $v_{\omega\omega}$ dans (16) il vient :

$$\boxed{v_{\alpha\alpha} = -\frac{u_r}{2r}(1+\varepsilon \sin \phi)} \tag{26}$$

$$\boxed{v_{\beta\beta} = -\frac{u_r}{2r}(1+\varepsilon \sin \phi)} \tag{27}$$

qui montrent que les lignes α et β sont caractéristiques pour les vitesses : (26) est une relation différentielle valable le long des lignes α (resp. 27, β). Ces relations peuvent aussi s'expliciter en fonction de u_r et u_z, à partir des formules classiques exprimant $v_{\alpha\alpha}$ et $v_{\beta\beta}$ en fonction de v_{rr}, v_{rz}, v_{zz} et de (16). (26) et (27) sont les relations le long des caractéristiques pour les vitesses.

3.1.3. Conditions de positivité

Comme indiqué en (18), λ et μ doivent être non négatifs.

Cela implique d'après (25) :

$$v_{\alpha\beta} \geqslant 0$$

mais cette condition n'est pas suffisante.

D'après $(17)_3$ et (22) :

$$\mu \geqslant 0 \Longleftrightarrow \boxed{\varepsilon \frac{u_r}{r} \leqslant 0} \tag{28}$$

alors :

$$\lambda \geqslant 0 \Longleftrightarrow \left(\lambda + \frac{\mu}{2}\right) \cos^2 \phi \geqslant \frac{\mu}{2} \cos^2 \phi$$

soit d'après (25) :

$$v_{\alpha\beta} \geqslant \frac{\mu}{2} \cos^2 \phi$$

ou encore :

$$\boxed{2v_{\alpha\beta} \geqslant -\varepsilon \frac{u_r}{r} (1 + \varepsilon \sin \phi)} \tag{29}$$

(28) et (29) sont les conditions de positivité.

3.2. Cas des matériaux non standards

Dans le cas des matériaux non standards, nous étudions les matériaux admettant un potentiel plastique g du type courbe intrinsèque (comme à l'annexe sur les problèmes plans), et on suppose encore que ce potentiel plastique est indépendant de ω. v est l'angle de dilatation, fonction de l'état de contraintes et du point

$$0 \leqslant v(p, r, z) \leqslant \phi(p, r, z).$$

Alors le tenseur des vitesses de déformation a mêmes directions principales que σ et ses valeurs principales sont :

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \left(\lambda + \frac{1+\varepsilon}{2}\mu\right)(1 + \sin v) \\ v_3 &= -\left(\lambda + \frac{1-\varepsilon}{2}\mu\right)(1 - \sin v) \\ v_{\omega\omega} &= -\varepsilon\mu(1 - \varepsilon \sin v) \\ \lambda &\geqslant 0, \quad \mu \geqslant 0, \quad \varepsilon = \pm 1 \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

D'où avec l'hypothèse que le champ de vitesses est à symétrie axiale :

$$u_\omega = \alpha r.$$

Le problème dans le plan méridien est hyperbolique linéaire, en chaque point les directions caractéristiques sont γ et δ :

$$\left.\begin{matrix} (0_r, \ \gamma) \\ (0_r, \ \delta) \end{matrix}\right\} = \theta \mp \left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right) \tag{31}$$

Les relations le long des caractéristiques des vitesses sont (26, 27) où l'on remplace (α, β, ϕ) par (γ, δ, ν); de même pour les conditions de positivité (28, 29).

4 — Solutions faibles

4.1. Solutions faibles en contraintes

Les propriétés des solutions faibles en contraintes sont analogues à celles mises en évidence pour les problèmes plans.

Les lignes de discontinuité (1) ne sont pas les caractéristiques.

La condition de saut exprime la continuité de la contrainte.

$\sigma_{\omega\omega}$ est discontinue.

4.2. Solutions faibles en vitesses

Les lignes de discontinuité de la vitesse sont des caractéristiques des vitesses, α, β dans le cas du matériau standard, γ, δ dans le cas du matériau non standard du § 3.2.

L'écriture en termes de distributions de (26, 27, 18, 29) conduit à :

1) au franchissement d'une ligne α (resp. β; γ, δ)

$$v_\beta \text{ est continue (resp. } \alpha\,;\ \delta,\ \gamma)$$

la discontinuité ne porte que sur v_α (26, 27);

2) au franchissement d'une ligne α (resp. β; γ, δ) on a : $[v_\alpha] \geqslant 0$ (resp. β; γ, δ) (29), et $[v_\alpha]$ doit être telle que (28) soit vérifiée de part et d'autre;

3) l'équation de propagation est également légèrement modifiée par rapport au cas plan et devient :

$$D_\alpha[v_\alpha] = -\frac{1}{2r}\,[v_\alpha]\cos\left[\theta - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right](1+\varepsilon\sin\phi) \tag{32}$$

puisque : $$[u_r] = [u_\alpha]\cos\left[\theta - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right]$$

(équation analogue le long d'une ligne β; resp. γ, δ).

(1) Ce sont les traces dans le plan méridien des surfaces de discontinuité du champ de contraintes de révolution.

RÉFÉRENCES

[1] B.G. BEREZANCEW (1952). — *Problème de l'équilibre limite d'un milieu pulvérulent en symétrie axiale.* Ed. litt. tech. theor., Moscou.

[2] A.D. COX, G. EASON, H.G. HOPKINS (1961). — *Axially symmetric plastic deformations in soils.* Phil. trans. Roy. Soc. London, A, 1036, *254*, pp. 1-45.

[3] A. HAAR et Th. KARMAN (1909). — *Zur theorie der Spannungszustände in plastischen und sandartigen Medien*-Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl., pp. 204-218.

[4] J. MANDEL et F. PARSY (1961). — *Quelques problèmes tridimensionnels de la théorie du corps parfaitement plastique.* Sém. Plast. Ec. Polytechnique, P.S.T., n° 116, pp. 105-127.

[5] R. NÈGRE (1968). — *Contribution à l'étude de l'équilibre limite des sols et des matériaux pulvérulents et cohérents.* Thèse Doct. ès-Sc., Grenoble.

[6] R.T. SHIELD (1955). — *On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry.* Proc. Roy. Soc., 233, A, 1183, pp. 267-287.

J.F. ADIE et J.M. ALEXANDER (1967). — *A graphical method of obtaining hodographs for upper bound solutions to axisymmetric problems.* Int. Jl. Mech. Sc., vol. 9, n° 6, p. 349.

G. EASON et R.T. SHIELD (1960). — *The plastic indentation of a semi-infinite solid by a perfectly rough circular punch.* Z.A.M.P., vol. 11, pp. 33-43.

Z. MROZ (1967). — *Graphical solution of axially symmetric problems of plastic flow.* Z.A.M.P., vol. 18, pp. 219-236.

R.T. SHIELD (1955). — *Plastic flow in a converging conical channel.* Jl. Mech. Phys. Solids, vol. 3, pp. 246-258.

R. SIBILLE (1944). — *Calcul approché des solutions de Prandtl dans les cas de révolution.* C.R. Ac. Sc. Paris, t. 258, gr.2, pp. 2017-2019.

A.J.M. SPENCER (1964). — *The approximate solution of certain problems of axially symmetric plastic flow.* Jl. Mech. Phys. Solids, vol. 12, n° 4, pp. 231-243.

W. SZCZEPINSKI, L. DIETRICH, E. DRESCHER, J. MIATOWSKI (1966). — *Plastic flow of axially symmetric notched bars pulled in tensions.* Int. Jl. Solids and Structures, vol. 2, pp. 543-554.

CHAPITRE V

THÉORIE DES CHARGES LIMITES (POUR LES APPLICATIONS A LA MÉCANIQUE DES SOLS)

1 — Rappel

Ce chapitre est consacré à l'étude de la théorie des charges limites pour les applications à la Mécanique des sols. On n'y mentionnera donc pas (sauf exceptionnellement dans un but didactique), les problèmes liés à l'application de cette théorie au calcul des structures de la résistance des matériaux ; pour ces questions on pourra se reporter par exemple à [3, 13, 4].

La présentation choisie est une présentation classique simplifiée (semblable à celle de [12]). On trouvera en annexe une présentation un peu plus axiomatique et plus fouillée, ainsi que les extensions possibles de la théorie au cas des matériaux non standards [14, 15].

La notion de charge limite d'un système a été introduite aux chapitres II et III. Nous rappelons l'essentiel de ce qui a été dit à ce sujet et en particulier les hypothèses fondamentales.

1.1. Chargement dépendant d'un paramètre

On considère un système élastique parfaitement plastique, auquel on impose des forces extérieures F.

Supposons par exemple que ces forces croissent proportionnellement à un facteur unique :

$$F = \lambda f.$$

Alors :

pour $\lambda \leqslant \lambda_0$: les déformations sont purement élastiques ;

pour $\lambda_0 \leqslant \lambda < \lambda_1$: il y a dans le système, des déformations plastiques contenues par les déformations des zones restées élastiques ;

pour $\lambda = \lambda_1$: l'écoulement plastique non contenu devient possible, les zones plastiques s'étant suffisamment étendues (zone plastique qui débouche sur la surface libre, par exemple).

Si, au long du processus de chargement, les déformations restent petites jusqu'à l'apparition de l'écoulement libre, les changements de géométrie sont négligeables, et λ_1 ainsi définie est la charge limite du système.

Cette hypothèse est essentielle, elle porte à la fois sur le système, le type de chargement qui lui est imposé, et les propriétés du matériau qui le constitue. On démontre alors (*cf.* § 1.3) que l'on peut calculer la charge limite en supposant le système composé d'un matériau rigide parfaitement plastique.

C'est la définition que nous adopterons pour la charge limite d'un système : charge d'apparition de l'écoulement libre dans le système en matériau rigide parfaitement plastique.

Il est bien entendu que les conditions dans lesquelles cette charge a une signification réelle pour le système étudié devront toujours être examinées (*cf.* en particulier chapitre II, § 5).

1.2. Chargement dépendant de plusieurs paramètres

Comme on l'a dit au chapitre II (§ 3.2), on définit le domaine d'élasticité initial du système, limité par la frontière d'élasticité initiale : celle-ci est le lieu des point Q_0, correspondant pour chaque trajet de charge à partir de l'état naturel, à l'apparition de zones plastiques dans le système. Cette circonstance est indépendante du trajet suivi pour atteindre Q_0 en ce sens que : si l'on suit de 0 à Q_0 un autre trajet de charge tel que avant Q_0 la limite d'écoulement ne soit atteinte en aucun point du corps, alors, en arrivant en Q_0, la limite d'écoulement sera atteinte dans le corps, en un ou plusieurs points, les mêmes qu'après avoir suivi le premier trajet de charge (puisque la solution à l'issue d'un trajet de charge « élastique » issu de O, ne dépend que du chargement extrémité du trajet). Le lieu des points Q_0 est donc une surface et non une couronne ; si la fonction de charge est convexe et si l'élasticité est linéaire, cette surface est convexe.

Si on poursuit le chargement au-delà de cette frontière, il y a évolution de la frontière d'élasticité actuelle du système. Suivant un certain trajet on obtient l'écoulement libre en un point de charge Q_1. La question que l'on se pose alors est de savoir si cette circonstance est indépendante du trajet suivi de 0 à Q_1 ; c'est-à-dire : si on suit un autre trajet de charge

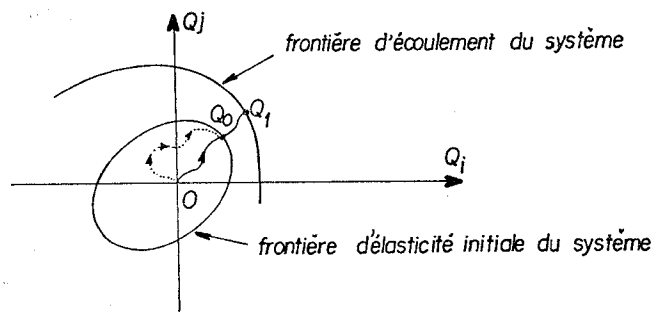

FIG. V.1.

de 0 à Q_1, sans que l'écoulement libre n'apparaisse avant Q_1, est-ce que lorsque l'on aboutit en Q_1 l'écoulement libre se produit nécessairement ? On montrera que cette proposition est exacte pour les matériaux satisfaisant le principe du travail maximal.

Le lieu des points Q_1 de charge limite est la *frontière d'écoulement du système.*

1.3. Passage au matériau rigide plastique

Considérons : un système (Σ_1) constitué d'un matériau élasto-parfaitement plastique (M_1) dont les coefficients d'élasticité sont

$$\lambda^1_{ij,\,hk}(M)$$

Le même système (Σ_2) constitué d'un matériau élasto-parfaitement plastique (M_2) dont les coefficients d'élasticité sont

$$\lambda^2_{ijhk}(M) = \lambda^1_{ijhk}(M)/\rho \qquad (\rho > 0)$$

de même critère de plasticité et même loi de comportement plastique que le matériau (M_1).

On suit pour (Σ_1) une histoire de chargement (H_1) dans laquelle on donne à chaque instant [1] :

les valeurs des forces masse F^1,

les valeurs des données au contour : $(T_i^d)^1$ sur S_{T_i}

$(u_i^d)^1$ sur S_{u_i}.

On suit pour (Σ_2) l'histoire de chargement (H_2) dans laquelle au même instant t les données sont :

$$F^2 = F^1$$
$$(T_i^d)^2 = (T_i^d)^1 \quad \text{sur } S_{T_i}$$
$$(u_i^d)^2 = (u_i^d)^1/\rho \quad \text{sur } S_{u_i}.$$

Alors, si les changements de géométrie sont négligeables pour (Σ_2) en suivant (H_1), et pour (Σ_2) en suivant (H_2), il est clair qu'à chaque instant t :

les champs de contraintes sont identiques dans (Σ_1) et (Σ_2) :

$$\sigma^1 = \sigma^2,$$

les champs de vitesses sont u^1 et u^2 :

$$u^2 = u^1/\rho$$

(en particulier dans les zones plastifiées, les valeurs du paramètre $\lambda > 0$ arbitraire de la loi de comportement sont λ^1 et λ^2 : $\lambda^2 = \lambda^1/\rho$).

Les zones plastifiées sont à chaque instant les mêmes dans (Σ_1) et (Σ_2). Les deux systèmes atteindront donc l'écoulement libre au même instant, c'est-à-dire pour le même chargement limite.

Faisant tendre ρ vers l'infini, on aboutit au matériau rigide plastique.

1.4. Détermination des chargements limites. Approche variationnelle

La détermination de la charge limite (dans le cas d'un chargement proportionnel à un paramètre) ou de la frontière d'écoulement du système (dans le cas de plusieurs paramètres), nécessite la construction de solutions complètes du problème d'écoulement libre pour le système rigide parfaitement plastique. Cela est souvent difficile.

---

(1) *Rappel :* Le temps n'est qu'un paramètre cinématique.

Aussi on utilise une approche variationnelle.

On va démontrer deux théorèmes qui permettent d'obtenir des approximations par défaut et par excès.

2 — Champs licites. Puissance dissipée

Le système est supposé soumis à un chargement dépendant de n paramètres Q_i, les conditions à la limite étant composées de conditions dynamiques (forces de masse et contraintes) et de conditions cinématiques (i.e. sur les vitesses) (*cf.* chapitre III, § 5.2) ([1]).

2.1. Tenseur des contraintes plastiquement admissible

En un point M du système où la fonction de charge est f, un tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$ est dit plastiquement admissible (P.A.) si :

$$f(\underline{\sigma}) \leqslant 0. \tag{1}$$

2.2. Tenseur des vitesses de déformations plastiquement admissible

En un point M du système où la fonction de charge est f, et où la loi de comportement plastique a la forme (L) — qui n'est pas nécessairement celle du matériau standard — un tenseur des vitesses de déformation $\underline{v}$ est dit plastiquement admissible (P.A.) si la loi de comportement (L) est inversible pour ce tenseur ; c'est-à-dire si :

$$\exists\, \underline{\sigma} : \; f(\underline{\sigma}) = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\sigma} \xrightarrow{(L)} \underline{v}. \tag{2}$$

REMARQUE : Cette inversion n'est pas toujours possible et, quand elle est possible, elle n'est pas toujours unique.

L'exemple du matériau de Misès standard illustre bien ce résultat : pour que l'inversion soit possible il faut que le tenseur $\underline{v}$ donné, vérifie $tr(\underline{v}) = 0$, car la déformation plastique s'effectue sans variation de volume ; si $tr(\underline{v}) = 0$, l'inversion est indéterminée : seul le déviateur $\underline{s}$ de $\underline{\sigma}$ est déterminé.

Dans le cas du critère de Tresca, l'indétermination peut être encore plus large.

---

(1) Dans cette formulation, il n'y a pas de données constantes autres que nulles. Si certaines données sont constantes non nulles on les traitera comme si elles étaient variables et on les fixera enfin à leur valeur prescrite.

2.3. Puissance dissipée

Etant donné un tenseur des vitesses de déformation $\underline{v}$, plastiquement admissible, soit $\underline{\sigma}$ un tenseur contrainte associé à $\underline{v}$ par (2).

On forme l'expression :

$$\sigma_{ij} v_{ij} = \underline{\sigma}\,\underline{v}. \tag{3}$$

Alors : dans l'hypothèse du principe du travail maximal (équivalente à : f convexe et matériau standard), l'expression (3) ne dépend que de $\underline{v}$, elle est indépendante du tenseur $\underline{\sigma}$ associé par (2) à $\underline{v}$, et on notera :

$$\underline{\sigma}\,\underline{v} = \pi(\underline{v}) \tag{4}$$

puissance dissipée pour ce tenseur des vitesses de déformation.

Démonstration :

Soient $\underline{\sigma}^1$ et $\underline{\sigma}^2$ deux tenseurs contraintes associés à $\underline{v}$ par (2) où f est convexe et (L) est la loi du matériau standard.

On a donc :

$$\left.\begin{array}{lll} \underline{\sigma}^1 : f(\underline{\sigma}^1) = 0 & \underline{v} \in \lambda \partial f(\underline{\sigma}^1) & \lambda > 0 \\ \underline{\sigma}^2 : f(\underline{\sigma}^2) = 0 & \underline{v} \in \lambda \partial f(\underline{\sigma}^2) & \lambda > 0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

d'où :

$$\underline{v}(\underline{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^2) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \underline{v}(\underline{\sigma}^2 - \underline{\sigma}^1) \geqslant 0$$

il s'ensuit :

$$\underline{\sigma}^1 \underline{v} = \underline{\sigma}^2 \underline{v} = \pi(\underline{v}) \text{ fonction univoque de } \underline{v}.$$

Dans le cas du matériau de Misès :

$$\pi(\underline{v}) = k\sqrt{2 v_{ij} v_{ij}}. \tag{6}$$

Dans le cas du matériau de Tresca, dont la loi de comportement est :

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_1 - \sigma_3 = 2k & \\ \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 & \\ v_1 = \dot{\lambda} & \\ v_2 = 0 & \dot{\lambda} \geqslant 0 \\ v_3 = -\dot{\lambda} & \end{array}\right\} \quad (7a) \qquad \left.\begin{array}{ll} \sigma_1 - \sigma_3 = 2k & \\ \sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3 & \\ v_1 = \dot{\lambda} & \dot{\lambda} \geqslant 0 \\ v_2 = \dot{\mu} & \dot{\mu} \geqslant 0 \\ v_3 = -\dot{\lambda} - \dot{\mu} & \end{array}\right\} \quad (7b)$$

Régime de face — Régime d'arête

$$\pi(\underline{v}) = 2k\,|v_M| \tag{8}$$

où v_M désigne la vitesse de déformation principale maximale en valeur absolue.

2.4. Champ de contraintes licite (1)

On dit qu'un champ de contraintes est licite s'il est statiquement et plastiquement admissible (S.P.A.).

S.A. : le champ de contraintes doit satisfaire les équations d'équilibre et les conditions à la limite sur les contraintes (conditions dynamiques du problème).

P.A. : en tout point du système le tenseur des contraintes doit être plastiquement admissible.

2.5. Champ de vitesse de déformation licite (1)

On dit qu'un champ de vitesses de déformation est licite s'il est cinématiquement et plastiquement admissible (C.P.A.).

C.A. : le champ de vitesses de déformation considéré v doit dériver d'un champ de vitesses u (2)

$$\exists\, u : \qquad v_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{9}$$

et ce champ de vitesses doit satisfaire les conditions cinématiques du problème.

P.A. : en chaque point du système, le tenseur des vitesses de déformation doit être plastiquement admissible.

2.6. Puissance dissipée dans un champ de vitesses de déformations licite

Dans l'hypothèse du principe du travail maximal, on définit la puissance dissipée dans un champ de vitesses de déformation licite par l'intégrale :

$$\int_V \pi(\underline{v})\, \mathrm{d}V \tag{10}$$

c'est une fonction univoque du champ v.

---

(1) Terminologie due à Mandel [12].

(2) Dans toute la suite nous utiliserons les conventions suivantes : $\underline{\sigma}$, $\underline{v}$: tenseurs ; σ, v : champs de tenseurs $\underline{\sigma}$, $\underline{v}$.

3 — Méthode statique

3.1. Chargements licites

Un chargement Q auquel on peut faire correspondre au moins un champ de contraintes licite est appelé chargement licite.

Nous désignons par K l'ensemble :

$$K = (Q | Q \text{ licite}) \tag{11}$$

$K \subset R^n$

(Remarquons que si l'on considère les trajets de charge du § 1.2 pour la structure élasto-plastique dans l'hypothèse des petites déformations, tous les chargements de 0 à Q_1 inclusivement sont des chargements licites).

En particulier Q_1, chargement limite, est un chargement licite.

$$Q_1 \in K$$

Nous allons maintenant étudier les propriétés de K.

3.2. Convexité de K

THÉORÈME : Si f est convexe, K est convexe.

La démonstration est immédiate : soient Q_1, Q_2 deux chargements de K, et σ_1, σ_2 deux champs de contraintes licites qui leur soient associés.

Soit $Q = \lambda Q_1 + (1-\lambda) Q_2 \qquad \lambda \in [0, 1]$

D'après la définition des paramètres de chargement (chap. III § 5.2), le champ de contrainte σ

$$\sigma = \lambda \sigma_1 + (1-\lambda)\sigma_2$$

est S.A. associé à Q.

D'autre part, d'après la convexité de f, on a en tout point :

$$f(\underline{\sigma}) = f(\lambda \underline{\sigma}_1 + (1-\lambda)\underline{\sigma}_2) \leqslant 0 \tag{12}$$

puisque : $f(\underline{\sigma}_1)$ et $f(\underline{\sigma}_2) \leqslant 0$.

3.3. Points à l'infini de K

THÉORÈME : Pour les matériaux dont la surface de charge est convexe et « ouverte » dans la seule direction des pressions isotropes (*cf.* chap. I

§ 2.7), et si les forces de masse appliquées au système sont nulles, alors K n'a pas de point à l'infini sauf au plus dans une direction.

Démonstration :

Remarquons que, d'après la définition des paramètres de chargement (chap. III § 5.2) et puisque $\sigma = 0$ est plastiquement admissible car le matériau est sans écrouissage, le chargement $Q = 0 \in K$.

Supposons que K ait des points à l'infini et soit (L) la direction d'un de ces points. Puisque $0 \in K$, et d'après la convexité de K, toute la demi-droite $0L \in K$.

Soit Q^* fixé $\in 0L$.

Dire que $0L \in K$ jusqu'à l'infini implique que parmi tous les champs de contraintes licites σ^* associés à Q^* il en est un (au moins) qui reste licite si on le multiplie par λ positif aussi grand soit-il. Ce champ est donc nécessairement une pression isotrope en tout point du solide.

En l'absence de forces de masse, cette pression est constante. Ainsi, Q^* ne peut être qu'un chargement qui correspond à une pression isotrope uniforme dans le solide. S'il existe (1), c'est un chargement proportionnel à un paramètre, ce qui démontre le résultat annoncé (2).

Pour les matériaux ductiles pour lesquels la surface de charge est ouverte dans les sens des pressions et des tractions isotropes, K peut avoir un point à l'infini dans deux directions opposées.

3.4. Chargements limites

Par définition un chargement limite Q est un chargement pour lequel il y a une solution au problème d'écoulement libre du système.

Il existe donc un champ de contraintes licite σ associé à Q ;

et un champ de vitesses de déformation licite v auquel correspond le vecteur vitesse de déformation du système $\dot{q}$, $v \neq 0$ et donc $\dot{q} \neq 0$.

les champs σ et v sont associés par la loi de comportement.

---

(1) Il peut se faire que le processus de chargement étudié n'admette jamais le champ de pression uniforme dans le solide comme statiquement admissible.

(2) Le résultat se conserve dans le cas de forces de masse constantes non nulles. Pour des forces de masse variables en fonction de m paramètres, les directions des points à l'infini si ils existent sont intérieures à la pyramide construite sur les m demi-axes positifs correspondants.

3.5. Théorème du travail maximal

On fait l'hypothèse que le matériau constitutif du système obéit au principe du travail maximal.

Alors :

THÉORÈME : Soit Q un chargement limite, $\dot{q}$ la vitesse de déformation du système correspondante ; soit Q^* un chargement licite, on a :

$$(Q-Q^*)\dot{q} \geqslant 0 \tag{13}$$

En effet σ et v étant les champs licites associés à Q et $\dot{q}$, et σ^* désignant un champ licite associé à Q^* on a par définition :

$$(Q-Q^*)\,\dot{q} = \int_V (\underline{\sigma}-\underline{\sigma}^*)\,\underline{v}\,\mathrm{d}V$$

qui est positif d'après l'hypothèse du principe du travail maximal.

3.6. Conséquences

THÉORÈME : Dans l'hypothèse du principe du travail maximal tout chargement limite appartient à la frontière de K.

En effet, soit Q un point de charge limite et $\dot{q}$ le vecteur vitesse correspondant. On sait que $Q \in K$.

Supposons que Q soit à l'intérieur de K.

Alors $\exists\, \eta > 0$, tel que $B(Q, \eta) \subset K$ (B = boule de centre Q et de rayon η) on pourrait alors trouver dans B donc dans K, un point Q^* tel que $(Q-Q^*)\dot{q} < 0$, ce qui est absurde.

Donc Q *appartient à la frontière de* K.

De plus le théorème du travail maximal montre que : au point de charge limite Q, $\dot{q}$ *est dirigé suivant une normale extérieure à cette frontière* qui est une surface convexe d'après le § 3.2.

3.7. Réciproque du théorème précédent

Dans l'hypothèse du principe du travail maximal, soit Q un point de la frontière K, surface convexe. Comme on l'a vu au § 3.3, $0 \in K$. On considère le processus de chargement proportionnel (rayon issu de 0) défini

par la direction $0Q$. Pour ce processus, il existe un point de charge limite (1). Ce point doit se trouver sur la frontière d'après le théorème du § 3.6, donc c'est Q par suite de la convexité.

Ainsi, tout chargement appartenant à la frontière de K est un chargement limite.

3.8. Conclusions. Théorème de Gvozdev

Dans l'hypothèse du principe du travail maximal, la frontière du convexe K ensemble des chargements licites, est la frontière d'écoulement du système. C'est une *surface* (variété à $(n-1)$ dimensions) *convexe.*

Ce résultat peut être qualifié de « théorème d'unicité des chargements limites ».

Ainsi, il apparaît que la frontière d'écoulement peut être définie indépendamment de tout trajet de charge (donc en particulier indépendamment de l'état de contraintes initiales du système). La propriété annoncée au § 2.1 est donc bien démontrée (2).

On peut aussi énoncer le théorème suivant, base de l'approximation « par défaut » de la charge limite :

Théorème de Gvozdev :

Un chargement pour lequel on peut trouver un champ de contraintes licite est en deçà de ou sur la frontière d'écoulement (3).

Dans le cas du chargement proportionnel, $\lambda = 0$ étant licite, l'énoncé devient :

toute valeur de λ telle que l'on puisse lui associer un champ de contraintes licite est inférieure ou égale à la charge limite : $\lambda \leqslant \lambda_1$.

λ_1 est la plus grande valeur de λ telle que l'on puisse lui associer un champ de contraintes licites.

---

(1) Nous faisons là une hypothèse d'existence qui peut être considérée comme un fait d'expérience évident. En effet, si l'on revient à l'expérience de chargement proportionnel du système élasto-plastique dans l'hypothèse des petites déformations :

— ou bien il est possible de poursuivre le chargement indéfiniment et cela implique que l'ensemble K a un point à l'infini dans cette direction,

— ou bien il n'est pas possible de poursuivre le chargement indéfiniment et nous admettrons comme un fait d'expérience que cela se produit toujours par suite de l'apparition de l'écoulement plastique libre.

(2) Remarquons ici que lorsque l'on fixe certaines données dynamiques à leurs valeurs prescrites, on obtient pour les paramètres de chargement restants une frontière d'écoulement qui est l'intersection de la frontière K avec un hyperplan à $(n-p)$ dimensions de R^n, si p est le nombre de paramètres de chargement fixés. D'où les propriétés de cette frontière d'écoulement.

(3) En fait, ce théorème est beaucoup plus général que celui donné par Gvozdev [7] qui ne concernait que le calcul des structures en s'appuyant sur le modèle dû à Kazinczy [10] et Kist [11] (*cf.* [19]). Le présent énoncé général rattaché au principe du travail maximal semble dû à Hill [8], sous la forme d'un principe de maximum.

4 — Méthode cinématique

4.1. Théorème

Dans l'hypothèse du principe du travail maximal, étant donné un champ de vitesses de déformation licite v auquel correspond $\dot{q}$, vitesse de déformation licite du système, soit Q^* un chargement licite du système, alors :

La puissance de Q^* dans $\dot{q}$ ne peut dépasser la puissance totale dissipée à l'intérieur du système dans le champ de vitesses v.

Soit en effet σ^* un champ de contraintes licite associé à Q^*, on a par définition :

$$Q^*\dot{q} = \int_V \underline{\sigma}^* \underline{v} \, \mathrm{d}V. \tag{14}$$

Or, en chaque point du système, désignons par $\underline{\sigma}$ un tenseur contrainte résultant de l'inversion de la loi de comportement pour $\underline{v}$ on a :

$$\underline{\sigma}^* \underline{v} \leqslant \underline{\sigma} \underline{v} = \pi(\underline{v}) \tag{15}$$

d'après le principe du travail maximal.

D'où le résultat annoncé :

$$Q^*\dot{q} \leqslant \int_V \pi(\underline{v}) \, \mathrm{d}V. \tag{16}$$

4.2. Définition duale de K

Considérant tous les champs de vitesses de déformations licites nous désignons par K_1 le convexe de l'espace $\{Q\}$ intersection des demi-espaces définis par :

$$Q\dot{q}(v) \leqslant \int_V \pi(\underline{v}) \, \mathrm{d}V. \tag{17}$$

D'après le § 4.1 on a $K \subset K_1$.

Soit alors $Q^* \notin K$; soit Q le point de la frontière de K (convexe) situé que $0Q^*$: c'est un chargement limite d'après le § 3.7, auquel correspond un champ de vitesses de déformation licite v et la vitesse de déformation licite du système $\dot{q}(v)$ ($\neq 0$).

D'après la convexité de K on a :

$$Q^*\dot{q}(v) > Q\dot{q}(v) = \int_V \pi(\underline{v}) \, \mathrm{d}V$$

donc : $Q^* \notin K_1$.

On en déduit que $K = K_1$ et la frontière d'écoulement est l'enveloppe générale des plans :

$$Q\dot{q}(v) = \int_V \pi(v)\,\mathrm{d}V \tag{18}$$

correspondant à tous les champs de vitesses licites.

Si on connaît un champ de vitesses de déformation licite v pour le système, l'égalité

$$Q\dot{q}(v) = \int_V \pi(v)\,\mathrm{d}V \tag{18}$$

définit un plan qui est entièrement extérieur, ou tangent à la frontière d'écoulement du système.

Pour un plan qui est tangent à la surface limite, le point de contact est un point de charge limite, correspondant à la vitesse de déformation $\dot{q}$ intervenant dans (18).

Dans le cas du chargement proportionnel :

la valeur de λ obtenue en égalant dans un champ de vitesses licite, la puissance des forces extérieures à la puissance dissipée est supérieure ou égale à la charge limite :

$$\lambda = \frac{\int_V \pi(v)\,\mathrm{d}V}{f \cdot u} \geqslant \lambda_1$$

λ_1 est la plus petite valeur de λ telle que la puissance des forces extérieures égale la puissance dissipée dans au moins un champ de vitesses licite.

5 — Remarques sur les résultats de la théorie des charges limites

5.1.

Du point de vue de la logique pure on peut remarquer que, sans faire appel à l'hypothèse d'existence, les résultats du § 3.6 prouvent que la frontière d'écoulement est tout ou partie de la frontière de K : C'est le fondement de la méthode statique ; de plus cela démontre, outre l'indépendance des chargements limites vis-à-vis du trajet de charge (donc des contraintes initiales), *l'indépendance des chargements limites du système élastoplastique vis-à-vis des caractéristiques élastiques* (1).

(1) En effet au § 1.3 on a montré qu'il était possible pour un système élastoplastique donné et une histoire de chargement donnée aboutissant à un chargement Q_1 d'écoulement libre commençant, de définir par passage à la limite sur les propriétés élastiques un système rigide-plastique dont Q_1 est chargement limite. « L'unicité » des chargements limites pour le système rigide-plastique, défini par ses seules propriétés plastiques, montre alors que les chargements limites du système élastoplastique sont indépendants des propriétés élastiques.

De même les résultats du § 4.1 contiennent le fondement de la méthode cinématique.

Il paraît toutefois souhaitable de faire intervenir l'hypothèse d'existence pour aboutir à des énoncés plus simples et plus « naturels ».

5.2.

Les résultats de la théorie des charges limites peuvent de façon abrupte s'exprimer sous la forme suivante qui est souvent utile :

1° si un chargement est tel que l'on peut trouver un champ de contraintes licite qui l'équilibre, alors la structure résistera à ce chargement ;

2° si on connaît un mécanisme de déformation licite et un chargement suffisant pour produire la ruine selon ce mécanisme, (puissance des forces motrices supérieure ou égale à la puissance des forces résistantes), alors la structure ne résistera pas à ce chargement.

Ces résultats peuvent paraître intuitifs mais nous avons vu que leur démonstration suppose que le principe du travail maximal est vérifié ([1]).

5.3.

Dans le cas où le principe du travail maximal n'est pas vérifié,

soit du fait des matériaux constitutifs de la structure étudiée,

soit du fait des conditions aux interfaces entre les différents solides constitutifs (condition de frottement de Coulomb par exemple),

on ne peut plus démontrer que la frontière d'écoulement est une variété à $(n-1)$ dimensions.

Nous donnons en annexe les théorèmes dus à Radenkovic [14, 15] concernant le premier de ces deux cas, d'autres théorèmes ont été étudiés par Drucker [5] (*cf.* aussi [16]), Collins [2], dans le second, qui fournissent des indications permettant d'encadrer la frontière d'écoulement.

6 — Principes de minimum

Faisant l'hypothèse du principe du travail maximal, nous donnons les principes de minimum classiques, valables dans le cas où les conditions à la limite admettent la décomposition classique :

(1) Le principe doit aussi être vérifié aux interfaces entre les solides constituant la structure.

T donné $= T^d$ sur S_T
F donné
u donné $= u^d$ sur S_u

6.1. Principe de minimum pour les contraintes (Hill)

Soit σ un champ de contraintes licite.

On introduit la fonctionnelle :

$$\mathcal{H}(\sigma) = -\int_{S_u} T(\sigma)\cdot u^d \, \mathrm{d}S_u . \tag{19}$$

Alors :

si une solution du problème d'écoulement libre existe pour ces données, le champ de contraintes de cette solution rend minimale la fonctionnelle $\mathcal{H}$ parmi tous les champs de contraintes licites.

6.2. Principe de minimum pour les vitesses de déformation (Markov)

v étant un champ de vitesses de déformation licite qui dérive du champ de vitesses u, on définit la fonctionnelle :

$$\mathcal{B}(v) = \int_V [\pi(v) - \rho F\cdot u] \, \mathrm{d}V - \int_{S_T} T^d\cdot u \, \mathrm{d}S_T . \tag{20}$$

Alors :

si une solution du problème d'écoulement libre existe pour ces données, le champ de vitesses de déformation de cette solution rend minimale la fonctionnelle $\mathcal{B}$ parmi tout les champs de vitesses de déformation licites.

Les démonstrations de ces deux principes sont aisées ; elles s'appuient sur le théorème des puissances virtuelles et le principe du travail maximal.

On démontre également que pour une solution du problème d'écoulement libre on a :

$$\mathcal{B}(v) = -\mathcal{H}(\sigma) \tag{21}$$

7 — La théorie des charges limites dans l'étude des problèmes d'écoulement libre en déformation plane

Dans l'étude que nous avons faite des problèmes d'écoulement libre en déformation plane, nous avons laissé de côté la question de dégager la signification exacte des solutions obtenues. En particulier le fait que nous

n'avons qu'exceptionnellement porté notre attention sur les zones non-déformées est important.

Il est maintenant possible d'éclairer ces points, dans l'hypothèse du principe du travail maximal, au moyen de la théorie des charges limites. Le théorème d'unicité démontré au chapitre III (§ 6) permet de tirer quelques conclusions supplémentaires.

7.1. Etude d'un exemple

Revenons sur l'exemple de la butée d'une paroi sur un massif en matériau de Tresca, étudié au chapitre IV.

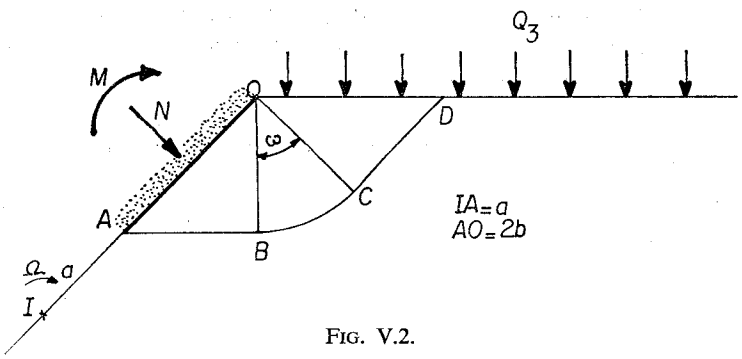

FIG. V.2.

Les paramètres de chargement sont ici : les éléments de réduction en un point fixe (le milieu de la paroi par exemple), des forces extérieures agissant sur la paroi rigide,

$Q_1 = M$ (moment)

$Q_2 = N$ (force normale ; la force tangentielle est nulle car la paroi est lisse).

et un paramètre, qui est en fait maintenu constant, est la valeur de la surcharge sur OY (fig. 2) : Q_3.

Pour ce problème nous avons obtenu :

— dans tout le solide un champ de vitesses de déformation qui est licite : $v \neq 0$ au-dessus de $ABCD$, $u = 0$ au-dessous, discontinuité de vitesse le long de $ABCD$;

— au-dessus de $ABCD$, un champ de contraintes licite (à la limite d'écoulement en tout point) σ : en chaque point de la zone déformée $\underline{\sigma}$ et $\underline{v}$ sont associés par la loi de comportement.

Que pouvons-nous dire d'une telle « solution » ?

1° Elle n'est pas complète car la question de la détermination des contraintes au-dessous de $ABCD$ n'a pas été abordée.

2° Elle fournit un champ de vitesses de déformations licite pour le système : il est donc possible d'utiliser la méthode cinématique.

Le calcul de l'intégrale de la puissance dissipée se trouve simplifié par la connaissance du champ licite σ qui est associé à v dans la zone déformée : la puissance de σ dans $\underline{v}$ est égale à la puissance dissipée $\pi(\underline{v})$.

Par application du théorème des puissances virtuelles ([1]), on montre alors que l'intégrale de la puissance dissipée (y compris celle le long de la ligne de discontinuité de vitesses) est égale à la puissance dans ce mode de déformation de la pression Q_3 et des contraintes sous la paroi rigide correspondant à σ.

Appliquant alors (18) on obtient l'équation du plan tangent ou extérieur à la frontière d'écoulement correspondant, qui apparaît comme une majoration du moment par rapport à I des forces appliquées à la plaque.

3° On peut montrer [17] que si la valeur de la surcharge Q_3 n'est pas trop grande, il est possible de trouver un prolongement licite du champ de contraintes dans la zone située au-dessous de $ABCD$.

Dans ces conditions, on peut appliquer la méthode statique puisque l'on possède un champ de contraintes licite, σ prolongé : le chargement correspondant est licite et son point représentatif n'est pas extérieur à la frontière d'écoulement.

Regroupant les deux résultats précédents, on voit que :

— dans tous les cas on a obtenu un majorant du moment par rapport à I des forces appliquées à OA :

$$M_I = M+N(a+b) \leqslant 2b[Q_3+2k(1+\omega)](a+b) \tag{22}$$

— si Q_3 n'est pas trop grand on a obtenu un chargement limite correspondant à la rotation de la plaque autour de I :

$$\left.\begin{aligned} M &= 0 \\ N &= 2b[Q_3+2k(1+\omega)] \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Dans le cas où $\omega = \pi/2$, et $Q_3 = 0$ on a le problème du poinçonnement d'un demi-plan non chargé.

---

(1) Cette application est possible à l'ensemble de la structure bien que l'on ne connaisse pas le champ de contraintes dans la zone non déformée car pour celle-ci qui se déplace sans se déformer, l'équilibre des forces au contour est satisfait.

Le prolongement du champ des contraintes a été effectué de trois façons différentes (Bishop [1], Shield [21], Sayir et Ziegler [20]). La force limite de poinçonnement est donc bien :

$$F = 2b \times (\pi + 2)k. \tag{24}$$

Dans le cas où Q_3 n'est pas trop grand, et où il est possible de prolonger le champ de contraintes, nous avons une solution de problème d'écoulement libre. On peut alors appliquer le théorème d'unicité pour le champ de contraintes donné au chapitre III (§ 6).

On en déduit que le champ de contraintes dans la zone déformée est l'unique champ possible correspondant :

à la valeur de Q donnée, i.e. (23),

ou : à la valeur de $\dot{q}$ donnée, i.e.

$$\dot{q}_1 = \Omega$$
$$\dot{q}_2 = \Omega(a+b)$$
$$[(\dot{q}_3 = 2b\ \dot{q}_2 = 2b\Omega(a+b)].$$

C'est d'ailleurs évidemment sous cette dernière forme que le résultat a le plus d'intérêt pratique :

cela veut dire que la distribution des contraintes $\underline{\sigma}$ dans $OABCD$ et en particulier sous AB est la distribution exacte :

ainsi la distribution exacte des contraintes sous AB est une pression uniforme égale à $[Q_3 + 2k(1+\omega)]$.

7.2. Cas général

D'une façon générale pour les problèmes de déformation plane, toujours dans l'hypothèse du principe du travail maximal :

a) Si la solution proposée fournit uniquement un champ de contraintes, à la limite d'écoulement, dans une zone du système, on ne peut rien dire du résultat obtenu.

b) Si la solution proposée fournit un champ de contraintes, à la limite d'écoulement, dans une partie D du système tel que l'équilibre statique des forces au contour du reste du système soit assuré ; et un champ de vitesses licite associé au champ de contraintes dans D et laissant indéformé l'extérieur de D, alors la solution est dite *incomplète* [1]. Elle correspond à l'application de la méthode cinématique comme sur l'exemple.

Le résultat est un majorant de la charge limite dans le cas où il y a un seul paramètre de chargement, ou plus généralement un hyperplan extérieur à la frontière d'écoulement.

c) Si la solution fournit un champ de contraintes à la limite d'écoulement dans une zone plastique, et un prolongement licite de ce champ de contraintes à l'extérieur de cette zone, on a une solution *statique* permettant l'application de la méthode statique.

Le résultat obtenu est un minorant de la charge limite, ou plus généralement un chargement licite c'est-à-dire représenté par un point intérieur à la frontière d'écoulement.

d) Enfin si la solution proposée correspond à la fois à *b* et *c*, la solution est *complète* et fournit la charge limite, ou plus généralement un chargement limite et un mécanisme de déformation associé.

En fait seules les solutions complètes méritent le nom de solutions du problème d'écoulement libre. Pourtant la terminologie ci-dessus, due à Bishop, a l'avantage d'être très explicite.

Pour les solutions complètes le théorème d'unicité du champ de contraintes est applicable et montre que : la répartition de contraintes trouvée dans les zones déformées est la répartition exacte correspondant au problème posé.

Cela, il faut le remarquer, n'entraîne pas l'unicité des solutions complètes. En particulier on peut très bien, pour une même solution incomplète, trouver plusieurs prolongements statiques permettant de la compléter.

Il faut remarquer que la construction du prolongement licite, du champ de contraintes d'une solution incomplète n'est pas intéressante par elle-même. Ce qui importe, c'est sa possibilité. Autrement dit il suffirait de disposer d'un théorème permettant d'affirmer que ce prolongement est possible. A priori, cela devrait être aisé puisque l'on dispose d'une grande liberté pour les champs de contraintes du prolongement qui ne sont astreints qu'à vérifier les équations d'équilibre et les conditions aux limites et à ne pas violer le critère. En fait on ne dispose pas du théorème en question et la seule façon de montrer la possibilité du prolongement licite est bien souvent d'en construire un. A noter qu'on dispose de théorèmes permettant parfois de montrer que le prolongement n'est certainement pas possible : théorème de Hill [9] et théorème de Bonneau (voir annexe).

Des recherches ont été récemment consacrées à ces problèmes et un certain nombre de solutions complètes ont été mises en évidence (*cf.* [16]), sans qu'il existe de méthode générale pour les construire.

Enfin, il est évident mais il convient peut-être de le signaler, qu'il n'y a pas unicité des solutions incomplètes. Celles-ci peuvent donner des résultats différents et *b*) indique qu'il faut alors prendre en considération celle qui donne le meilleur majorant de la charge limite (c'est-à-dire le plus faible), sans pour cela penser que cette valeur est effectivement celle de la charge limite, ni que la solution peut nécessairement être complétée.

Les solutions incomplètes constituent la majorité des « solutions » proposées pour les problèmes d'écoulement plan du matériau de Tresca.

7.3. Conclusions

On voit que la théorie des charges limites apparaît comme un fil directeur dans la recherche de « solutions » aux problèmes d'écoulement libre (en particulier plan) pour le matériau rigide-plastique.

C'est aussi le seul moyen de choisir entre plusieurs « solutions », lorsque ce ne sont pas des solutions complètes c'est-à-dire des solutions du problème d'écoulement libre.

Le mode de construction des « solutions », qui pouvait au départ sembler grandement laissé à l'intuition, la distinction faite au chapitre III (§ 4) entre zones de type *a* et de type *b* se comprennent maintenant :

On cherche généralement à construire une solution incomplète, en imaginant au départ la localisation de la zone déformable, c'est-à-dire de type *a*, correspondante ; seul l'équilibre global de chaque zone de type *b* doit alors être assuré. Une telle « solution » s'interprète parfaitement par la théorie des charges limites comme nous l'avons dit plus haut.

On peut ensuite essayer de compléter cette solution par un prolongement licite du champ de contraintes dans les zones de type *b*.

A noter qu'il existe certains problèmes pour lesquels on procède à la construction de « solutions » purement statiques ou purement *cinématiques*. On en verra un exemple au § 8. Ce dernier type de solutions qui n'a pas été présenté au § 7.2, fait parfois appel à la théorie des équilibres limites plans :

il s'agit de « solutions » fournissant simplement un mécanisme de déformation licite et qu'on interprète au moyen des théorèmes du § 4.2.

8 — Interprétation des solutions dans le cas du matériau de Coulomb

Nous avons dit que les sols obéissant au critère de Coulomb, ne satisfont pas le principe du travail maximal. La théorie des charges limites sous sa forme classique et précise ne leur est donc pas applicable, ainsi que les conséquences que nous avons tirées au § 7 sur les différents types de solutions pour les problèmes de déformation plane et leur signification.

8.1.

Dans la majorité des cas, les solutions proposées sont analogues à celle du § 22 au chapitre IV, donnant un champ de contraintes à la limite d'écoulement, dans une partie de la structure étudiée.

Elles ressortissent au type *a*) du § précédent et on ne peut rien dire du résultat ainsi obtenu.

La position que l'on peut adopter pour l'interprétation des solutions dans le cas du matériau de Coulomb (non standard) est la suivante ([1]) : on se réfère aux solutions correspondantes pour les mêmes problèmes dans le cas du matériau de Tresca standard.

Pour celles-ci l'interprétation peut s'appuyer sur la théorie des charges limites ; on fait l'hypothèse que l'interprétation pour le matériau de Coulomb est analogue sans préciser la loi de comportement. C'est ce que nous avions déjà indiqué pour la construction des solutions.

Il convient de considérer les résultats ainsi obtenus, non comme exacts, mais comme fournissant des renseignements dont l'expérience a montré qu'ils étaient souvent utiles.

8.2.

Il est peut être possible d'être plus précis en faisant intervenir la loi de comportement.

C'est ainsi que si la loi de comportement du sol est d'un type permettant l'emploi des théorèmes de Radenkovic [14, 15] donnés en annexe, ce qui correspond à une classe relativement large, on peut encadrer les charges limites possibles ([2]) pour le matériau (l'unicité n'est pas démontrée) entre celles de deux matériaux standards : l'une, borne inférieure correspondant au potentiel plastique (g) du matériau, l'autre, borne supérieure, correspondant à la fonction de charge (f) du matériau. Pour celles-ci, l'application des théorèmes des § 3.8 et 4.2 est possible :

— si une solution statique est connue pour le matériau standard (g), elle fournit une approximation par défaut de toute charge limite du système en matériau non standard,

— une solution cinématique, ou une solution incomplète, pour le

(1) A vrai dire, la règle observée par les auteurs en ce domaine est en général celle du silence !

(2) Pour simplifier le langage, nous considérons les processus de chargement proportionnel.

matériau standard (f), fournissent des approximations par excès de toute charge limite pour le matériau non standard ([1]).

Ces théorèmes sont en particulier applicables pour la loi de comportement indiquée au chapitre I - § 8 : matériau d'angle de frottement interne ϕ et d'angle de dilatation ν ($0 \leqslant \nu \leqslant \phi$) [14].

Ainsi, étudiant par exemple le problème traité à l'annexe A du chapitre IV, § 6 :

on sait que la valeur de $p_{\max}$ trouvée correspond à une solution incomplète pour le matériau standard (f) (voir Drescher, 1973) ; $p_{\max}$ est donc une approximation par excès de toute charge limite possible pour le matériau non standard ;

s'il est possible de trouver un prolongement licite du champ de contraintes ([2]), on a une solution complète du problème d'écoulement libre pour le matériau standard (f) et $p_{\max}$ est la plus grande charge limite possible pour le matériau non standard ;

pour $\nu = 0$ on sait (Drescher, 1973) qu'il n'est pas possible de trouver un champ de vitesse associé par la loi de comportement du matériau non standard vérifiant $\lambda \geqslant 0$. Si cela était possible pour d'autres valeurs de ν ($0 < \nu < \phi$) on dirait que l'on a affaire à une solution possible pour le matériau non standard correspondant car, l'unicité n'étant pas assurée, il n'est pas certain qu'il existe un trajet de charge au bout duquel cette solution soit atteinte.

Dans certains problèmes, les champs de vitesses de déformations de la solution incomplète existent $\forall\, \nu (0 \leqslant \nu \leqslant \phi)$. Si le prolongement licite existe, on voit que la charge est une charge limite possible $\forall\, \nu (0 \leqslant \nu \leqslant \varphi)$, c'est d'ailleurs la plus grande. On pourra dire dans ce cas que le problème est statiquement déterminé.

---

(1) Ce résultat est valable quelle que soit la loi de comportement du sol non standard.

(2) Dans le cas de l'exemple de l'annexe du chapitre IV (§ 6), un tel prolongement a été mis en évidence [18, 21].

9 — Autres applications de la théorie des charges limites en mécanique des sols

L'utilisation de la théorie des charges limites en mécanique des sols, n'est pas liée exclusivement aux problèmes d'équilibres limites plans tels qu'ils sont traités au Chapitre IV.

Les théorèmes des méthodes statique et cinématique correspondent à des raisonnements très fréquents dans la pratique des ingénieurs.

9.1. Exemple

C'est le problème de la détermination de la hauteur limite d'un talus vertical en milieu de Tresca pesant.

a) *Utilisation de la méthode statique.*

L'énoncé de la méthode statique se met ici sous la forme :

une hauteur h telle que l'on puisse trouver un champ de contraintes licite dans tout le massif est inférieure ou égale à la hauteur limite h_1.

Un champ de contraintes licite doit ici satisfaire :

— les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \gamma = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

— la condition « plastiquement admissible ».

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leqslant 2k$$

— les conditions aux limites sur les contraintes :

$$\begin{cases} x = 0 \quad y > 0 : \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \\ x = h \quad y < 0 : \sigma_x = \tau_{xy} = 0 \\ 0 < x < h \quad y = 0 : \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

(Les conditions à l'infini portent sur les vitesses qui doivent être nulles).

On considère le champ de contraintes discontinu représenté sur la figure 3 (*cf.* [6]) :

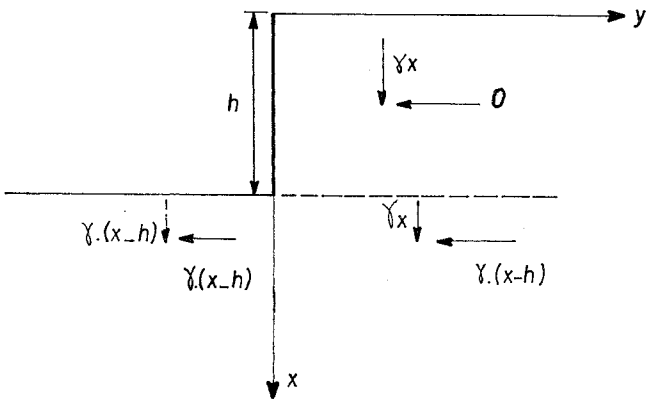

FIG. V.3.

c'est-à-dire :

$$\begin{array}{lll} y \geqslant 0 \quad 0 \leqslant x \leqslant h & : \sigma_y = 0, & \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_x = -\gamma x \\ y \geqslant 0 \quad h \leqslant x & : \sigma_y = -\gamma(x-h), & \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_x = -\gamma x \\ y \leqslant 0 \quad h \leqslant x & : \sigma_y = -\gamma(x-h), & \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_x = -\gamma(x-h). \end{array}$$

Ce champ satisfait les équations d'équilibre, les conditions à la limite, et la continuité de la contrainte appliquée sur $y = 0$ qui est la ligne de discontinuité du champ. Il est donc statiquement admissible.

Il est de plus, plastiquement admissible si :

$$\gamma h \leqslant 2k.$$

Donc :

$$h = \frac{2k}{\gamma} \leqslant h_1 .$$

b) *Utilisation de la méthode cinématique*

L'énoncé de la méthode cinématique s'applique ici sous la forme :

Une hauteur telle qu'il existe un mode de déformation licite dans lequel la puissance des forces extérieures (pesanteur) égale la puissance dissipée, est supérieure ou égale à la hauteur limite du talus.

Un champ de vitesses licite doit, ici, être tel que :

— la déformation s'effectue sans variation de volume,

— les conditions aux limites sur les vitesses soient satisfaites :

$$u_x = u_y = 0 \text{ à l'infini.}$$

Considérons le mécanisme représenté à la figure 4, dans lequel il y a glissement en bloc le long d'une ligne de glissement isolée, nécessairement circulaire, de centre O et de rayon h.

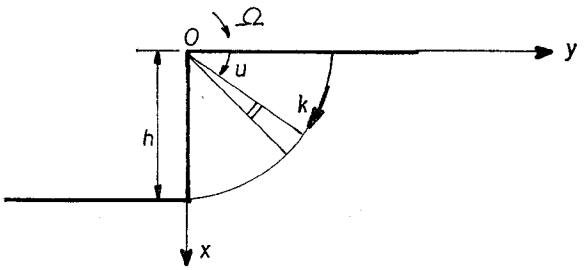

FIG. V.4.

Cela constitue bien un mode de déformation licite.

La puissance dissipée est celle de la cission k le long de l'arc de cercle (frottement) :

$$\text{puissance dissipée} = k \times \Omega h \times \frac{\pi}{2} h.$$

La puissance des forces extérieures est celle des forces de pesanteur dans le bloc en mouvement :

$$\text{puissance des forces extérieures} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}u \int_0^h \gamma \Omega r \cdot (\cos u) \cdot r \, \mathrm{d}r = \gamma \Omega \, h^3/3.$$

D'où en égalant :

$$h = \frac{3\pi}{2} \frac{k}{\gamma} \# 4{,}7 \frac{k}{\gamma} \text{ est un majorant de la hauteur limite } h_1.$$

Un autre type de mécanismes utilisable est celui représenté à la figure 5, dans lequel il y a glissement à la vitesse U le long d'une ligne isolée rectiligne passant par le pied de talus.

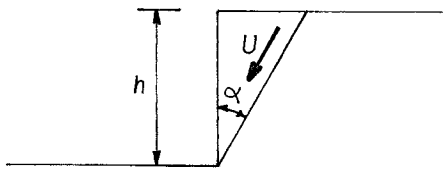

FIG. V.5.

La puissance dissipée est :

$$\text{puissance dissipée} = k \times h/\cos\alpha \times U$$

et la puissance des forces extérieures est :

$$\text{puissance des forces extérieures} = \frac{1}{2} h^2 \operatorname{tg} \alpha \times \gamma \times U \cos \alpha$$

d'où en égalant :

$h = \dfrac{4k}{\gamma} \times \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$ est un majorant de la hauteur limite.

On peut alors optimiser ce mécanisme, c'est-à-dire chercher la valeur de α qui fournit le majorant le plus faible. On trouve :

$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ et $h = \dfrac{4k}{\gamma}$ est un majorant de la hauteur limite meilleur que le précédent.

D'une façon générale en cherchant le meilleur mécanisme avec une ligne de glissement isolée, on ramène le majorant à :

$$3{,}85 \frac{k}{\gamma}$$

D'où :

$$\boxed{2 \frac{k}{\gamma} \leqslant h_1 \leqslant 3{,}85 \frac{k}{\gamma}}$$

La valeur exacte n'est pas connue ([1]).

9.2. Prisme de Coulomb, Méthode de Fellenius

La méthode cinématique avec ligne de glissement rectiligne isolée employée ci-dessus dans le cas du matériau de Tresca, n'est autre que la méthode dite du prisme de Coulomb. Celle utilisant, de façon plus générale, les cercles de glissement est la méthode des cercles de Fellenius.

Elles sont employées en mécanique des sols aussi dans le cas des matériaux de Coulomb. Dans ce cas, l'absence d'une théorie précise des charges limites sur laquelle on puisse s'appuyer explique les divers errements dans les applications pratiques. Il semble pourtant que, si leurs conditions d'application sont satisfaites — ce qui sera souvent le cas —, les théorèmes de Radenkovic devraient aider à clarifier la situation.

On remarque d'abord comme dans [6], en s'appuyant sur les résultats de l'annexe du chapitre IV relatifs aux matériaux de Coulomb standards, que pour ceux-ci les seuls modes de déformation licites avec ligne de discontinuité de vitesse isolée, sont ceux où cette ligne est une droite ou une

(1) HEYMAN (1973) a démontré par la construction d'un champ σ licite que $h_1 \geqslant 2\sqrt{2}\, k/\gamma$. PALMER (communication privée) a de même démontré que $h_1 \geqslant 3\, k/\gamma$.

spirale logarithmique inclinée à $\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$ sur le rayon vecteur issu du centre de rotation du bloc rigide ; la discontinuité de vitesse n'est pas tangente à la ligne de discontinuité — (on doit imaginer que celle-ci est une ligne de transition dans laquelle se produit une variation de volume : dilatance).

Cela étant, lorsque la sécurité est recherchée, on obtiendra les meilleurs résultats en utilisant ces méthodes cinématiques avec le matériau standard (*g*) ; le caractère cinématique exclut toutefois dans ce cas toute certitude. Lorsqu'au contraire c'est la rupture qui est recherchée, on considère le matériau standard (*f*), le résultat étant alors certain et valable quelle que soit la loi de comportement du sol.

RÉFÉRENCES — CHAPITRE V

[1] J.F.W. Bishop (1953). — *On the complete solution to problem of deformations of a plastic rigid material.* J. Mech. Sol. *2*, pp. 43-53.

[2] I.F. Collins (1969). — *The upper bound theorem for rigid-plastic solids...* J. Mech. Phys. Sol. *17*, pp. 323-338.

[3] J. Courbon (1971). — *Plasticité appliquée au calcul des structures.* Cours E.N.P.C.

[4] M. Croc, G. Michel et J. Salençon (1971). — *Application de la programmation mathématique au calcul à la rupture des structures.* Int. J. Sol. Struct., *7*, pp. 1317-1332.

[5] D.C. Drucker (1954). — *Coulomb friction, plasticity and limit loads.* J. Appl. Mech. *21*, pp. 71-74.

[6] D.C. Drucker et W. Prager (1952). — *Soil Mechanics and plastic analysis or limit design.* Quart. Appl. Math. *10*, pp. 157-165.

[7] A.A. Gvozdev (1936). — *La détermination de la charge de ruine pour les systèmes hyperstatiques subissant des déformations plastiques.* C.R. conf. sur les déf. plast. Ac. Nauk U.R.S.S., p. 19. *Cf.* trad. par R.M. Haythornthwaite *in* Int. J. Mech. Sc. *1*, (1960), p. 322.

[8] R. Hill (1948). — *A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity.* Quart. J. Mech. Appl. Math. *1*, 18.

[9] R. Hill (1954). — *On the limit set by plastic yielding...* J. Mech. Sol., *2*, 4, pp. 278-285.

[10] G. De Kazinczy (1914). — *Expériences sur les poutres encastrées.* Betonszemle, *2*, p. 68.

[11] N.C. Kist (1917). — *Dissertation inaugurale.* — Ec. Polyt. Delft.

[12] J. Mandel (1966). — *Mécanique des milieux continus.* Tome 2. Ann. 20. Gauthier-Villars, Paris.

[13] Ch. Massonet et M. Save (1970). — *Calcul plastique des constructions* (vol. 1 et 2). 2e édition. Ed. CBLIA, Bruxelles.

[14] D. Radenkovic (1961). — *Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb.* C.R. Ac. Sc. Paris, *252*, pp. 4103-4104.

[15] D. Radenkovic (1962). — *Théorie des charges limites*, in *Séminaire de Plasticité* édité par J. Mandel. P.S.T., Min. Air n° 116, pp. 129-142.

[16] J. SALENÇON (1969). — *La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane.* Thèse Dr. Sc. Paris.

[17] J. SALENÇON (1972). — *Butée d'une paroi lisse sur un massif plastique : solutions statiques.* Jl. Mécanique, vol. 11, n° 1, pp. 135-146.

[18] J. SALENÇON (1973). — *Prolongement des champs de Prandtl dans le cas du matériau de Coulomb.* Archives of Mechanics, vol. 25, n° 4, pp. 643-648.

[19] M. SAVE et Ch. MASSONNET (1971). — *L'influence de la plasticité et de la viscosité sur la résistance et la déformation des constructions.* Rapp. Int. Congr. A.I.P.C.

[20] M. SAYIR et M. ZIEGLER (1968). — *Zum Prandtlschen Stampelproblem.* Ingenieur Archiv., *36*, 5, pp. 294-302.

[21] R.T. SHIELD (1954). — *Plastic potential theory and Prandtl bearing capacity solution.* Jl. Appl. Mech., trans. ASME, vol. 21, pp. 193-194.

J.M. ALEXANDER (1961). — *On complete solutions for frictionless extrusion in plane strain.* Quart. Appl. Math., vol. 19, n° 1, pp. 31-37.

E. ANDERHEGGEN H. KNÖPFEL (1972). — *Finite element limit analysis using linear programming.* Int. Jl. Solids & Structures, vol. 8, pp. 1413-1431.

S.J. BUTTON (1953). — *The bearing capacity of footings on a two layer cohesive subsoil.* C.R. 3e Congr. Int. Mec. Sols, Zürich, vol. 1, pp. 332-335.

L. DIETRICH et W. SZCZEPINSKI (1969). — *A note on complete solutions for the plastic bending of notched bars.* Jl. Mech. Phys. Solids, vol. 17, n° 3, pp. 171-176.

A. DRESCHER (1972). — *Some remarks on plane flow of granular media.* Archives of Mechanics, vol. 24, n° 5-6, pp. 837-848.

A. DRESCHER (1973). — *A note on plane flow of granular media.* Problèmes de la Rhéologie, Symp. Franco-Polonais, Varsovie 1971, pp. 135-144.

D.C. DRUCKER et R.T. SHIELD (1953). — *The application of limit analysis to punch-indentation problems.* Jl. Appl. Mech., Trans. ASME, pp. 453-460.

Y. d'ESCATHA et J. MANDEL (1971). — *Profondeur critique d'éboulement d'un souterrain.* C.R. Ac. Sc. Paris, A, *273*, pp. 470-473.

M. FRÉMOND et J. SALENÇON (1973). — *Limit analysis by finite element methods.* Symp. on the Role of Plasticity in Soil Mech. Cambridge (G.B.) sept. 1973, à paraître.

J.P. GIROUD et TRAN VO NHIEM (1971). — *Force portante d'une fondation sur une pente.* Ann. I.T.B.T.P. n° 283-284, pp. 130-180.

J. HEYMAN (1973). — *The stability of a vertical cut.* Int. Jl. Mech. Sc., vol. 15, pp. 845-854.

P.G. HODGE (1970). — *Limit analysis with multiple load parameters.* Int. Jl. Solids & Structures, vol. 6, pp. 661-675.

J. MANDEL (1969). — *Cours de Science des Matériaux.* Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

J. MANDEL et J. SALENÇON (1972). — *Force portante d'un sol sur une assise rigide (étude théorique).* Géotechnique vol. 22, n° 1, pp. 79-93.

J. SALENÇON (1972). — *Un exemple de non validité de la théorie classique des charges limites pour un système non-standard.* C.R. Int. Symp. on Foundations of Plasticity, Varsovie 1972, à paraître Nth. Holland Pub. Cy.

J. SALENÇON (1973). — *Charge limite d'un système non standard.* Séminaire « Plasticité et Viscoplasticité 1972 », Ec. Polytechnique, à paraître in Sciences et Techniques de l'armement.

W. SZCZEPINSKI (1966). — *Indentation of a plastic block by two opposite narrow punches.* Bul. Ac. Pol. Sc., série Sc. Tech., vol. 14, n° 11-12, pp. 671-676.

ANNEXES AU CHAPITRE V

A. Autre présentation de la théorie des charges limites Extension à certains matériaux non standards

B. Le théorème de Bonneau

A. AUTRE PRÉSENTATION DE LA THÉORIE DES CHARGES LIMITES EXTENSION A CERTAINS MATÉRIAUX NON STANDARDS

1 — Introduction

Le but de cette présentation n'est pas de faire une « théorie des charges limites moderne », mais d'essayer de mieux mettre en évidence les propriétés mathématiques sur lesquelles repose cette théorie.

2 — Cas du matériau standard

2.1. Théorème 1

Soit f une fonction de charge convexe.

On suppose que la surface $f(\underline{\sigma}) = 0$ est éventuellement « ouverte » dans diverses directions qui sont nécessairement, par suite de la convexité de f, toutes les directions d'un cône convexe.

Alors :

L'ensemble $G' = \{\underline{v} | \underline{v} \in \lambda \partial f(\underline{\sigma}),\ \lambda \geqslant 0,\ f(\underline{\sigma}) = 0,\ |\underline{\sigma}| < \infty\}$ est un cône convexe de sommet O de R^6.

Ce cône est le complémentaire du cône des directions dans lesquelles la surface $f(\underline{\sigma}) = 0$ est ouverte.

Aspect mécanique :

Si on considère le matériau standard de fonction de charge f, G' est le cône convexe des tenseurs des vitesses de déformation plastiquement admissibles.

Dans les cas usuels :

si la surface de charge est « ouverte » dans la seule direction des pressions isotropes, G' est un demi-espace ;

si la surface de charge est « ouverte » dans les directions des pressions et des tractions isotropes, elle est néccessairement cylindrique, et G' est un plan.

2.2. Théorème 2. Puissance dissipée

Dans toute la suite, f est une fonction de charge convexe, et on suppose, $f(\underline{0}) \leqslant 0$.

On considère la forme bilinéaire :

$$F(\underline{\sigma}, \underline{v}) = \underline{\sigma} \cdot \underline{v} \text{ (1)} \tag{2}$$

où $\underline{v}$ est un tenseur des vitesses de déformation,

$\underline{\sigma}$ un tenseur des contraintes.

On désigne par G l'ensemble, convexe par définition :

$$G = \{\underline{\sigma} \mid f(\underline{\sigma}) \leqslant 0\} \tag{3}$$

et on cherche :

$$\operatorname*{Sup}_{\underline{\sigma} \in G} F(\underline{\sigma}, \underline{v}) \tag{4}$$

Alors :

1) Si $\underline{v} \in G'$, $F(\underline{\sigma}, \underline{v})$ a un maximum fini atteint pour :

$$\underline{\sigma} : f(\underline{\sigma}) = 0 \qquad v \in \lambda \partial f(\underline{\sigma}) \qquad \lambda > 0. \tag{5}$$

On désignera par $\pi(\underline{v})$ la valeur de ce maximum :

$$\pi(\underline{v}) = \operatorname*{Sup}_{\sigma \in G} F(\underline{\sigma}, \underline{v})$$

puisque $\underline{\sigma} = \underline{0} \in G$, on aura nécessairement :

$$\pi(\underline{v}) \geqslant 0.$$

2) Si $\underline{v} \notin G'$, on a :

$$\operatorname{Sup} F(\underline{\sigma}, \underline{v}) = +\infty.$$

On conviendra de poser encore dans ce cas :

$$\pi(\underline{v}) = \operatorname*{Sup}_{\underline{\sigma} \in G} F(\underline{\sigma}, \underline{v}) = +\infty$$

(1) $\underline{\sigma} \cdot \underline{v} = \sigma_{ij} v_{ij}$.

Aspect mécanique :

1) G est le convexe des tenseurs des contraintes plastiquement admissibles pour le matériau de fonction de charge f.

2) Si on considère le matériau standard de fonction de charge convexe f,

$\pi(\underline{v})$, dans le cas où $\underline{v} \in G'$, n'est autre que la puissance dissipée pour le tenseur des vitesses de déformation $\underline{v}$.

(5) correspond à l'inversion de la loi de comportement pour $\underline{v}$.

2.3. Théorème 3. Convexité de π

Soient $\underline{v}^1, \underline{v}^2 \in G'$.

Considérons $\underline{v} = \lambda \underline{v}^1 + (1-\lambda)\underline{v}^2$, $\lambda \in [0, 1]$.

D'après le théorème 1, $\underline{v} \in G'$.

Soit alors $\underline{\sigma}$, un champ de contraintes associé à $\underline{v}$ par (5), on a :

$$\pi(\underline{v}) = \underline{\sigma} \cdot \underline{v} = \lambda\, \underline{\sigma} \cdot \underline{v}^1 + (1-\lambda)\, \underline{\sigma} \cdot \underline{v}^2$$

par définition de $\pi(\underline{v}^1)$ et $\pi(\underline{v}^2)$ on a :

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{v}^1 \leqslant \pi(\underline{v}^1)$$
$$\underline{\sigma} \cdot \underline{v}^2 \leqslant \pi(\underline{v}^2)$$

d'où :

$$\pi(\underline{v}) \leqslant \lambda\, \pi(\underline{v}^1) + (1-\lambda)\, \pi(\underline{v}^2) \tag{6}$$

π est donc une fonction convexe sur G'.

Avec la convention faite :

$$\pi(\underline{v}) = +\infty \qquad \text{si} \qquad \underline{v} \notin G',$$

π est convexe sur l'ensemble de tous les tenseurs de vitesses de déformation (R^6).

Autre propriété :

On a évidemment : $\quad \pi(\lambda \underline{v}) = \lambda \pi(\underline{v}) \qquad \forall\, \lambda \geqslant 0.$

2.4. Définition

σ et v désignent des champs de contraintes et de vitesses de déformation. ($\underline{\sigma}$ et $\underline{v}$ désignent les tenseurs, valeurs de ces champs au point courant.)

Nous ne nous préoccuperons pas dans la suite de préciser, du point de vue de l'analyse, les espaces fonctionnels dans lesquels on doit se placer pour que les intégrales écrites aient un sens.

Il est entendu d'autre part que le matériau constituant le système n'est pas nécessairement homogène : on considèrera en chaque point les espaces G et G' appropriés.

Définissons :

$$H = \{\sigma \mid \underline{\sigma} \in G\,;\ \exists\, J_d \in \mathfrak{D}_p \text{ tel que } \sigma \text{ soit S.A. ass. } J_d\}.$$

THÉORÈME : H est un convexe.

En effet il suffit de rappeler que par hypothèse $\mathfrak{D}_p$ est un espace vectoriel (*cf.* Annexe du chapitre III), et que d'autre part G est convexe : on vérifie immédiatement que si $\sigma^1 \in H$, $\sigma^2 \in H$, alors :

$$\lambda\sigma^1 + (1-\lambda)\,\sigma^2 \in H, \qquad \lambda \in [0, 1].$$

A noter que puisque $f(\underline{0}) \leqslant 0$, H contient 0.

Définissons :

$$H' = \{v \mid \underline{v} \in G'\,;\ \exists\, J_c \in \mathfrak{C}_p \text{ tel que } v \text{ soit C.A. ass. } J_c\}.$$

THÉORÈME : H' est un cône convexe de sommet 0.

Il suffit de rappeler que $\mathfrak{C}_p$ est un espace vectoriel et G' un cône convexe de sommet 0.

Aspect mécanique :

H est le convexe des champs de contraintes licites (statiquement et plastiquement admissibles) pour le système étudié, soumis au processus de chargement à n paramètres considéré.

H' est le cône des champs de vitesses de déformation licites (cinématiquement et plastiquement admissibles) pour le système étudié dans les mêmes conditions.

2.5. Fonctionnelle I

Considérons la fonctionnelle :

$$I(\sigma, v) = \int_V \pi(\underline{v})\,\mathrm{d}V - Q(\sigma)\,\dot{q}(v) \equiv \int_V [\pi(\underline{v}) - \underline{\sigma}\cdot\underline{v}]\,\mathrm{d}V \tag{7}$$

définie $\forall\, J_d \in \mathfrak{D}_p$

$\forall\, J_c \in \mathfrak{C}_p$

$\forall\, \sigma$ S.A. ass. J_p, $\quad \forall\, v$ C.A. ass. J_c.

Propriété :

$$\forall\ \sigma \in H$$
$$\forall\ v \in H'$$

on a :
$$I(\sigma, v) \geqslant 0. \tag{8}$$

En effet :

$$I(\sigma, v) = \int_V [\pi(\underline{\sigma}) - \underline{\sigma} \cdot \underline{v}]\, \mathrm{d}V \geqslant 0 \text{ par définition de } \pi(\underline{v}).$$

2.6. Théorème

THÉORÈME : Une solution du problème d'écoulement libre pour le système en matériau standard, rend minimale $I(\sigma, v)$ sur $H \times H'$.

En effet une telle solution consiste en :

— un champ de contraintes σ licite $\sigma \in H$

— un champ de vitesses de déformation v licite $v \in H'$.

Ces deux champs étant associés par la loi de comportement du matériau standard, c'est-à-dire tels que :

$$\text{si } \underline{v} \neq 0, \text{ alors } \quad f(\underline{\sigma}) = 0 \quad \text{ et } \quad \underline{v} \in \lambda \partial f(\underline{\sigma}),\ \lambda > 0.$$

Il s'ensuit que pour ces deux champs :

$$I(\sigma, \underline{v}) = \int_V [\pi(v) - \underline{\sigma} \cdot \underline{v}]\, \mathrm{d}V = 0. \tag{9}$$

Donc I est minimale d'après (8).

2.7. Réciproque

Toute solution (σ, v) du problème

$$\underset{(\sigma, v) \in H \times H'}{\mathrm{Min}}\ I(\sigma, v) \tag{10}$$

telle que $v \neq 0$, est une solution du problème d'écoulement libre pour le système en matériau standard.

En effet, on sait que :

$$\underset{(\sigma, v) \in H \times H'}{\mathrm{Min}}\ I(\sigma, v) = 0,$$

car le champ $v = 0$ appartient à H'.

Toute autre solution du problème de minimisation de I est donc telle que :

$$I(\sigma, v) = 0\,;$$

en tout point où $\underline{v} \neq 0$ on a alors d'après la définition de :

$$\pi(\underline{v}) = \underline{\sigma} \cdot \underline{v}$$

donc : $$f(\underline{\sigma}) = 0 \quad \text{et} \quad \underline{v} \in \lambda \partial f(\underline{\sigma}), \quad \lambda > 0.$$

Ce qui prouve que l'on a bien une solution du problème d'écoulement libre du système en matériau standard.

2.8. Autres définitions

On définit l'ensemble K :

lorsque σ décrit H, $Q(\sigma)$ décrit $K \subset R^n$.

On vérifie immédiatement que K est un convexe.

On définit l'ensemble K' :

lorsque v décrit H', $\dot{q}(v)$ décrit $K' \subset R^n$.

On vérifie immédiatement que K' est un cône convexe de sommet 0.

Aspect mécanique :

K est le convexe des chargements licites du système,

K' est le cône convexe des vitesses de déformation licites du système.

2.9. Corollaire 1 : théorème du travail maximal

Soit (σ, v) une solution du problème d'écoulement libre pour le matériau standard ;

Soit $\sigma' \in H$.

On a : $$I(\sigma', v) \geqslant I(\sigma, v)$$

ou : $$\int_V \pi(\underline{v})\, \mathrm{d}V - Q(\sigma') \cdot \dot{q}(\underline{v}) \geqslant \int_V \pi(\underline{v})\, \mathrm{d}V - Q(\sigma)\, \dot{q}(v)$$

d'où :

$$[Q(\sigma) - Q(\sigma')] \cdot \dot{q}(v) \geqslant 0. \tag{11}$$

En conséquence, $Q(\sigma)$ chargement limite appartient nécessairement à la frontière de K et $\dot{q}(v)$ est normale extérieure à cette frontière.

Aspect mécanique :

C'est le théorème du travail maximal qui a pour conséquence le théorème de la méthode statique.

2.10. Corollaire 2 : Convexe K_1, Concave L_1

2.10.1. Convexe K_1

Définissons le convexe K_1 de l'espace $\{Q\}$ $(= R^n)$, par :

$$K_1 = \bigcap_{v \in H'} \left(Q \middle| \int \pi(v)\, \mathrm{d}V - Q'\, \dot{q}(v) \geqslant 0 \right) \tag{12}$$

On peut remarquer que l'on obtiendra le même convexe K_1 en considérant dans (12) tous les champs de vitesses de déformation C.A. qu'ils soient ou ne soient pas P.A.

Soit alors :

$$\sigma' \in H, \qquad Q(\sigma') = Q' \in K$$

on a :

$$\forall\, v \in H' : \qquad I(\sigma', v) = \int_V \pi(v)\, \mathrm{d}V - Q'\, \dot{q}(v) \geqslant 0$$

donc :

$$Q' \in K_1$$

d'où :

$$K \subset K_1.$$

En conséquence : étant donné $v \in H'$, le demi-espace

$$\int_V \pi(v)\, \mathrm{d}V - Q\, \dot{q}(v) \geqslant 0$$

contient le convexe K_1, donc aussi le convexe K.

Aspect mécanique :

Ce théorème est à la base de la méthode cinématique (§ 2.14).

2.10.2. Concave L_1

Définissons l'ensemble L_1 de $\{Q\}$

$$L_1 = \bigcup_{v \in H'} \left(Q \middle| \int \pi(v)\, \mathrm{d}V - Q\, \dot{q}(v) \leqslant 0 \right)$$

L_1 est concave et l'on a :

$$\complement K_1 \subset L_1 \subset \overline{\complement K_1}.$$

De plus, la convexité de π entraîne la propriété suivante :

soit $v_1 \in H'$, $v_2 \in H'$, $\quad v = \lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \in H' \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Alors tout chargement Q vérifiant à la fois :

$$\int \pi(v_1)\, \mathrm{d}V - Q\, \dot{q}(v_1) \leqslant 0$$

et

$$\int \pi(v_2)\, \mathrm{d}V - Q\, \dot{q}(v_2) \leqslant 0$$

satisfait nécessairement :

$$\int \pi(v)\, \mathrm{d}V - Q\, \dot{q}(v) \leqslant 0.$$

Cela a la conséquence importante :

Tous les plans tangents à la frontière de L_1 sont de la forme :

$$\mathrm{Inf}\left\{ \int \pi(v)\, \mathrm{d}V | v \in H',\ \dot{q}(v) = \dot{q} \right\} - Q\dot{q} = 0, \quad \dot{q} \in K'$$

ou encore, d'après ce qui a été dit plus haut à propos de K_1 :

$$\mathrm{Inf}\left\{ \int \pi(v)\, \mathrm{d}V | v \text{ C.A.},\ \dot{q}(v) = \dot{q} \right\} - Q\dot{q} = 0, \quad \dot{q} \in \mathbb{R}^n.$$

2.11. Propriétés des chargements limites

Si Q_1 est un chargement limite alors :

1) K n'est pas ouvert au point Q_1,

2) $Q_1 \in L_1$, qui n'est pas ouvert en ce point,

3) K et K_1 sont tangents en Q_1.

En effet :

$Q_1 \in K$ et d'après le § 2.9, Q_1 est sur la frontière K.

D'autre part, si v est un champ de vitesse de déformation correspondant à ce chargement limite, on a (§ 2.6) :

$$\int \pi(v)\, \mathrm{d}V - Q_1 \dot{q}(v) = 0$$

donc $Q_1 \in L_1$.

Il résulte alors de 2.10.2, qu'en ce point L_1 ne peut être ouvert et Q_1 appartient à la frontière de L_1 qui est aussi celle de K_1.

De plus, le plan :

$$\int \pi(v)\,\mathrm{d}V - Q\dot{q}(v) = 0 \tag{13}$$

passe par Q_1 et est tangent à K (car $\dot{q}(v)$ est normale extérieure à K); il ne saurait couper K_1 par définition, il est donc aussi tangent à K_1.

2.12. Hypothèse d'existence (de la solution du problème d'écoulement libre).

Nous désignerons ainsi l'hypothèse :

1°) $\underline{K \equiv K_1}$ (en conséquence K est fermé)

2°) $\underline{L_1 = \overline{\complement K_1}}$ (autrement dit L_1 est fermé).

Aspect mécanique :

Cette hypothèse est équivalente à la proposition suivante :

Si on considère un processus de chargement proportionnel :

$$Q = \lambda\, Q^*, \qquad \lambda > 0$$

soit on peut poursuivre le chargement indéfiniment, c'est-à-dire que $\lambda\, Q^*$ est licite $\forall\, \lambda > 0$;

soit il existe un chargement limite $Q = \lambda\, Q^*$ correspondant à la solution d'un problème d'écoulement libre.

En effet :

ou bien $\lambda\, Q^*$ est la direction d'un point à l'infini de K;

ou bien il existe, sur cette direction, un point Q_1 de la frontière commune de K, K_1 et L_1, ensembles fermés;

dans ce cas :

$$Q_1 \in K \implies \exists\, \sigma_1 \in H : \qquad Q_1 = Q(\sigma_1)$$

$$Q_1 \in K_1 \text{ et } Q_1 \in L_1 \implies \exists\, v_1 \in H',\ v_1 \neq 0 :$$

$$\int \pi(v_1)\,\mathrm{d}V - Q_1\dot{q}(v_1) = 0$$

(propriétés des plans tangents à la frontière de L_1, qui est un fermé)

soit encore : $$I(\sigma_1, v_1) = 0$$

donc (σ_1, v_1) est solution du problème d'écoulement libre.

La démonstration de la propriété réciproque est immédiate, s'appuyant sur le § 2.6.

Il résulte évidemment de ce résultat que tout point de la frontière commune de K, K_1 et L_1, s'il est situé à distance finie, est un chargement limite.

2.13.

Soit Q^* un chargement tel que :

$$\lambda\, Q^* \in K \qquad \forall\, \lambda \geqslant 0\,;$$

Soit v C.A. ass. $J_c \in \mathcal{C}_p$ tel que :

$$\dot{q}(v) \cdot Q^* > 0\,; \tag{14}$$

alors :

ou bien $v \notin H'$,

ou bien $v \in H'$ et la zone déformée plastiquement dans ce champ est d'étendue infinie ([1]).

En effet :

d'après le § 2.10, $K \subset K_1$ donc (12) est vérifiée par $\lambda\, Q^*$ et v cinématiquement admissible, licite ou non, c'est-à-dire que l'on a :

$$\int_V \pi(v)\, \mathrm{d}V - \lambda Q^* \dot{q}(v) \geqslant 0 \qquad \forall\, \lambda > 0 \tag{15}$$

d'où en utilisant (14) :

$$\int_V \pi(v)\, \mathrm{d}V = +\infty$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

2.14. Conséquences de l'hypothèse d'existence ; procédés pratiques ; théorèmes

2.14.1. Méthode statique

La détermination de la frontière d'écoulement par la méthode statique se fait en général en considérant des processus de chargement dépendant d'un seul paramètre, en particulier des chargements proportionnels.

(1) A noter dans les problèmes pratiques cette circonstance sera souvent exclue par la forme même des conditions à la limite : on impose en général $u = 0$ à l'∞, beaucoup plus rarement $T = 0$ à l'∞.

Soit Q^d un chargement donné. Cherchons les solutions au problème d'écoulement libre correspondant à des chargements limites de la forme $Q = \lambda\, Q^d$ (éventuellement avec la restriction $\lambda > 0$).

On a donc à résoudre le problème :

$$\text{Min}\ \{ I(\sigma, v) \mid v \in H' ;\ \sigma \in H,\ Q(\sigma) = \lambda\, Q^d \} \tag{16}$$

pour ne retenir que les solutions où $v \neq 0$.

Posant : $\varepsilon_v = \text{sgn}\,(Q^d\, \dot{q}(v))$

(16) devient :

$$\text{Min}\left\{ \int_V \pi(v)\, \mathrm{d}V - \varepsilon_v \dot{q}(v) Q^d \cdot \text{Max}\ \{\varepsilon_v \lambda(\sigma) | \sigma \in H,\ Q(\sigma) = \lambda(\sigma) Q^d\} | v \in H' \right\} \tag{17}$$

Le domaine pour σ dans (17) est un convexe $\subset H$, sur lequel on aura donc deux valeurs λ^1_+ et λ^1_- (resp. > 0, < 0) correspondant à Sup $\{\varepsilon_v \lambda(\sigma)\}$ suivant le champ v. Les chargements $\lambda^1_+\, Q^d$ et $\lambda^1_-\, Q^d$ sont sur la frontière de K à l'intersection avec la droite $Q = \lambda\, Q^d$ (fig. 1).

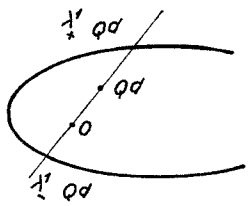

FIG. *A*.V.*a*-1.

Il s'agit donc, en conséquence de l'hypothèse d'existence, de chargements limites (s'ils sont à distance finie). Cela entraîne que :

ils correspondent à des champs σ^1_+ (resp σ^1_-) de H, qui réalisent le Max dans (17) (Min en σ dans (16)) ;

l'existence d'une solution $v^1_+ \neq 0$, du problème

$$\text{Min}\left\{ \int_V \pi(v)\, \mathrm{d}V - \dot{q}(v)\, Q^d \lambda^1_+ |\ v \in H',\ \varepsilon_v = +1 \right\} \tag{18}$$

qui resterait à résoudre, est assurée. La résolution de (18) sera inutile si comme cela est le cas général, on cherche uniquement à déterminer les chargements limites.

La méthode statique pratique sera :

le chargement obtenu en résolvant le problème :

$$\text{Max } \{\lambda(\sigma) \mid \sigma \in H,\ Q(\sigma) = \lambda(\sigma) Q^d,\ \lambda(\sigma) > 0\} \tag{19}$$

est un chargement limite.

On cherche donc à explorer au mieux le convexe de (19) de façon à maximiser λ. On explore ainsi K en suivant des rayons vecteurs ; dans la pratique où l'on travaillera sur un sous-ensemble du convexe de (19), on obtiendra une *approximation intérieure de la frontière d'écoulement.*

2.14.2. Méthode cinématique

La détermination cinématique de la frontière d'écoulement se fait le plus souvent en fixant $\dot{q}(v)$ dans (12).

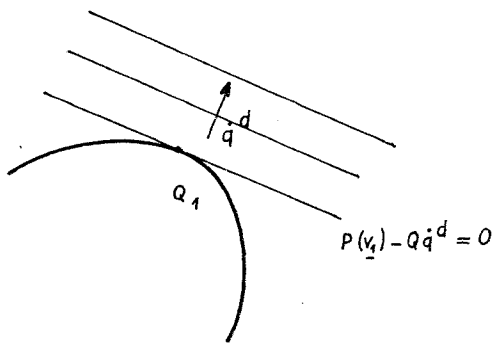

FIG. *A*.V.*a*-2.

Soit $\dot{q}^d \in K'$, $\dot{q}^d \neq 0$. Cherchons les solutions du problème d'écoulement libre telles que la vitesse de déformation du système correspondante soit (fig. 2) :

$$\dot{q}(v) = \dot{q}^d.$$

On a donc à résoudre le problème :

$$\text{Min } \{I(\sigma, v) \mid \sigma \in H;\ v \in H',\ \dot{q}(v) = \dot{q}^d\} \tag{20}$$

dont la solution est solution du problème d'écoulement libre si le Min est nul.

Posant : $$P(v) = \int_V \pi(\underline{v})\, \mathrm{d}V$$

(20) s'écrit aussi :

$$\text{Min } \{P(v) \mid v \in H',\ \dot{q}(v) = \dot{q}^d\} - \text{Max } \{Q(\sigma)\, \dot{q}^d \mid \sigma \in H\}. \tag{21}$$

On obtient v indépendamment de σ en résolvant le problème Min dans (21) et σ indépendamment de v en résolvant le problème Max.

L'existence de Sup $\{Q(\sigma)\,\dot{q}^d \mid \sigma \in H\}$ est assurée et le chargement correspondant Q_1 est le point de la frontière de K ou $\dot{q}^d$ est normale extérieure; c'est un chargement limite d'après l'hypothèse d'existence.

Il correspond donc à un champ de contraintes $\sigma_1 \in H$ qui réalise le Max dans (21) et il existe $v_1 \neq 0$, qui réalise le Min dans (21) ([1]), et est tel que :

$$I(\sigma_1, v_1) = 0.$$

Autrement dit, le plan

$$P(v_1) - Q\dot{q}^d = 0 \tag{22}$$

passe par Q_1 et est tangent à la frontière d'écoulement.

On en déduit la méthode cinématique classique :

Le demi-espace :

$$\text{Min } \{P(v) \mid v \in H',\ \dot{q}(v) = \dot{q}^d\} - Q\dot{q}^d \geqslant 0 \tag{23}$$

contient K et est tangent à la frontière d'écoulement.

On cherche donc à explorer au mieux le convexe de (23) de façon à minimiser $P(v)$. On explore ainsi L_1 par des demi-espaces de direction fixe; dans la pratique, on travaillera sur un sous-espace du convexe de (23) et on obtiendra une *approximation extérieure de la frontière d'écoulement.*

On voit que l'on a aussi une approche duale qui est statique :

Le chargement obtenu en résolvant le problème :

$$\text{Max } \{Q(\sigma)\,\dot{q}^d \mid \sigma \in H\},\ \dot{q}^d \in K'$$

est un chargement limite pour lequel $\dot{q} = \dot{q}^d$.

Remarquons enfin que la condition $\dot{q}^d \in K'$ posée au départ, évite que le convexe de (23) ne soit vide mais qu'en pratique, il peut être difficile, dans certains cas, de savoir a priori si $\dot{q}^d \in K'$. En fait, on peut dans (20) et dans les énoncés de la méthode cinématique classique et de son approche duale considérer $\dot{q}^d$ quelconque dans R^n, les deux derniers problèmes s'écrivant :

$$\text{Inf } \{P(v) \mid v \text{ c.a.},\ \dot{q}(v) = \dot{q}^d\} - Q\,\dot{q}^d \geqslant 0 \tag{23'}$$
$$\text{Sup } \{Q(\sigma)\,\dot{q}^d \mid \sigma \in H\},\ \dot{q}^d \text{ quelconque};$$

(1) En effet $\dot{q}^d$ est normale extérieure en Q_1 à la frontière de L_1 qui est fermé.

en effet les résultats seront inchangés car :

— si $\dot{q}^d \notin K'$, on a $P(v) \equiv +\infty$ donc $\text{Inf}\,\{P(v)\} = +\infty$,
($\Longleftrightarrow$ $\text{Sup}\,\{Q(\sigma)\,\dot{q}^d\} = +\infty$ par application de l'hypothèse d'existence), il n'y a pas de chargement limite ;

— si $\dot{q}^d \in K'$, alors si $\text{Inf}\,\{P(v)\} < +\infty$, il s'agit nécessairement d'un Min atteint pour $v \in H'$ (car $v \notin H' \Longrightarrow P(v) = +\infty$), et on est bien ramené à la formulation initiale.

Dernier point à signaler : l'absence de solution peut se produire même si $\dot{q}^d \in K'$; $\text{Inf}\,\{P(v)\} = +\infty$ peut être réalisé dans ce cas si tous les champs v de H' tels que $\dot{q}(v) = \dot{q}^d$ ont une zone déformée infinie. (Cela rejoint les résultats du § 2.13.)

2.14.3. Théorème

Soit Q_1 un chargement limite, $\dot{q}_1$ une vitesse de déformation correspondante, déterminés par l'une ou l'autre des méthodes ci-dessus par exemple, alors :

Tout σ^* vérifiant :

$$\sigma^* \in H, \quad Q(\sigma^*) = Q_1$$

forme avec tout v^* vérifiant :

$$v^* \in H', \ \dot{q}(v^*) = \dot{q}_1, \ P(v^*) = \text{Inf}\,\{P(v) \mid v \in H', \ \dot{q}(v) = \dot{q}_1\}$$

une solution du problème d'écoulement libre correspondant à Q_1, $\dot{q}_1$.

La démonstration est immédiate car on a :

$$I(\sigma^*, v^*) = 0.$$

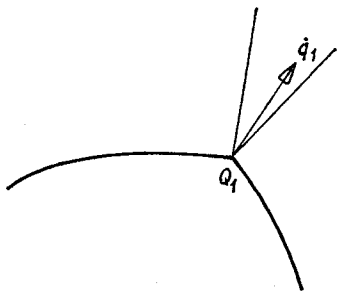

FIG. *A*.V.*a*-4.

Cela montre que, l'hypothèse d'existence admise, lorsque l'on applique la méthode statique (resp. cinématique) le champ de contraintes (resp. vitesses de déformation) obtenu dans la recherche du Max (resp. Min) non seulement réalise l'extremum mais aussi est la base d'une solution possible du problème d'écoulement libre.

2.14.4. Cas d'un processus de chargement à un paramètre

Dans le cas fréquent d'un processus de chargement dépendant d'un paramètre Q (> 0) les énoncés correspondant aux § 2.14.1 et 2.14.2, prennent les formes classiques simples :

Méthode statique :

$$\boxed{Q^+_{\lim} = \text{Max}\ \{Q(\sigma) \mid \sigma \in H\}}$$

Méthode cinématique :

$$\boxed{Q^+_{\lim} = \text{Min}\ \{P(v) \mid v \in H',\ \dot{q}(v) = 1\}}$$

et sa formulation duale :

$$Q^+_{\lim} = \text{Max}\ \{Q(\sigma) \mid \sigma \in H\}$$

identique à celle de la méthode statique usuelle.

3 — Cas de certains matériaux non standards

3.1. Type de matériaux non standards étudiés :

On considère les matériaux dont le comportement plastique est tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

1) fonction de charge convexe f et telle que :

$$f(0) \leqslant 0\,;$$

2) potentiel plastique g : existence d'une fonction g convexe telle que : étant donné $\underline{\sigma}$: $f(\underline{\sigma}) = 0$.

$$\exists\ \underline{\sigma}' :\ g(\underline{\sigma}') = 0, \qquad \underline{v}(\underline{\sigma}) \in \lambda \partial g(\underline{\sigma}'), \quad \lambda \geqslant 0 \tag{24}$$

et tel que :

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{v}(\underline{\sigma}) \geqslant \underline{\sigma}' \cdot \underline{v}(\underline{\sigma}) \tag{25}$$

(ce qui implique que $G^g \subset G^f$

$$G^g = \{\underline{\sigma} \mid g(\underline{\sigma}) \leqslant 0\}, \qquad G^f = \{\underline{\sigma} \mid f(\underline{\sigma}) \leqslant 0\}).$$

3.2. Théorèmes

Les notations utilisées sont celles du § 2 avec en exposant la lettre f où g pour préciser quelle est la fonction convexe à faire intervenir dans les définitions.

Soit (σ, v) une solution du problème d'écoulement libre pour le matériau non standard $M(f, g)$.

On a nécessairement :

$$\begin{aligned} \sigma &\in H^f, \qquad Q(\sigma) \in K^f\,; \\ v &\in H'^g, \qquad \dot{q}(v) \in K'^g. \end{aligned} \tag{26}$$

$\underline{\sigma}'$ étant défini par (24), on a :

$$\underline{\sigma}' \cdot \underline{v} = \pi^g(\underline{v}) \tag{27}$$

et, d'après (25) :

$$\underline{\sigma} \cdot v \geqslant \pi^g(\underline{v}).$$

Or on a, par définition :

$$Q(\sigma)\, \dot{q}(v) = \int_V \underline{\sigma} \cdot \underline{v}\, \mathrm{d}V$$

d'où :

$$\int_V \pi^g(\underline{v})\, \mathrm{d}V - Q(\sigma)\, \dot{q}(v) \leqslant 0 \tag{28}$$

qui prouve que $Q(\sigma)$ n'est pas intérieur à K^g (1).

Ainsi :

$$Q(\sigma) \in K^f \cap \overline{\complement K^g}.$$

Aspect mécanique :

Les chargements limites pour le système en matériau non standard appartiennent à la « couronne » comprise entre K^f et l'intérieur de K^g.

Dans le cas du chargement proportionnel, on peut dire que la (ou les) charge limite λ_1^M pour le système en matériau non standard $M(f, g)$, est comprise entre la charge limite pour le matériau standard $G(g, g)$,

(1) Insistons sur l'importance de ce résultat : dans une solution (σ, v) du problème d'écoulement libre pour le matériau non standard (f, g), le critère de plasticité $f = 0$ est nécessairement atteint en certains points ; donc σ est sur la frontière de H^f ; or $G^g \subset G^f$ $H^g \subset H^f$ et $K^g \subset K^f$; mais cela ne suffit évidemment pas à prouver que $Q(\sigma)$ n'est pas intérieur à K^g.

borne inférieure, et la charge limite pour le matériau standard $F(f, f)$, borne supérieure :

$$\lambda_1^g \leqslant \lambda_1^M \leqslant \lambda_1^f \quad (^1). \tag{29}$$

Cela constitue le théorème de Radenkovic [2, 3, 4].

Il n'est donc pas démontré dans ce cas que la frontière d'écoulement du système est une variété à $(n-1)$ dimensions ; en particulier, il n'est pas impossible qu'un chargement puisse être chargement limite pour un certain trajet de charge passant par lui, et ne pas l'être pour un autre trajet de charge passant aussi par lui (2).

Remarquons que dans la pratique la fonction g n'est pas définie de façon unique ; on choisira évidemment celle qui, satisfaisant les conditions indiquées, correspond au convexe K^g le plus grand (dans la zone des chargements correspondants au problème réel envisagé). Malgré cela, les résultats obtenus concernant la frontière intérieure du domaine possible pour les chargements limites, sont souvent décevants. Ainsi pour l'exemple donné à l'annexe *a* du chapitre IV (§ 6) la borne inférieure des charges limites donnée par le théorème serait égale à q !

Rappelons enfin que, dans le cas d'un système comportant plusieurs corps, les conditions de frottement aux divers interfaces interviennent comme des formes particulières de critères de plasticité et lois de comportement plastique ; elles devront donc satisfaire le principe du travail maximal pour que les résultats du § 2 soient applicables, ou satisfaire les conditions du § 3.1 pour que les résultats du § 3.2 soient applicables.

Le paragraphe suivant indique les résultats que l'on peut obtenir dans ce cas.

4 — Conditions de frottement aux interfaces

4.1. Divers types de conditions de frottement

Soit un interface séparant deux matériaux M_1 et M_2 dont f^1 et f^2 sont les fonctions de charge au voisinage de l'interface, et g^1, g^2 les potentiels plastiques (§ 3.1).

Nous examinons les conditions de frottement rencontrées couramment.

---

(1) Il est évident que (26) est vraie quelle que soit la loi de comportement plastique du matériau. En conséquence, l'inégalité $\lambda_1^M \leqslant \lambda_1^f$ est, elle aussi, toujours vraie.

(2) Revenant au matériau élastoplastique, l'indépendance des chargements limites vis-à-vis des propriétés élastiques n'est plus assurée (cf. § V.5.1.).

4.1.1. Interface lisse

Le contact lisse à l'interface, liaison unilatérale, correspond au domaine plastiquement admissible, pour les contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma &\leqslant 0 \\ \tau &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

et à la règle de glissement :

$$\begin{array}{llll} \sigma < 0, & \tau = 0 & [u]\cdot n = 0, & [u]\cdot t \text{ quelconque} \\ \sigma = 0, & \tau = 0 & [u]\cdot n \geqslant 0, & [u]\cdot t \text{ quelconque.} \end{array}$$

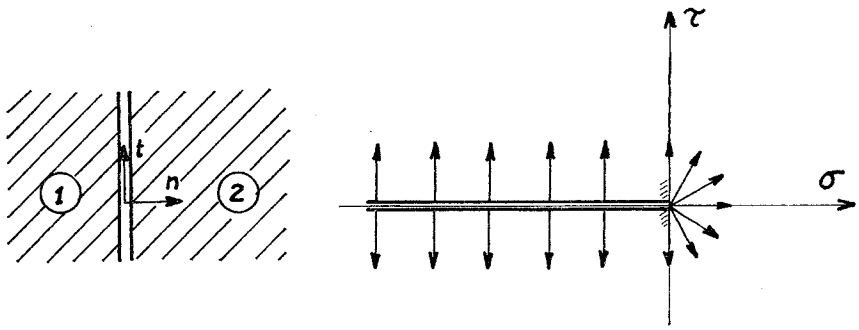

FIG. *A*.V.*a*-4.

La figure 4 représente la « surface de charge » de ce « contact » et les vitesses de déformation — ici discontinuités de vitesse : $u^2 - u^1$ — correspondantes. Le principe du travail maximal est vérifié, avec les notations du § 3.1 on a : f convexe et $f \equiv g$, pour le contact.

$$f(\underline{\sigma}) = \text{Sup } \{\sigma, \tau^2\}. \tag{31}$$

4.1.2. Frottement sec de Coulomb à l'interface

Le domaine plastiquement admissible pour les contraintes est :

$$\left.\begin{aligned} \sigma &\leqslant 0 \\ |\tau| &\leqslant -\sigma \operatorname{tg} \phi_0 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

et la règle de glissement :

$$\left.\begin{array}{lll} \sigma < 0, \quad |\tau| < -\sigma \operatorname{tg} \phi_0 : & [u] \quad = 0 & \\ \sigma = 0, \quad |\tau| = -\sigma \operatorname{tg} \phi_0 : & [u]\cdot n = 0, & [u]\cdot t\,\tau \geqslant 0 \\ \sigma = 0, \quad \tau = 0 \quad : & [u]\cdot n \geqslant 0, & [u]\cdot t \text{ quelconque} \end{array}\right\} \quad (33)$$

D'où la figure 5 :

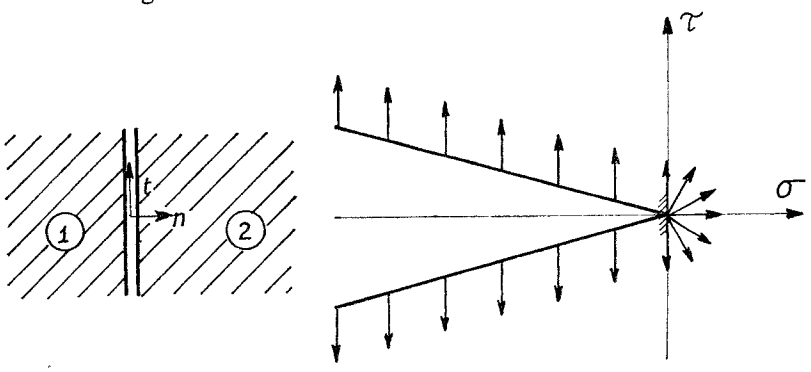

FIG. *A*.V.*a*-5.

Cette condition n'est pas standard : $f \neq g$; f correspond à la courbe de la figure 5 tandis que g correspond à celle de la figure 4.

$$f(\underline{\sigma}) = \operatorname{Sup}\,\{\sigma,\ \tau^2 - \sigma^2 \operatorname{tg}^2 \phi_0\}, \qquad g(\underline{\sigma}') = \operatorname{Sup}\,\{\sigma',\ \tau'^2\}.$$

L'état de contraintes et le champ de vitesses à l'interface sont régis non seulement par la condition de frottement à l'interface proprement dit mais aussi par les propriétés de M_1 et M_2. Le domaine plastiquement admissible est ainsi l'intersection de (32), de $f^1 \leqslant 0$ et de $f^2 \leqslant 0$, et la discontinuité de vitesse est réglée par (33), par g^1 ou par g^2 suivant l'état de contraintes. La figure 6 représente le cas où M_1 est rigide, et où M_2 est un matériau de Tresca standard.

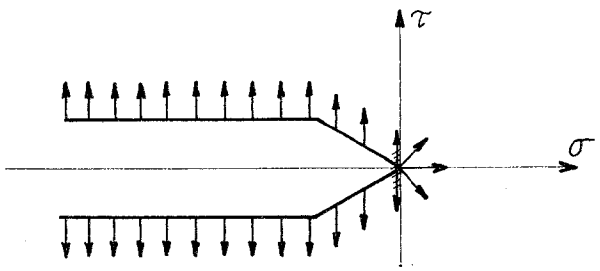

FIG. *A*.V.*a*-6.

Considérons l'exemple de la figure 6 et supposons : $\operatorname{tg} \phi_0 \gg 1$. Alors la condition (32) ne limite le domaine P.A. de la figure 6 que pour des petites valeurs de $|\sigma|$. A la limite on aboutit au schéma de la figure 7 qui représente le cas de l'interface dit « parfaitement rugueux », pour M_1 rigide et M_2, matériau de Tresca standard.

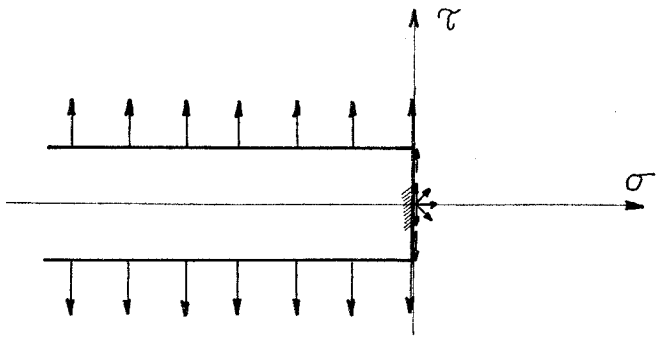

FIG. *A.V.a-7.*

De même pour des matériaux M_1 et M_2 quelconques.

4.1.3. Interface sans mouvement relatif ou « collé »

Certains théorèmes [1] font intervenir un modèle idéal où l'interface proprement dit ne permet aucun mouvement relatif. Le domaine P.A. et les règles pour les discontinuités de vitesse ne dépendent alors que de f^1, f^2, g^1, g^2.

4.2. Application des théorèmes de Radenkovic (§ 3)

4.2.1. Interfaces standards et non standards

L'étude du § 4.1 montre que seul l'interface lisse est standard. L'interface « parfaitement rugueux » ne l'est pas quels que soient M_1 et M_2 (de même l'interface à frottement sec quelconque). Le caractère de l'interface « collé » ne dépend que de M_1 et M_2 : ainsi, si M_1 et M_2 sont standards, l'interface l'est certainement aussi.

L'existence d'un potentiel plastique g convexe pour le comportement de l'ensemble (interface $+ M_1$ et M_2 au voisinage), n'est pas toujours assurée. C'est ainsi que pour un matériau M_i de Coulomb

$$f^i(\underline{\sigma}) = \operatorname{Sup} \{\sigma, \tau^2 - (C - \sigma \operatorname{tg} \phi)^2\}$$

dont la loi de comportement est du type indiqué au chapitre I, § 8, correspondant au potentiel plastique

$$g^i(\underline{\sigma}') = \text{Sup}\ \{\sigma',\ \tau'^2 - \sigma'^2\ \text{tg}^2\ v\}, \qquad 0 \leqslant v \leqslant \phi,$$

l'existence de g convexe pour l'ensemble n'est assurée que pour $v = 0$.

4.2.2. Application du théorème de Radenkovic

4.2.2.1. *Matériau g.*

S'il existe pour l'interface global un potentiel plastique convexe — à savoir : celui de l'interface lisse — l'application du théorème de Radenkovic est immédiate : on considère le système en matériau standard $g(M)$ et à interfaces lisses et l'on sait que la charge limite pour ce système est inférieure ou égale à celles du système réel (1). En particulier si le système est constitué d'un matériau de Tresca standard, l'existence du potentiel plastique convexe pour l'interface global est assurée et on retrouve le théorème B de Drucker [1].

4.2.2.2. *Matériau f.*

Le théorème de Radenkovic conduit également à une majoration, en considérant le système en matériau standard $f(M)$ et admettant pour règles de glissement aux interfaces celles déduites de la normalité de $[u]$ à la frontière du domaine plastiquement admissible pour chaque interface global : la charge limite de ce système est supérieure ou égale à celles du système réel.

C'est la meilleure majoration que puisse fournir le théorème. Par contre la règle d'écoulement aux interfaces n'étant pas physiquement

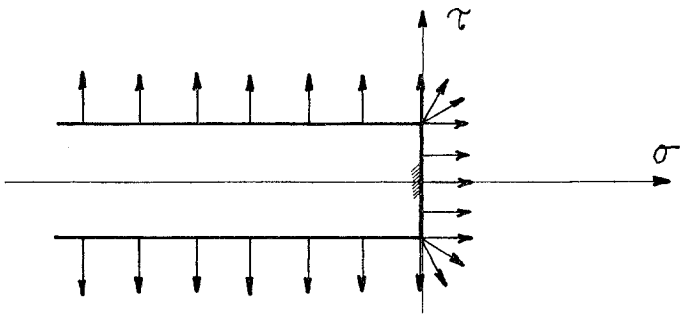

FIG. *A*.V.*a*-8.

(1) Nous adoptons, pour simplifier, le langage du cas du chargement proportionnel.

très parlante, on peut préférer et considérer le système composé du même matériau, et à interfaces parfaitement rugueux standards (i.e. $[u]$ normal à la frontière du domaine P.A.). On obtiendra alors une majoration des charges limites du système réel, qui ne peut être meilleure que la précédente car le convexe des chargements licites pour ce deuxième système standard contient celui du premier système standard.

RÉFÉRENCES

[1] D.C. Drucker (1954). — *Coulomb friction, plasticity and limit loads.* J. Appl. Mech. Trans. A.S.M.E., Vol. 21, 1, pp. 71-74.

[2] A.C. Palmer (1966). — *A limit theorem for materials with non-associated flow laws.* J. Mécanique Vol. 5, n° 2, pp. 217-222.

[3] D. Radenkovic (1961). — *Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée.* C.R. Ac. Sc. Paris, 252, pp. 4103-4104.

[4] D. Radenkovic (1962). — *Théorie des charges limites.* Séminaire de Plasticité, ed. J. Mandel, P.S.T. n° 116, pp. 129-142.

[5] J. Salençon (1969). — *La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane.* Thèse Doc. Sc. Paris.

I.F. Collins (1968). — *An optimum loading criterion for rigid plastic materials.* Jl. Mech. Phys. Solids, vol. 16, n° 2, pp. 73-80.

I.F. Collins (1969). — *The upper bound theorem for rigid plastic solids generalized to include Coulomb friction.* Jl. Mech. Phys. Solids, vol. 17, pp. 323-338.

D. Radenkovic et Nguyen Quoc Son (1972). — *La dualité des théorèmes limites pour une structure en matériau rigide plastique standard.* Archives of Mechanics, vol. 24, n° 5-6, pp. 991-998.

G. Sacchi et M. Save (1968). — *A note on the limit loads of non-standard materials.* Meccanica, vol. 3, n° 1, pp. 43-45.

J. Salençon (1972). — *Ecoulement plastique libre et analyse limite pour les matériaux standards et non standards.* Ann. I.T.B.P. n° 295-296, pp. 90-100.

J. Salençon (1972). — *Un exemple de non validité de la théorie classique des charges limites pour un système non-standard.* C.R. Int. Symp. on Foundations of Plasticity, Varsovie 1972, à paraître Nth. Holland Pub. Cy.

J. Salençon (1973). — *Quelques résultats théoriques concernant la butée d'une paroi lisse sur un massif plastique.* A paraître Ann. I.T.B.T.P.

J. Salençon (1973). — *Charge limite d'un système non-standard. Un contre exemple pour la théorie classique.* Séminaire « Plasticité et Viscoplasticité 1972 », Ec. Polytechnique, à paraître in Sciences et Techniques de L'Armement.

M. Save (1961). — *On yield conditions in generalized stresses.* Quart. Appl. Math. vol. 19, n° 3, pp. 259-267.

B. LE THÉORÈME DE BONNEAU

Nous donnons ici la démonstration générale, du théorème de Bonneau [1], dans le cas d'un matériau non homogène de courbe intrinsèque quelconque.

On suppose l'existence de dérivées premières continues de la fonction de charge par rapport à x et y.

1 — Le problème posé

(Il s'agit d'un problème plan).

Soit une courbe (C) tracée à l'intérieur d'un solide séparant les régions (I) et (II) :

σ et τ désignent les composantes normales et tangentielles de la contrainte sur (C) en un point.

On suppose qu'il est imposé aux fonctions σ et τ le long de (C), pour des raisons que les exemples donnés ci-dessous expliqueront, de satisfaire la relation d'écoulement (*cf.* Chap. I, formule 8)

$$|\tau| = h(\sigma, x, y) \tag{1}$$

en tout point de (C) avec un signe constant (i.e. : $\tau = h$ ou $\tau = -h$). C'est-à-dire que (C) est une enveloppe de facettes « marginales » du même type.

On se propose de montrer que pour qu'un champ de contraintes licite puisse exister dans le solide, c'est-à-dire pour qu'il soit possible de trouver des champs de contraintes en équilibre dans (I) et dans (II) en satisfaisant la continuité des contraintes σ et τ sur (C), sans violer le critère de plasticité en aucun point, il est nécessaire que le long de (C), les contraintes vérifient la relation différentielle pour les contraintes obtenue à l'annexe du chapitre IV, le long des caractéristiques correspondant au type de facette considéré, c'est-à-dire que (C) soit caractéristique des contraintes. (Nous désignerons par E_α et E_β ces relations).

2 — Origine du problème. Cas des solutions incomplètes

2.1.

Le problème étudié a diverses origines.

Une première origine a été signalée au chapitre IV : c'est la question des lignes enveloppes de caractéristiques, que ces dernières soient ou ne

soient pas rectilignes ; en effet une enveloppe de caractéristiques si elle est touchée par les arcs de caractéristiques dans le domaine plastique est une courbe (C) du § 1, le long de laquelle on sait que l'équation E_α (ou E_β) n'est pas vérifiée car elle n'est pas une caractéristique. Le théorème de Bonneau indique alors que (C) ne peut pas être touchée par les arcs de caractéristiques à l'intérieur du domaine plastique. Elle ne peut l'être qu'à la frontière, ou bien l'enveloppe n'est pas touchée par les arcs de caractéristiques eux-mêmes mais par leurs prolongements.

Lorsqu'on étudie les problèmes de déformation plane les solutions font apparaître des courbes (C) : les frontières entre les zones de type a, (I), et les zones de type b, (II), sont des courbes (C) ; dans ce cas le champ de contraintes licite est connu dans (I) (il est à la limite d'écoulement), et (C) est une caractéristique ou une enveloppe de caractéristiques. Le théorème de Bonneau donne un résultat particulièrement important dans ce dernier cas puisqu'il montre que si (C) est une enveloppe de caractéristiques à l'intérieur du solide, il n'existe certainement pas de prolongement licite du champ de contraintes.

Enfin, dans le cas du matériau standard, (C) peut être aussi une ligne de discontinuité de la vitesse, isolée, séparant deux zones rigides : dans ce cas on a nécessairement $\pm \tau = h(\sigma, x, y)$ le signe étant fixé par le sens de la discontinuité de vitesse, et les champs de contraintes sont inconnus dans (I) et dans (II). Le théorème de Bonneau précise dans ce cas que si un champ de contraintes licite peut être associé à ce mode de déformation, il vérifie nécessairement l'équation E_α (resp. E_β) le long de la ligne de discontinuité de vitesse.

2.2.

Ces résultats ont des applications importantes pour les solutions incomplètes des problèmes de déformation plane, pour le matériau standard. Ils montrent que :

1) du strict point de vue de l'application de la méthode cinématique et de l'utilisation des propriétés particulières des solutions incomplètes, il n'est pas nécessaire que l'équation E_α (ou E_β) soit satisfaite au contour des zones déformées dans le solide, ou le long des lignes de glissement isolées.

Un exemple est fourni par le travail de J. Ostrowska [3] qui comporte une enveloppe de caractéristiques touchée par celles-ci dans le domaine plastique.

2) si lorsque l'on construit une solution incomplète on espère aller plus loin que la simple utilisation de la méthode cinématique, et que, bien que l'on ne sache pas effectuer la « vérification » des zones rigides, on pense disposer là d'une solution incomplète qui peut être complétée donnant la

valeur exacte de la charge limite ; c'est-à-dire si la solution incomplète apparaît, non comme une fin en soi, mais comme la dernière étape avant une solution complète ; il est alors évident qu'il est nécessaire que l'équation E_α (ou E_β) soit satisfaite au contour des zones déformées dans le solide et le long des lignes de glissement isolées, car sinon on est certain que la « vérification » des zones rigides n'est pas possible.

Hill [2] a tenu compte de ce résultat pour la construction de solutions incomplètes dans l'étude du poinçonnement d'un bloc, auquel il avait été conduit par un raisonnement physique en faisant des hypothèses sur le développement et la localisation des zones plastifiées.

Nous passons maintenant à la démonstration du théorème.

3 — Lemme

Si un champ de contraintes licite existe dans le solide, nécessairement ce champ de contraintes est continu à la traversée de (C).

Démonstration (1) :

Le champ de contraintes licite doit satisfaire la continuité à la traversée de (C), des contraintes σ et τ qui sont appliquées à (C).

Dans le diagramme de Mohr (fig. 1) l'extrémité T du vecteur contrainte (σ, τ) en un point M de (C) est sur la courbe intrinsèque de ce point.

Par hypothèse la fonction de charge est continue en x et y. Il s'ensuit que en M de part et d'autre de (C) la courbe intrinsèque est identique ; c'est celle en M sur (C). Or le seul cercle de Mohr passant par T qui soit représentatif d'un tenseur des contraintes plastiquement admissible en M est le cercle (Γ) tangent à la courbe intrinsèque du point M en (C).

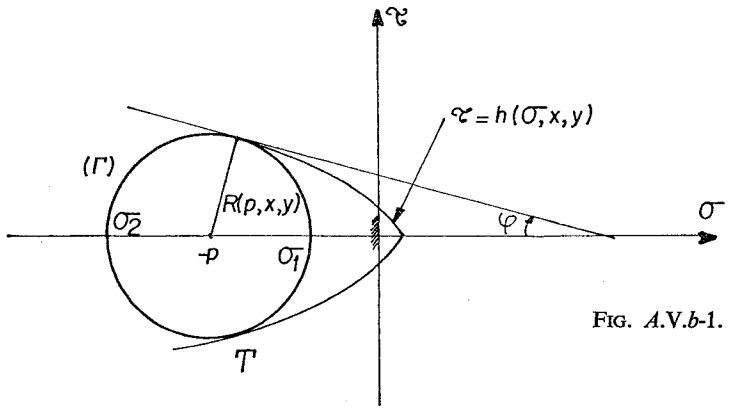

FIG. *A*.V.*b*-1.

(1) Le principe de cette démonstration est dû à J. MANDEL (communication privée).

On en déduit puisqu'il doit y avoir continuité de σ et τ à la traversée de (C), que (Γ) représente nécessairement le tenseur des contraintes en M non seulement sur (C) mais aussi dans les régions (I) et (II) de part et d'autre de (C), en les points M_{I} et M_{II}. Il y a donc nécessairement continuité du tenseur des contraintes à la traversée de (C).

Corollaire :

Il est évident que (1) la continuité du champ de contraintes à la traversée de (C) entraîne celle des dérivées tangentielles des contraintes le long de (C).

4 — Etablissement des relations différentielles nécessairement vérifiées de long de (C)

Considérons pour fixer les idées le cas de la figure 2 ou τ est négatif (2). La relation (1) satisfaite le long de (C) est alors :

$$-\tau = h(\sigma, x, y)$$

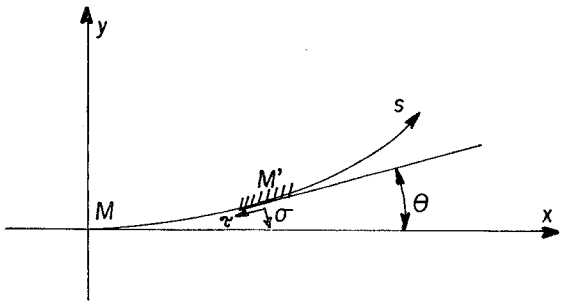

FIG. *A*.V.*b*-2.

On a, par hypothèse, en M :

$$\sigma_y = \sigma$$

$$\tau_{xy} = -\tau$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial s}$$ et est nécessairement continu à la traversée de (C)

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial s}$$ et est nécessairement continu à la traversée de (C), d'après le lemme.

(1) D'après les relations de compatibilité d'Hadamard.

(2) Dans le cas où (C) est une enveloppe de caractéristiques, il s'agit d'une enveloppe des caractéristiques α.

Les forces de masse étant supposées continues à la traversée de (C), on en déduit puisque les équations d'équilibre doivent être satisfaites dans (I) et (II) pour que le champ de contraintes soit licite, que :

$\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}$ sont continues à la traversée de (C) en M.

Considérons alors l'expression :

$$g(x, y) = \tau_{xy} - h(\sigma_y, x, y) \tag{2}$$

dont la dérivée en y est :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\{\tau_{xy} - h(\sigma_y, x, y)\} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y}; \tag{3}$$

d'après les hypothèses de continuité sur les dérivées de la fonction de charge et compte tenu du résultat obtenu plus haut on voit que :

$\dfrac{\partial g}{\partial y}$ est nécessairement continue à la traversée de (C).

Or en M :

$$g(x, y) = \tau_{xy} - h(\sigma_y, x, y) = -\tau - h(\sigma, x, y) = 0.$$

D'après le lemme du § 3, g est une fonction continue à la traversée de (C).

D'autre part désignant par f la fonction de charge du matériau, pour que le champ de contraintes soit licite dans (I) et (II) il est nécessaire que dans ces deux régions on ait :

$$f(\underline{\sigma}, x, y) \leqslant 0.$$

Or : $f(\underline{\sigma}, x, y) \leqslant 0 \Longrightarrow \tau_{xy} - h(\sigma_y, x, y) \leqslant 0.$

La seule possibilité pour $\dfrac{\partial}{\partial y}\{(\tau_{xy} - h(\sigma_y, x, y)\}$, continue en M à la traversée de (C), est donc d'être nulle [1]

$$\frac{\partial}{\partial y}\{(\tau_{xy} - h(\sigma_y, x, y)\} = 0. \tag{4}$$

(1) Ainsi le champ de contraintes est donc non seulement à la limite d'écoulement sur (C) et continu à la traversée, mais de plus, au voisinage de (C), de part et d'autre, il est nécessairement tangent à un champ à la limite d'écoulement.

D'après la figure 1, on a :

$$\frac{\partial h}{\partial \sigma} = -\operatorname{tg} \phi$$

d'où en portant dans (3) :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \operatorname{tg} \phi \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \text{ en } M. \tag{5}$$

Il est utile d'exprimer $\frac{\partial}{\partial y} h(\sigma, x, y)$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial y} R(p, x, y)$ introduit à l'annexe du chapitre IV.

On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial y} h(\sigma, x, y) = \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial y} R(p, x, y). \tag{6}$$

On peut alors transformer (5), en tenant compte de (6), et en introduisant les dérivées par rapport à x des contraintes au moyen des équations d'équilibre ; X et Y désignent les composantes des forces de masse en M suivant Mx et My ; d'où :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \operatorname{tg} \phi \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho(X + Y \operatorname{tg} \phi) + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial R}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Soit alors M' un point sur (C) au voisinage de M. On pose $p = -(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ et on désigne par θ l'angle de la direction de la plus grande traction en M' avec Mx.

On a en M' :

$$\begin{cases} \sigma_x = -p + R \cos 2\theta \\ \tau_{xy} = R \sin 2\theta \end{cases}$$

d'où puisque $\partial R / \partial p = \sin \phi$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}(1 - \sin \phi \cos 2\theta) - 2R \sin 2\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \cos 2\theta \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \dfrac{\partial p}{\partial x} \sin \phi \sin 2\theta + 2R \cos 2\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \sin 2\theta \dfrac{\partial R}{\partial x} \end{cases}$$

et en M où $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}(1+\sin^2\phi) - 2R\cos\phi\dfrac{\partial\theta}{\partial x} - \sin\phi\dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \dfrac{\partial p}{\partial x}\sin\phi\cos\phi - 2R\sin\phi\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \cos\phi\dfrac{\partial R}{\partial x}. \end{cases}$$

(7) devient donc :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - 2\frac{R}{\cos\phi}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \rho(X + Y\operatorname{tg}\phi) + \frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial R}{\partial y} = 0 \qquad (8)$$

$(X + Y\operatorname{tg}\phi) = F^\alpha$ composante de la force de masse dans la base normée e_α, e_β : e_α tangent en M à Mx, e_β défini par $(e_\alpha, e_\beta) = \frac{\pi}{2} + \phi$:

$\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x_\beta}$ en utilisant les notations de l'annexe du chapitre IV.

On obtient ainsi l'équation :

$$\boxed{\mathrm{d}p + \frac{2R}{\cos\phi}\mathrm{d}\theta - \left(\rho F^\alpha + \frac{\partial R}{\partial x_\beta}\right)\mathrm{d}x^\alpha = 0 \text{ le long de } (C)}$$

qui n'est autre que l'équation E_α.

(*cf.* Annexe du chapitre IV).

Il est évident que si on avait considéré au départ le cas où $+\tau = h(\sigma, x, y)$ le long de (C), on aurait obtenu l'équation E_β.

5 — Remarques

5.1.

Le raisonnement fait au paragraphe 4 précise bien la signification des équations E_α (ou E_β) : elles expriment que *le long de* (C) *l'extrémité du vecteur contrainte agissant sur* (C) *est sur la courbe intrinsèque et que les équations d'équilibre sont satisfaites de part et d'autre de* (C) *sans que le critère de plasticité ne soit violé.*

On comprend que ce raisonnement peut servir de base à une introduction différente de celle que nous avons donnée, des lignes caractéristiques des contraintes dans la zone plastique :

On considère en tout point de la zone plastique, les deux facettes « marginales » sur lesquelles on a $|\tau| = h(\sigma, x, y)$ (facettes correspondant aux points de contact du cercle de Mohr et de la courbe intrinsèque) : soit (C) une courbe enveloppe des facettes d'une famille ; le long de (C), compte tenu de ce qui a été dit ci-dessus, une des équations E_α (ou E_β) est nécessairement satisfaite ; cette équation est une relation différentielle entre les fonctions inconnues, dont (C) est une caractéristique des équations des contraintes.

5.2

Dans les démonstrations ci-dessus on ne fait nulle part intervenir la loi de comportement du matériau. Il s'agit de considérations qui ont trait uniquement aux contraintes, exprimant la possibilité d'existence d'un champ de contraintes licite dans les conditions indiquées. Il s'ensuit que le résultat obtenu est valable pour les matériaux non-standards, et également pour les problèmes d'élastoplasticité.

RÉFÉRENCES

[1] M. Bonneau (1947). — Ann. Pts et Ch. Sept. oct. 1947, pp. 609-653.

[2] R. Hill (1950). — *A theoretical investigation of the effect of specimen size in the measurement of hardness*. Phil Mag. *41*, pp. 745-753.

[3] J. Ostrowska (1967). — *Solution of indentation problem with envelope of slip lines*. Bul. Ac. Pol. Sc. série Sc. tech. *15*, 10, pp. 603-611.

INDEX ALPHABÉTIQUE

Les numéros renvoient au chapitre (chiffres romains), et au paragraphe dans le chapitre (chiffres arabes).

A

Anisotropie - I.2.

B

BONNEAU (*théorème de*) - V - Annexe § *b*.
Butée - IV.24.

C

CAQUOT - I.2.
Caractéristiques (*lignes*) - IV.6.
Caractéristiques (*Méthode des*) - IV.8.
Caractéristiques (*Relation le long des — des contraintes*) - IV.7.
Caractéristiques (*Relation le long des — des vitesses*) - IV.13.
Charge limite - II.3.
Charges limites (*Théorie des*) - V.
Cinématique (*Méthode*) - V.4.
Comportement (*loi de*) - I.5.
Conditions à la limite cohérentes - III.5.
Convexité (*de la fonction de charge*) - I.2.
COULOMB (*Critère de*) - I.2.
— (*Prisme de*) - V.9.
Courbe intrinsèque - I.2.
Critère d'écoulement - I.1.
— de plasticité - I.1.

D

Déformation contenue - II.2.
— permanente - I.1.
— plane - IV.
— plastique - I.3.
Dilatation (*Angle de*) - I.8.
Discontinuité du champ de contraintes - IV.16.
Discontinuité de la vitesse - IV.15.
Dislocations - I.4.
Domaine d'élasticité (*initial, actuel*) - II.3.
Ductile (*Matériau, rupture*) - I.2.

E

Ecoulement libre - II.2.
Ecrouissage - I.1.
Etats correspondants (*Principe des*) - IV.23.

F

FELLENIUS (*Méthode de*) - V.9.
Fonction de charge - I.1.
Fragile (*Matériau, rupture*) - I.2.
Frontière d'écoulement - II.3.
— d'élasticité - II.3.

G

GEIRINGER (*Equations de*) - IV.13.
GVOZDEV (*Théorème de*) - V.3.

H

HAAR-KARMAN (*Hypothèse de*) - IV - Annexe § *b*.
HENCKY (*Relations de*) - IV.9.
— (*Réseau de*) - IV.10.
— (*Théorème de*) - IV.10.
Homogène (*Champ*) - IV.10.

I

Irréversibilité - I.1.
Isotropie - I.2.

K

KÖTTER (*Equations de*) - IV.7.

L

Licite (*Champ de contraintes*) - V.2.
— (*Champ de vitesses*) - V.2.
— (*Chargement*) - V.3.
Limite d'élasticité (*d'un système*) - II.3.

M

MANDEL - IV.4.
MISÈS (*Critère de*) - I.2.
MOHR - I.2.

N

Non-homogène (*Matériau - en déformation plane*) - IV. Annexe § *a*.

P

Paramètres de chargement - III.5.
Plasticité parfaite - I.1.
Potentiel plastique - I.6.
Poussée - IV.24.
PRANDTL-REUSS (*Loi de*) - II.1.
Principe de minimum (*contraintes*) -V.6.
— de minimum (*vitesses*) - V.6.
Puissance dissipée - V.2.

R

RANKINE (*Equilibre de*) - IV.24.
Rigide-plastique (*Matériau*) - III.1.
Rupture - I.2.

S

SAINT-VENANT (*Hypothèse de*) - I.5.
Semi-homogène (*Champ*) - IV.10.
Seuil (*de plasticité*) - I.1.
SOKOLOVSKI - IV.24.
Solution cinématique - V.7.
— complète - V.7.
— statique - V.7.
Standard (*Matériau*) - I.8.
Statique (*Méthode*) - V.3.
Striction - II.2.
Surface de charge - I.1.
Symétrie axiale (*Problème d'écoulement libre à*) - IV.1, IV Annexe § *b*.

T

Travail maximal (*Principe du*) - I.6.
TRESCA (*Critère de*) - I.2.

U

Unicité (*du champ de contraintes*) - III.6.

V

Viscoplasticité - I.5.

Imprimerie Marcel Bon - 70001 Vesoul
Dépôt légal : 4e trimestre 1973
N° d'Éditeur : 2880
N° d'Imprimeur : 1883