

# THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE L'ANALYSE LIMITE<sup>(1)</sup>

par

J. SALENÇON

Maitre de Conférences à l'École Polytechnique

## SOMMAIRE

Partant d'une structure en matériau élastique parfaitement plastique on introduit le problème de l'équilibre limite et le passage au schéma de comportement rigide plastique. Les conditions aux limites sont posées en terme de paramètres de chargement, seule forme adaptée à ce type de problème. On présente sous les hypothèses de convexité du critère de plasticité et de normalité de la règle d'écoulement les théorèmes fondamentaux de l'analyse limite dans le cas du milieu continu; approche statique conduisant à une approximation par l'intérieur de la frontière d'écoulement du système, approche cinématique conduisant à une approximation par l'extérieur. Les mêmes théorèmes sont valables pour les structures formées de poutres ou de plaques en utilisant les contraintes et déformations généralisées. Un exemple d'application à une structure simple est donné.

## 1. — INTRODUCTION

Monsieur COURBON a montré dans la conférence précédente que le « calcul à la rupture » est une pratique fort ancienne, utilisée dans de nombreux domaines intéressant l'art de l'ingénieur (calcul des structures, stabilité des pentes, calculs de fondations...).

Il n'y a, par contre, guère plus d'une vingtaine d'années qu'une théorie globale recouvrant ces diverses méthodes a été élaborée par DRUCKER, GREENBERG et PRAGER, d'une part, HILL, de l'autre — on pourra se reporter à KOITER (1960) pour une bibliographie détaillée sur le sujet —. Les conditions d'application et les hypothèses nécessaires ont alors été précisées, dont en particulier le principe du travail maximal (HILL, 1950), fondement de cette théorie, appelée *Théorie des charges limites*.

Le développement récent de certains domaines de l'analyse mathématique permet de donner maintenant un énoncé plus concis et peut-être même plus facile à appréhender, de la théorie dans sa forme générale. C'est celui que nous présentons ici.

## 2. — POSITION DU PROBLEME

On considère une structure en matériau élastique parfaitement plastique (c'est-à-dire sans écrouissage),

soumise à des chargements que nous supposons définis par des paramètres  $Q_i$ , en nombre fini, auxquels ils varient proportionnellement. Cela est vérifié dans tous les cas pratiques. C'est, par exemple, le cas d'une structure soumise à des forces actives concentrées variables indépendantes, ou d'une structure soumise sur une partie de sa surface à une pression uniforme variable, etc... Un chargement est donc représenté par un vecteur  $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$  d'un espace vectoriel à  $n$  dimensions.

On désignera par  $q_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), les vitesses des paramètres de déformation de la structure associés aux  $Q_i$  dans l'expression de la puissance des forces extérieures (théorème des puissances virtuelles, cf. Annexe).

Partant du chargement nul, faisons subir à cette structure un processus de chargement dans lequel les  $Q_i$  croissent proportionnellement à un même facteur  $\lambda$  (trajet de charge radial). On distingue alors les phases suivantes dans le comportement de la structure :

$0 \leq \lambda < \lambda^0$  : déformations purement élastiques.

$\lambda = \lambda^0$  : le critère de plasticité est atteint pour la première fois en un ou plusieurs points. ( $\lambda^0$  est la limite d'élasticité initiale du système).

$\lambda^0 < \lambda < \lambda^1$  : les zones plastiques se développent; leur déformation est contenue par la déformation des zones restées élastiques, et est donc bien déterminée.

(1) Conférence prononcée, le 4 avril 1973, à la Salle Chaleil, 11, avenue Hoche, Paris-8<sup>e</sup>.

$\lambda = \lambda^1$  : les zones plastiques sont suffisamment développées pour que leur déformation ne soit plus contenue par celle des zones restées élastiques (le facteur arbitraire positif  $\lambda$ , cf. §3, n'est plus déterminé en chaque point). C'est l'écoulement plastique libre commençant.

Dans certains cas, le stade de l'écoulement libre commençant est atteint sans que des changements de géométrie non négligeables se produisent auparavant dans la structure. On voit alors que si on continuait à ne pas tenir compte des changements de géométrie, on trouverait que la déformation de la structure se poursuivrait indéfiniment sous charge constante; ceci serait évidemment incohérent car les changements de géométrie ne seraient donc plus négligeables. Mais on peut dire qu'à partir de  $\lambda^1$ , ou du chargement correspondant  $Q^1$ , de grandes déformations de la structure deviennent possibles sans grande variation de la charge appliquée (parfois même avec diminution, d'où instabilité).

Dans les autres cas, l'écoulement plastique libre n'est qu'un état limite que l'on n'atteindrait qu'après une déformation infinie de la structure. Mais on constate souvent (problème de la flexion simple, par exemple; mais ceci n'est pas général) que la déformation de la structure reste de l'ordre de celle à la limite d'élasticité — donc en général négligeable — tant que le chargement n'est pas très voisin (5 % près, par exemple), de la charge d'apparition de l'écoulement libre. Ceci justifie donc le calcul de ce chargement en supposant les changements de géométrie négligeables.

Nous appellerons *chargement limite*, le chargement d'apparition de l'écoulement plastique libre calculé en supposant les changements de géométrie négligeables. Dans les cas ci-dessus, l'intérêt pratique de déterminer ces chargements tient au fait que, pour une structure en matériau parfaitement plastique, ils correspondent à peu près à l'apparition des grandes déformations à partir desquelles la structure sera souvent considérée comme inutilisable.

Pour tout trajet de charge, il est possible de définir comme ci-dessus un chargement limite  $Q^1$ .

On démontre que, compte-tenu de l'hypothèse des changements de géométrie négligeables, les chargements limites sont indépendants des propriétés élastiques du matériau constitutif, et peuvent donc être déterminés sur la structure rigide-plastique associée à la structure de départ.

Pour plus de détails sur ces divers points, on pourra se reporter par exemple à MANDEL, 1966; COURBON, 1971; RADENKOVIC et SALENÇON, 1972; SALENÇON, 1974.

Le problème que l'on se pose désormais est la détermination des chargements limites, chargements qui correspondent à la première déformation de la structure rigide-plastique associée.

Il importe de remarquer la nature particulière de ce problème apparenté à un problème de recherche de valeurs propres (RADENKOVIC et NGUYEN, 1972). Ceci a été fort bien vu par les ingénieurs, peut-être moins bien par certains mécaniciens qui ont alors conservé une formulation des données à la limite mal adaptée à ce type de problèmes.

La théorie des charges limites fournit des méthodes de type variationnel pour la détermination des char-

gements limites, dans lesquelles on ne considère que la structure rigide parfaitement plastique associée.

Nous la présenterons dans le cas du milieu continu tridimensionnel, mais on verra, en fait, que la transposition au cas de milieux unidimensionnels ou bidimensionnels (poutres, plaques...), ne présente aucune difficulté, pour peu que les mêmes hypothèses de départ soient vérifiées, permettant l'utilisation du même formalisme mathématique simple.

### 3. — LOI DE COMPORTEMENT PLASTIQUE PRINCIPE DU TRAVAIL MAXIMAL

D'après ce qui a été dit plus haut, nous n'utiliserons, dans toute la suite, que le schéma de comportement rigide parfaitement plastique. La vitesse de déformation se réduit donc à la vitesse de déformation plastique.

Nous rappelons que la définition du comportement plastique comporte deux aspects a priori distincts :

- le critère de plasticité,
- la loi de comportement plastique.

Soit  $\underline{\sigma}$  le tenseur des contraintes, nous désignons par  $f(\underline{\sigma})$  le critère de plasticité :

(1)  $f(\underline{\sigma}) \leq 0$  est le domaine d'élasticité du matériau.

Il semble que la *convexité* de la fonction  $f$  puisse être raisonnablement admise pour la plupart des matériaux usuels, indépendamment du fait qu'ils satisfassent, ou non, le principe du travail maximal présenté dans la suite.

Pour le matériau parfaitement plastique considéré ici, les déformations plastiques ne peuvent être non nulles que si  $f(\underline{\sigma}) = 0$  et  $\dot{f}(\underline{\sigma}) = 0$ , il n'est pas possible a priori de préciser plus la loi de comportement qui s'écrit :

$$(2) \quad \underline{v} = 0 \text{ si } f < 0 \text{ ou si } f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0 \\ \underline{v} = 0 \text{ si } f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0$$

où  $\underline{v}$  désigne le tenseur des vitesses de déformation.

On fait souvent l'hypothèse que les matériaux obéissent au principe du travail maximal de HILL (1950) que l'on peut énoncer :

soit, pour un élément, un tenseur de contrainte  $\underline{\sigma}$  à la limite d'écoulement,  $f(\underline{\sigma}) = 0$ ,  $\underline{v}$  un tenseur vitesse de déformation plastique correspondant ;  $\underline{\sigma}^*$  un tenseur tel que  $f(\underline{\sigma}^*) \leq 0$ , (tenseur contrainte plastiquement admissible), alors :

$$(3) \quad (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) v_{ij} \geq 0 \\ (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) \underline{v} \geq 0$$

cela implique la *convexité* de la fonction  $f$  et  $\underline{v}$  est dirigé suivant une *normale extérieure* à la surface  $f(\underline{\sigma}) = 0$  au point  $\underline{\sigma}$  :

si la surface est régulière au point  $\underline{\sigma}$  (critère de Von Mises, par exemple), cela s'écrit :

$$(4) \quad v = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}, \quad \lambda \geq 0$$

pour comprendre aussi le cas d'une surface présentant un point conique (critère de Tresca, par exemple) :

$$(5) \quad v \in \lambda \partial f(\underline{\sigma}), \quad \lambda \geq 0$$

qui exprime que  $v$  appartient au cône des normales extérieures à la surface au point  $\underline{\sigma}$ .

La loi de comportement se trouve ainsi précisée :

$$(6) \quad \begin{aligned} v \in \lambda \partial f(\underline{\sigma}), \quad \lambda \geq 0 \quad \text{si } f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 \\ v = 0 \quad \text{autres cas.} \end{aligned}$$

D'après les résultats expérimentaux, le principe du travail maximal semble vérifié pour les matériaux dont le critère de plasticité est indépendant de la contrainte moyenne. C'est le cas des métaux ductiles, pour lesquels le principe peut d'ailleurs être démontré à partir de considérations sur les mécanismes élémentaires de la déformation plastique (MANDEL, 1966), et pour les sols d'angle de frottement interne nul.

Nous faisons, dans la suite, l'hypothèse que le matériau satisfait le principe du travail maximal; on dit aussi, de façon équivalente, que le comportement plastique satisfait les règles de CONVEXITÉ et NORMALITÉ.

#### 4. — MÉTHODE STATIQUE DE DÉTERMINATION DES CHARGEMENTS LIMITES

##### 4.1. — Définitions

*Champ de contraintes licite.*

On dit qu'un champ de contraintes  $\underline{\sigma}$  est licite s'il est statiquement admissible (cf. Annexe) et plastiquement admissible, c'est-à-dire s'il ne viole le critère de plasticité en aucun point.

$$(7) \quad \text{licite ou S.P.A.} = \left\{ \begin{aligned} f(\underline{\sigma}) \leq 0 \quad \text{S.A.} \\ \end{aligned} \right. \text{partout.}$$

*Chargement licite.*

Un chargement auquel il correspond un champ de contraintes licite est appelé chargement licite.

Il faut bien remarquer qu'à un même chargement  $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$  correspondent plusieurs (en fait, une infinité) champs de contraintes qui se déduisent les uns des autres par addition de champs d'auto-contraintes (pour le processus étudié). Ainsi un chargement est licite si, parmi tous ces champs de contraintes, il en existe au moins un qui est licite.

L'idée d'étudier les chargements licites est bien naturelle : en effet, les chargements que la structure peut supporter sont nécessairement de ce type, ainsi que les chargements limites. On va donc considérer

les chargements licites et caractériser, parmi eux, les chargements limites que nous cherchons à déterminer.

##### 4.2. — Convexe des chargements licites

Désignons par  $K$  l'ensemble des chargements licites ( $K \subset \mathbb{R}^n$ ). Cet ensemble est convexe (1).

Ceci résulte de façon immédiate de la convexité de  $f$ .

##### 4.3. — Une propriété des chargements limites

Soit  $Q$  un chargement limite. Par définition il lui correspond une solution du problème d'écoulement libre, c'est-à-dire :

un champ  $\underline{\sigma}$  licite,

un champ  $v$  licite, associé à un  $\underline{\sigma}$  en tout point par la loi de comportement plastique;  $\dot{q}(v)$  (cf. Annexe) est la vitesse des paramètres de déformation correspondante.

Soit, d'autre part,  $Q^*$  un chargement licite quelconque,  $\underline{\sigma}^*$  un champ licite qui lui correspond.

Alors, on a, par application du théorème des puissances virtuelles et du principe du travail maximal :

$$(8) \quad (Q - Q^*) \dot{q}(v) = \int_V (\underline{\sigma} - \underline{\sigma}^*) v \, dV \geq 0$$

Ce résultat s'appelle le théorème du travail maximal.

Il s'ensuit que :

*tout chargement limite est nécessairement sur la frontière de  $K$ .*

De plus, la vitesse de déformation de la structure  $\dot{q}$ , correspondante, est normale, en ce point, à cette frontière (fig. 1).

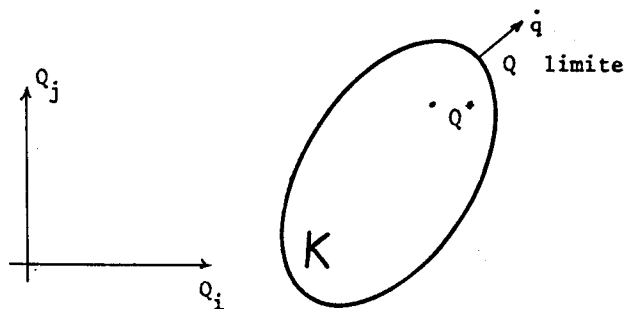


Fig. 1.

Réciproquement, on démontre (2) que tout chargement de la frontière de  $K$  est un chargement limite.

Ainsi, la frontière de  $K$  est la frontière d'écoulement de la structure, ensemble des chargements limites.

Il s'ensuit que les chargements limites sont indépendants des contraintes initiales, et, plus généralement, du trajet suivi pour les atteindre.

(1) C'est-à-dire que si deux chargements  $Q$  et  $Q'$  sont licites, tous les chargements du segment  $QQ'$  sont licites.

(2) En toute rigueur, sous réserve d'une hypothèse supplémentaire « d'existence » (SALENÇON, 1972).

#### 4.4. — Conséquences. La méthode statique

L'ensemble  $K$ , limité par la frontière d'écoulement, apparaît donc comme le *domaine de sécurité de la structure*. C'est-à-dire que tout chargement  $Q$ , tel qu'il existe un champ de contrainte licite qui l'équilibre (c.à.d. tout chargement licite), peut être supporté par la structure, indépendamment du trajet de charge, intérieur à  $K$ , suivi pour l'atteindre.

Remarquons que, malgré son aspect intuitif, ce résultat n'a pu être démontré qu'avec l'hypothèse, faite au départ, du principe du travail maximal.

D'où la méthode statique de détermination de la frontière d'écoulement du système. On est conduit, par application de la propriété de convexité de  $K$ , à une *approximation par l'intérieur* de cette frontière (fig. 2).

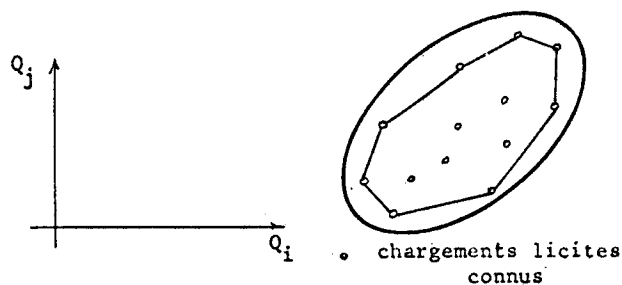


Fig. 2.

Dans le cas d'un paramètre de chargement unique  $Q$ , le convexe  $K$  se réduit à un segment et les chargements limites sont les deux extrémités (fig. 3) de ce segment. (Problèmes de poussée et butée, par exemple en mécanique des sols).

Tous les résultats précédents se transposent aisément.

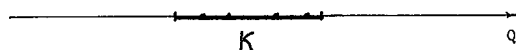


Fig. 3.

Si, comme cela est un cas fréquent, on ne s'intéresse qu'au chargement limite correspondant à l'extrémité de droite du segment  $K$  (solicitation, ou plus exactement déformation de la structure, de signe imposé), alors on obtient l'énoncé bien connu de la méthode statique :

$$(9) \quad Q \text{ limite} = \max \{ Q(\sigma) \mid \sigma \text{ licite} \}$$

### 5. — MÉTHODE CINÉMATIQUE

#### 5.1. — Définitions

*Tenseur vitesse de déformation plastiquement admissible. Puissance dissipée.*

On dit qu'un tenseur vitesse de déformation  $\underline{v}$  est plastiquement admissible (P.A.) s'il est possible de

trouver un tenseur contrainte  $\underline{\sigma}$  plastiquement admissible auquel il soit associé par la loi de comportement.

$$(10) \quad \underline{v} \text{ P.A.} \quad \text{si} \quad \exists \underline{\sigma} : f(\underline{\sigma}) = 0, \quad \text{et} \quad \underline{v} \in \lambda \partial f(\underline{\sigma}), \\ \lambda \geq 0$$

c'est-à-dire si  $\underline{v}$  peut être un tenseur vitesse de déformation plastique.

Le tenseur  $\underline{\sigma}$  associé par (10) à  $\underline{v}$ , P.A., n'est pas nécessairement unique, mais on démontre, sans difficulté, en s'appuyant sur le principe du travail maximal, que le produit  $\underline{\sigma} \cdot \underline{v}$  a une expression univoque  $\pi(\underline{v})$  que l'on appelle *la puissance dissipée*.

*Champ de vitesses de déformation licite.*

Un champ de vitesses de déformation est *licite* ou *cinématiquement et plastiquement admissible* (C.P.A.) s'il est C.A. (voir Annexe), et s'il est P.A. en tout point.

On appelle puissance dissipée dans un tel champ, l'intégrale :

$$(11) \quad P(\underline{v}) = \int_V \pi(\underline{v}) dV$$

L'idée de s'intéresser aux champs de vitesses de déformation licites est, elle aussi, naturelle, puisque les champs correspondant à l'apparition de l'écoulement libre dans la structure rigide plastique sont nécessairement de ce type. On va caractériser les chargements licites par rapport à ces modes de déformation; on obtiendra ainsi une autre définition du convexe  $K$  et un autre moyen de déterminer la frontière de  $K$ , c'est-à-dire les chargements limites.

#### 5.2. — Une propriété des chargements licites

Soit  $Q^*$  un chargement licite,  $\sigma^*$  un champ de contraintes licite correspondant.

Soit  $\underline{v}$  un champ de vitesses de déformation licite. Alors, on a :

$$(12) \quad P(\underline{v}) \geq Q^* \dot{q}(\underline{v})$$

Ainsi la puissance d'un chargement licite dans n'importe quel champ de vitesses de déformation licite n'est pas supérieure à la puissance dissipée dans ce champ.

On a, en effet, par application du théorème des puissances virtuelles et du principe du travail maximal :

$$P(\underline{v}) = \int_V \pi(\underline{v}) dV \geq \int_V \underline{\sigma}^* \cdot \underline{v} dV = Q^* \dot{q}(\underline{v})$$

Si  $Q^*$  est chargement limite, il y a égalité entre les deux puissances dans (12), pour le ou les champs  $\underline{v}$  de la solution d'écoulement libre correspondante.

Réciproquement, on démontre <sup>(1)</sup> qu'un chargement tel que (12) soit satisfait pour tout champ  $\underline{v}$  licite avec égalité pour certains champs  $\underline{v}$  licites, non nuls, est un chargement limite.

(1) Sous la même hypothèse qu'au § 4.3.

### 5.3. — Conséquences. La méthode cinématique

Les résultats précédents montrent que, *étant donné un champ de vitesses de déformation licite, tout chargement tel que sa puissance y soit supérieure à la puissance dissipée est extérieur au domaine de sécurité de la structure.*

Comme celui de la méthode statique, cet énoncé de la *méthode cinématique* a encore un aspect intuitif qui ne doit pourtant pas faire oublier les hypothèses sur lesquelles il est fondé, c'est-à-dire le principe du travail maximal.

On est ainsi conduit, pour la détermination de la frontière d'écoulement, à une *approximation par l'extérieur* (fig. 4) :

pour chaque champ  $v$  licite, le demi-espace défini dans l'espace des chargements  $Q$  ( $R^n$ ) par :

$$(13) \quad Q\dot{q}(v) - P(v) \geq 0$$

est extérieur ou tangent à  $K$ .

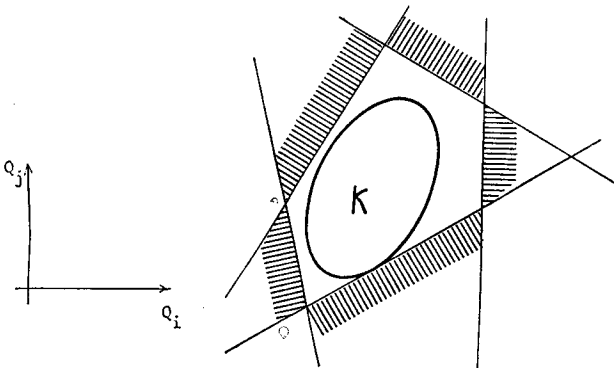


Fig. 4.

### 5.4. — Cas d'un seul paramètre de chargement

Dans le cas d'un paramètre de chargement unique  $Q$ , les résultats précédents se transposent comme indiqué sur la figure 5.



Fig. 5.

Si l'on ne s'intéresse qu'à la détermination du chargement limite correspondant à l'extrémité droite de  $K$ , on aboutit à l'énoncé bien connu de la méthode cinématique :

$$(14) \quad Q \text{ limite} = \min \{ P(v) \mid v \text{ licite, } \dot{q}(v) = 1 \}$$

## 6. — COMMENTAIRES

Les résultats précédents ont mis en évidence l'intérêt du calcul aux états limites. En effet, *sous les hypothèses indiquées*, les chargements limites sont

indépendants des contraintes initiales, souvent bien difficiles à connaître en pratique, indépendants des caractéristiques élastiques des matériaux, indépendants de l'histoire du chargement subi par le système. Les méthodes statique et cinématique permettent la détermination de valeurs par défaut et par excès, en suivant des modes de raisonnement naturels.

Nous n'avons pas voulu restreindre la présentation au cas d'un processus de chargement dépendant d'un paramètre unique. En effet, si dans ce cas la valeur limite du paramètre peut être interprétée comme le coefficient de sécurité de la structure par rapport au système de charges considéré, le cas de plusieurs paramètres permet de définir un domaine de sécurité sur lequel il est alors très aisé, par des affinités opérées suivant les axes  $Q_i$ , de tenir compte des coefficients de pondération différents suivant les types de chargement.

Dans sa formulation pour le milieu continu, la théorie des charges limites intervient dans de nombreux problèmes, et interprète des méthodes de calcul telles que, en Mécanique des Sols <sup>(1)</sup>, le prisme de Coulomb, les cercles de Fellenius, la méthode des caractéristiques pour les problèmes de déformation plane (MANDEL, 1942; SOKOLOVSKI, 1965; HILL, 1950).

On voit aisément, d'autre part, en ce qui concerne les structures constituées de poutres, que le concept classique de *rotule plastique*, dont la rotation devient indéterminée quand le moment fléchissant atteint une valeur limite dans le sens correspondant, définit pour le moment fléchissant pris comme contrainte généralisée  $\Sigma$ , et pour la déformation de rotation, prise comme déformation généralisée  $\mathcal{V}$ , un critère de plasticité convexe et une loi de comportement satisfaisant la règle de normalité. Les résultats se transposent donc et l'on obtient les méthodes bien connues du calcul à la rupture des systèmes de poutres, débouchant sur des problèmes de programmation mathématique, dont les applications se sont considérablement développées avec l'apparition des moyens de calculs puissants. Il n'y a évidemment aucune difficulté à faire intervenir dans la théorie d'autres contraintes et déformations généralisées (effort normal...). Il en est de même pour les plaques.

Il importe de signaler que la méthode cinématique est d'usage beaucoup plus fréquent que la méthode statique. Cela tient au fait qu'il est, en général, assez facile d'imaginer et de construire des modes de déformation licites de la structure; on peut même les faire dépendre de plusieurs paramètres — c'est, par exemple, le cas de la méthode citée par M. COURBON — sur lesquels on minimisera ensuite la puissance dissipée; sans explorer tous les modes de déformation licites, on aboutit ainsi, avec un peu d'habitude, à des approximations valables des charges limites. Par contre, la construction de champs de contrainte licites est bien souvent malcommode, la vérification de la condition  $f \leq 0$  en tout point de la structure étant la cause de ces difficultés : il convient aussi d'être très prudent dans l'utilisation de la discrétisation car on a montré que certaines méthodes de calcul discrétisées, d'apparence statique, sont, en fait, des méthodes cinématiques

<sup>(1)</sup> Du moins, en ce qui concerne les sols d'angle de frottement interne nul; pour  $\varphi \neq 0$ , le principe du travail maximal n'étant plus vérifié, on ne dispose que de théorèmes moins puissants (RADENKOVIC, 1961).

(CROC, MICHEL et SALENÇON, 1971), ce qui, sans diminuer aucunement leur valeur, est important en ce qui concerne l'interprétation des résultats obtenus.

## 7. — EXEMPLE D'APPLICATION A UNE STRUCTURE FORMÉE DE POUTRES

A titre d'illustration, nous prendrons l'« exemple d'école » (cf. MANDEL, 1969), représenté à la figure 6, où l'on se propose de déterminer la valeur limite de la force  $Q$  appliquée à la console appuyée. Nous adoptons le concept de rotule plastique, et nous supposons les moments limites égaux à  $\pm M$ .

### 7.1. — Méthode statique.

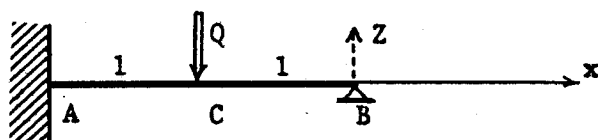


Fig. 6.

Prenant la réaction en B pour inconnue hyperstatique  $Z$ , on obtient toutes les distributions de moment fléchissant S.A. :

$$\text{sur AC : } M(x) = Z(2l - x) - Q(l - x)$$

$$\text{sur CB : } M(x) = Z(2l - x) \quad Z \text{ quelconque}$$

Ces distributions sont licites si  $-M \leq M(x) \leq +M$  équivalant ici à :

$$(15) \quad \begin{aligned} -M &\leq M(0) = 2Zl - Ql \leq +M \\ -M &\leq M(l) = Zl \leq +M \end{aligned}$$

d'où pour  $(Z, Q)$  le domaine permis représenté à la figure 7 : c'est le convexe H des distributions de moment fléchissant licites. Le convexe K est le segment  $|Q| \leq 3M/l$ , projection de H sur l'axe  $Q$ .

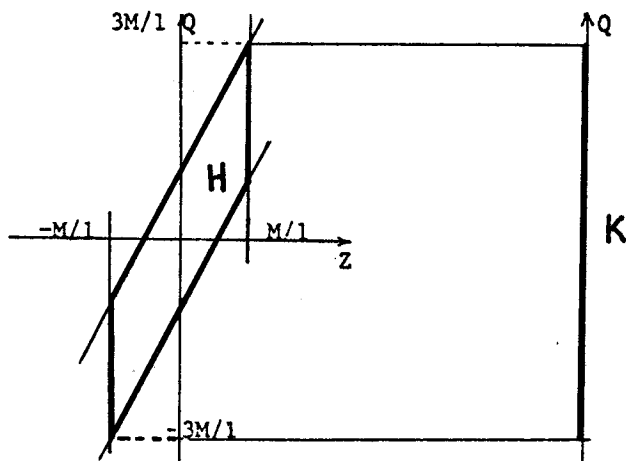


Fig. 7.

La charge limite positive n'est autre que  $\max \{Q\}$ , égale ici à  $3M/l$ . On voit qu'elle correspond à la résolution du programme linéaire :  
«  $\max Q$  sous les contraintes (15) ».

### 7.2. — Utilisation de la méthode cinématique.

Plaçons deux rotules plastiques, l'une en A, l'autre en un point P entre C et B,  $CP = \alpha l$ .

$\omega$  étant la vitesse de rotation de la rotule en A, la vitesse de la rotation de la rotule en C est  $2\omega/(1 - \alpha)$

$$\text{puissance des forces extérieures : } Q\dot{q} = Q\omega l$$

$$\text{puissance dissipée : } P(v) = M\omega [1 + 2/(1 - \alpha)]$$

$$(12) \text{ s'écrit : } Q\omega l \geq M\omega \frac{3 - \alpha}{1 - \alpha}$$

avec  $\omega$  positif on obtient :

$$Q \leq \frac{M}{l} \frac{3 - \alpha}{1 - \alpha}$$

majoration de la charge limite positive, dont le minimum obtenu pour  $\alpha = 0$  est  $3M/l$ .

$$Q \leq 3M/l$$

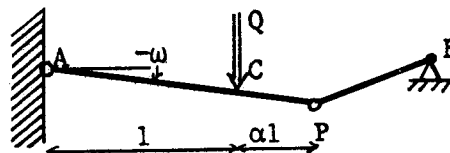


Fig. 8.

### 7.3. — Commentaires.

La méthode statique, sur cet exemple, a fourni directement la valeur exacte de la charge limite. Ce résultat tient au fait que, pour ce type de structure et ce type de chargement, il est possible d'explorer tout le convexe K. Cette circonstance est exceptionnelle et il est beaucoup plus courant de n'obtenir par la méthode statique qu'une approximation par défaut de la charge limite.

La méthode cinématique a fourni la valeur exacte de la charge limite. Cela tient au fait que, sans minimiser sur tous les modes de déformations licites, nous avons travaillé sur un sous-ensemble qui contenait les modes de déformation de la solution d'équilibre limite.

La minimisation analytique que nous avons effectuée, n'est évidemment pas utilisée dans la pratique pour des problèmes un peu compliqués; pour utiliser les possibilités des calculateurs, on place, a priori, dans la structure, un nombre excédentaire de rotules plastiques, et l'on minimise sur les modes de déformation licites correspondants, ce qui conduit toujours, pour les structures formées de poutres, à un problème de programmation linéaire.

J. SALENÇON.

## ANNEXE

### RAPPELS SUR LE THÉOREME DES PUISSANCES VIRTUELLES

#### A.1. — Champ de contraintes statiquement admissible.

On dit qu'un champ (une « distribution ») de contraintes  $\sigma$  est *statiquement admissible* (S.A.), pour la structure étudiée et pour le processus considéré, s'il satisfait :

- les équations d'équilibre,
- les conditions à la limite sur les contraintes, pour un chargement de la structure appartenant au processus étudié (c'est-à-dire proportionnel aux  $n$  paramètres  $Q_i$ ).

#### A.2. — Champ de vitesses de déformation cinématiquement admissible.

On dit qu'un champ de vitesses de déformation  $v$  est *cinématiquement admissible* (C.A.).

- s'il dérive d'un champ de vitesses  $u$

$$v_{ij} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

- si ce champ de vitesses satisfait les conditions à la limite sur les vitesses pour le processus étudié.

#### A.3. — Théorème des puissances virtuelles.

On démontre, en mécanique des milieux continus, le théorème suivant :

- pour tout champ de contraintes  $\sigma$  S.A.,
- pour tout champ de vitesses de déformation  $v$  C.A.,

la somme des puissances des forces extérieures est égale à la somme des puissances de déformation des éléments du système :

$$\int_s \tau u^* dS + \int_v p F \cdot u^* dV = \int_v \sigma_{ij} v_{ij} dV = \int_{v=\underline{=}} \sigma \cdot v dV \quad (2)$$

Dans le cas présent, où le processus de chargement dépend de  $n$  paramètres  $Q_i$ , le théorème des puissances virtuelles s'écrit :

$$\int_{v=\underline{=}} \sigma \cdot v^* dv = \sum_{i=1}^n Q_i(\sigma) \dot{q}_i(v) = Q(\sigma) \dot{q}(v) \quad (3)$$

où les  $q_i$  sont donc les vitesses des paramètres de déformation associés aux  $Q_i$  paramètres de chargement, dans l'expression de la puissance.

## BIBLIOGRAPHIE

- COURBON (J.). — Plasticité appliquée au calcul des structures. Cours E.N.P.C., Paris, 1971.
- CROC (M.), MICHEL (G.) et SALENÇON (J.). — Application de la programmation mathématique au calcul à la rupture des structures. *Int. J. Solids et Structures*, 1971, 7, n° 10, 1317-1332.
- HILL (R.). — The Mathematical Theory of Plasticity. Clarendon Press, Oxford, 1950.
- KOITER (W. T.). — General theorems for elastic-plastic solids. In *Progress in solid mechanics*, ed. Sneddon and Hill, North Holland, Pub. Cy. Amsterdam, 1960.
- MANDEL (J.). — Équilibre par tranches planes des solides à la limite d'écoulement. *Thèse*, imp. Louis Jean, Gap, 1942, cf. aussi Travaux, n° Juin-Juillet 1943.
- MANDEL (J.). — Cours de Mécanique des Milieux Continus. Tome II, Gauthier Villars, Paris, 1966.
- MANDEL (J.). — Cours de Science des Matériaux. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1969.
- RADENKOVIC (D.). — Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée. C.R.Ac.Sc. Paris, 1961, 252, 4103-4104.
- RADENKOVIC (D.) et NGUYEN (Q. S.). — La dualité des théorèmes limites pour une structure en matériau rigide plastique standard, 1972, à paraître in *Arch. of Mech.*
- RADENKOVIC (D.) et SALENÇON (J.). — Équilibre limite et rupture en mécanique des sols. *Bul. Liais. Labo. Pts et Ch.* : « Le comportement des sols avant la rupture », Juin 1972, 296-302.
- SALENÇON (J.). — Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols. Eyrolles, Paris, 1974.
- SOKOLOVSKI (V. V.). — Statics of granular media. Pergamon Press, 1965.