

CONGRÈS FRANÇAIS DE MÉCANIQUE  
DE POITIERS



17-21 SEPTEMBRE 1973



ANALYSE LIMITE PAR UNE METHODE D'ELEMENTS FINIS

par

M. FRÉMOND - J. SALENÇON



## 1 - INTRODUCTION

Les théorèmes statique et cinématique de l'analyse limite fournissent une approche variationnelle par défaut ou par excès des chargements limites.

Dans le cas des problèmes plans, ou de révolution, l'application de ces théorèmes se fait le plus couramment soit en utilisant la méthode des caractéristiques pour l'obtention de solutions statiques ou cinématiques, soit en construisant de telles solutions, de façon plus ou moins artisanale, au moyen de champs discontinus : méthode des cercles de glissement ou des surfaces de glissement par exemple, pour le procédé cinématique. Cette dernière méthode est la seule utilisée pratiquement pour l'étude des problèmes réellement tridimensionnels.

Dans le présent article, nous nous proposons de dégager une autre méthode d'analyse limite basée sur le théorème cinématique, et utilisant la technique des éléments finis, qui puisse être employée comme la méthode des surfaces de glissement et vienne compléter celle-ci. L'étude menée sur un exemple, en déformation plane dans le cas du matériau de Misès, montre l'importance du rôle joué par l'expérience acquise au moyen des solutions déjà connues, pour l'élaboration d'une telle méthode: nécessité d'introduire des discontinuités par exemple. On aboutit, dans le cas général, à un problème de programmation convexe.

Il convient de rapprocher cette tentative, des développements plus anciens de l'analyse limite des structures formées de barres, débouchant sur des problèmes de programmation mathématique (cf. GAVARINI, 1972) ; de même pour les plaques où, outre des méthodes classiques éprouvées (cf. SAVE, 1972), on fait maintenant appel à la méthode des éléments finis aboutissant après quelques approximations à des problèmes de programmation linéaire : HERRMANN (1967), ANDERHEGGEN (1969,1970), ANDERHEGGEN et KNÖPFEL (1972) qui fournissent une formulation de ce type de modèle pour les problèmes d'analyse limite en général. Enfin, il faut aussi signaler l'utilisation de la méthode des éléments finis pour des problèmes d'optimisation en contrainte plane (MAIER et al. 1972).

## 2 - RAPPEL DES THÉORÈMES DE L'ANALYSE LIMITE.

Pour un matériau satisfaisant le principe du travail maximal (critère de plasticité convexe et "normalité" de la règle d'écoulement), et pour un système soumis à un processus de chargement à  $n$  paramètres  $Q_i$  (vecteur chargement  $\underline{Q}$ ), les résultats de la théorie des charges limites se formulent comme suit (SALENÇON, 1972) :

Toute solution d'équilibre limite du système (champ de contrainte  $\sigma$ , champ de vitesse de déformation  $d$ ), rend minimale la fonctionnelle :

$$I(\sigma, d) = P(d) - \underline{Q}(\sigma) \dot{q}(d) \quad (1)$$

sur l'ensemble  $H$  des champs de contrainte statiquement et plastiquement admissibles (S.P.A.) et l'ensemble  $H'$  des champs de vitesse de déformation cinématiquement et plastiquement admissibles (C.P.A.).

$P(d)$  désigne la puissance dissipée dans  $d$ .

Le chargement  $\underline{Q}$  correspondant à une telle solution est un chargement limite et  $\dot{q}$  est la vitesse de déformation du système associée.

On en déduit le théorème statique :

La frontière d'écoulement du système, lieu des chargements limites, est la frontière du convexe  $K$  des chargement qui peuvent être équilibrés par un champ de contrainte S.P.A. D'où la méthode d'approximation par l'intérieur, de cette frontière (Figure 1a) qui conduit lorsque l'on opère suivant les rayons vecteurs à un problème de maximisation (Figure 1b) :

$$\underline{Q}^+_{lim} = \underline{Q}^{\circ} \cdot \text{Max} \{ \lambda(\sigma) \mid \lambda(\sigma) \underline{Q}^{\circ} = \underline{Q}(\sigma), \sigma \in H \} \quad (2)$$

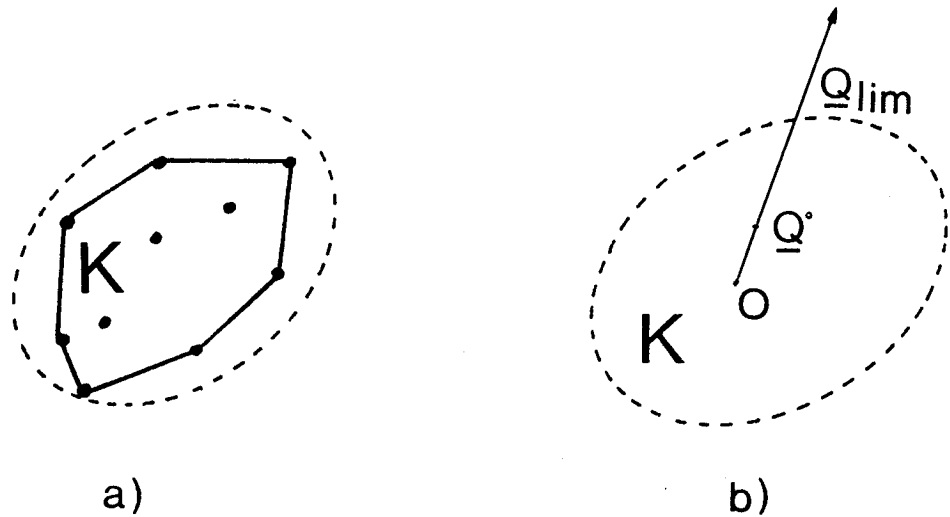


FIGURE 1

On obtient aussi le théorème cinématique :

Dans l'espace des chargements  $\underline{Q}$ , l'ensemble  $K$  est l'intersection des demi-espaces définis pour chaque champ  $d$  C.P.A., par :

$$P(d) - \underline{Q} \dot{q}(d) \geq 0 \quad (3)$$

D'où la méthode d'approximation par l'extérieur de la frontière d'écoulement (figure 2a) ; qui conduit à un problème de minimisation (Figure 2b) lorsque l'on opère en considérant les champs C.P.A. qui correspondent à une même vitesse de déformation admissible  $\dot{q}^0$  du système :

Le plan

$$\underline{Q} \dot{q}^0 - \text{Min} \{ P(d) \mid d \in H', \dot{q}(d) = \dot{q}^0 \} = 0 \quad (4)$$

est tangent à la frontière d'écoulement.

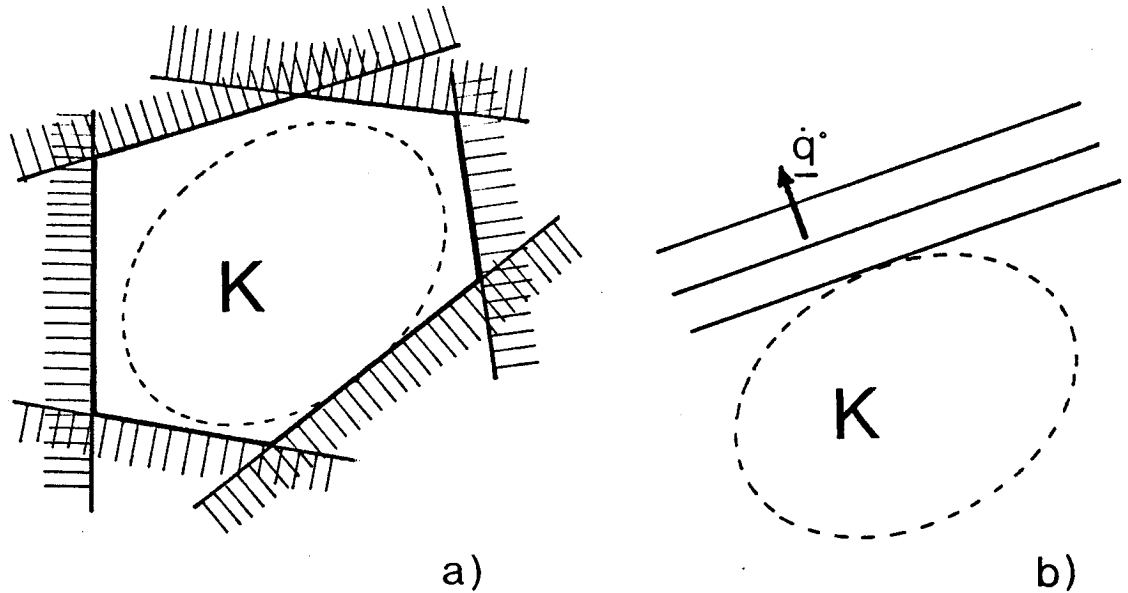


FIGURE 2

### 3 - PRINCIPE DE LA MÉTHODE.

L'idée d'utiliser la méthode des éléments finis pour la construction de familles de champs intervenant dans les théorèmes ci-dessus, est naturelle. De ce point de vue, le théorème cinématique apparaît comme le plus commode : il permet en effet de limiter à priori la zone à mailler en affectant au reste du système un mouvement rigidifiant déterminé par les conditions à la limite ; cela est particulièrement utile dans le cas de systèmes de grandes dimensions voire illimités dans certaines directions.

Nous nous proposons d'étudier l'application de cette méthode pour un système constitué d'un matériau de Misès de cission limite  $k$ , dans un problème de déformation plane. L'étude sera menée sur un exemple.

On rappelle que dans le cas du matériau de Misès, les champs d P.A. sont tous les champs où la vitesse de déformation de volume est nulle en tout point :  $\text{tr } d = \text{div } \vec{v} = 0$ .

D'autre part, d'une façon générale, la méthode cinématique permet l'emploi de champs  $d$  dérivant de champs de vitesse  $\vec{v}$  discontinus C.P.A. ; pour le matériau de Misès (ou de Tresca ( $\kappa$ )) il faut que les discontinuités de vitesse  $[\vec{v}]$  soient tangentes aux surfaces de discontinuité. La puissance dissipée  $P(d)$  se compose alors de deux termes : intégrale de volume sur les zones déformées et intégrale sur les surfaces de discontinuité, et a pour expression dans le cas du matériau de Misès :

$$P(d) = \int k \sqrt{2 d_{ij} d_{ji}} d\Omega + \int k |[\vec{v}]| dw \quad (5)$$

Cette expression est d'ailleurs valable en déformation plane pour tout matériau de critère indépendant de la contrainte moyenne.

Dans la suite, il sera plus commode de parler de champs de vitesse C.P.A. <sup>plutôt</sup> que de champs de vitesse de déformation C.P.A.

#### 4 - PRÉSENTATION DE L'EXEMPLE.

##### 4.1. - LE PROBLEME ETUDIE

L'exemple étudié concerne la butée d'une paroi rigide de largeur  $2a$  sur un coin rectangulaire infini en matériau de Misès non pesant (Figure 3). Le contact entre la paroi et le coin est supposé se faire sans frottement (paroi lisse) avec décollement possible : il satisfait le principe du travail maximal.

Introduisant la résultante (normale)  $N$  et le moment  $M$  des efforts appliqués par la plaque, par rapport au milieu  $I$  de celle-ci, on utilisera les paramètres sans dimension :

---

( $\kappa$ ) ou plus généralement, tout matériau de critère indépendant de la contrainte moyenne.

paramètres de chargement

$$Q_1 = N/ak \quad , \quad Q_2 = M/a^2 k \quad ;$$

paramètres de déformation du systèmes associés

$$\dot{q}_1 = -v_y'(I)/|w|a \quad , \quad \dot{q}_2 = w/|w| = \text{sgn } w$$

(6)

les longueurs étant rapportées à  $a$  et la puissance dissipée à

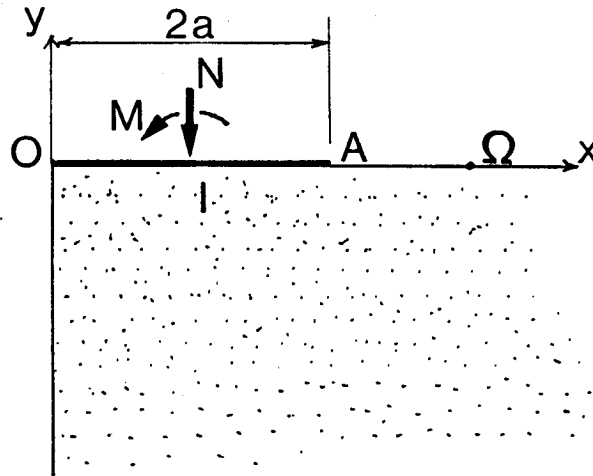


FIGURE 3.

4.2 - RESULTATS CONNUS.

En utilisant diverses méthodes plus ou moins classiques on aboutit, pour la frontière d'écoulement, aux résultats (SALENÇON, 1973) présentés sur la figure 4.

.../...

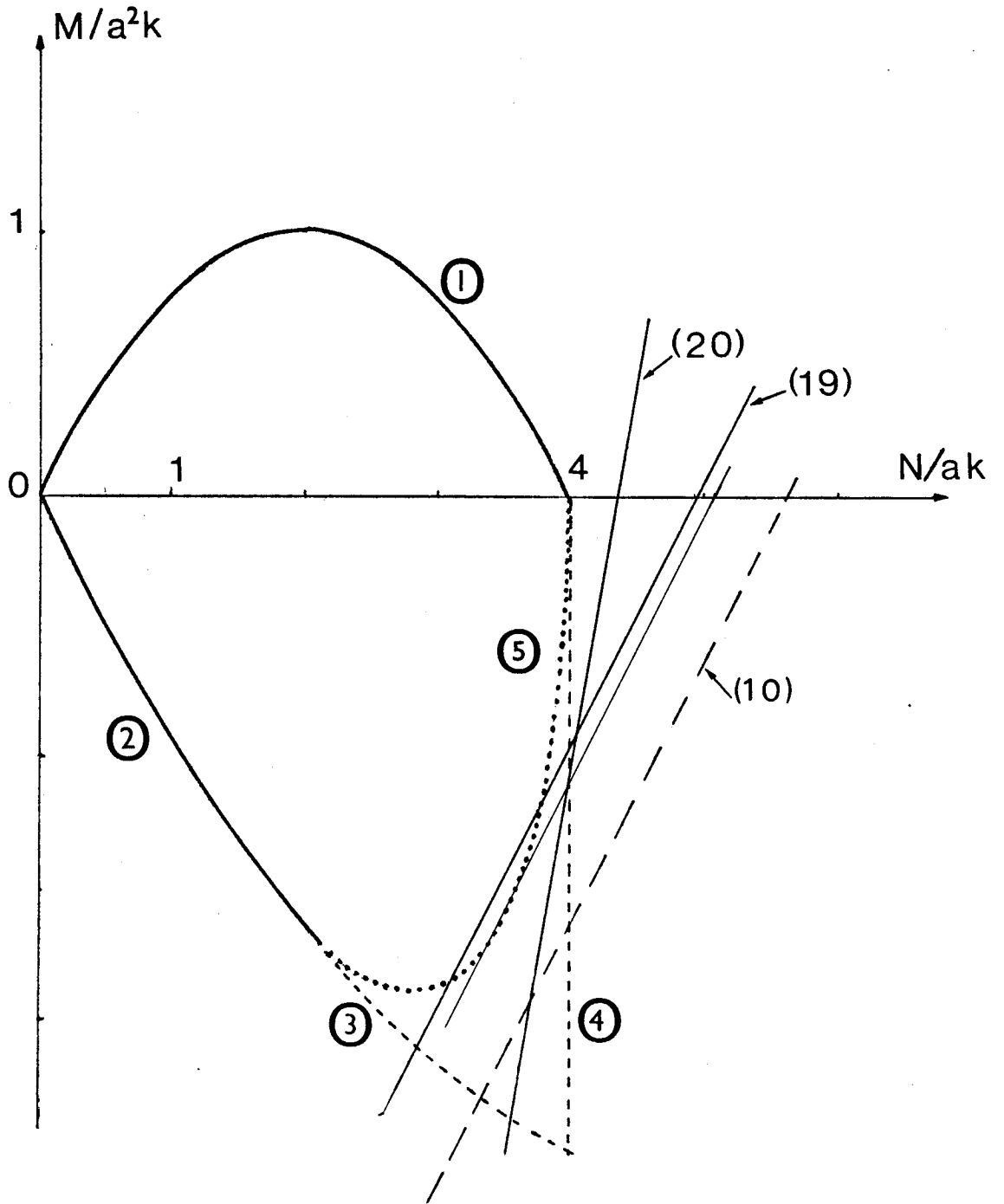


FIGURE 4 .



① : Arc connu exactement qui correspond à  $\omega > 0$  autour d'un centre instantané  $\Omega$  quelconque :

$$M/a^2k \geq 0 \quad , \quad M/a^2k = (N/ak)(1 - N/4ak) \quad (7)$$

② : Arc connu exactement qui correspond à  $\omega < 0$  dans le cas où  $\Omega$  vérifie  $x(\Omega)/a \geq 1.584$  (\*).

$$\left. \begin{aligned} M/a^2k \leq 0 \quad , \quad M/a^2k &= -(N/ak)(1 - N/(2\pi+4)ak) \\ N/ak &\leq 2.136 \quad (*) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

③ : Approximation par l'extérieur de la frontière. Suite de la parabole (8) - pour  $2.136 < N/ak < 4$ .

④ : Approximation par l'extérieur de la frontière : tangente verticale connue à la frontière au point

⑤ : Approximation par l'intérieur de la frontière construite numériquement.

---

(\*)  $1.584 = 2 [1 - \exp(-\pi/2)]$  ,  $2.136 = 2(\pi+2) \cdot \exp(-\pi/2)$

4.3. -

La construction de solutions cinématiques par la méthode des cercles de glissement permet de raffiner l'approximation extérieure dans le domaine :

$$\omega < 0, \quad x(\Omega)/a < 1.584 \quad (9)$$

Ainsi pour  $x(\Omega)/a = 0$ , qui correspond à :

$$\dot{q}_1 = +1, \quad \dot{q}_2 = -1,$$

le meilleur cercle de glissement est classique et conduit au plan dont l'équation (4) est :

$$N/ak - M/a^2k - 5.56 = 0 \quad (10)$$

représenté sur la figure 4.

C'est dans ce domaine et en particulier pour cette même position de  $\Omega$  que nous allons tenter l'application des méthodes d'éléments finis.

5 - MISE EN OEUVRE DE LA MÉTHODE.

Un maillage formé de  $t$  éléments triangulaires, est défini sur le coin rectangulaire comme indiqué sur la figure 5. La zone déformable du système dans les champs de vitesses C.P.A. qui seront considérés, est ainsi limitée à un carré dont les dimensions paraissent raisonnables.

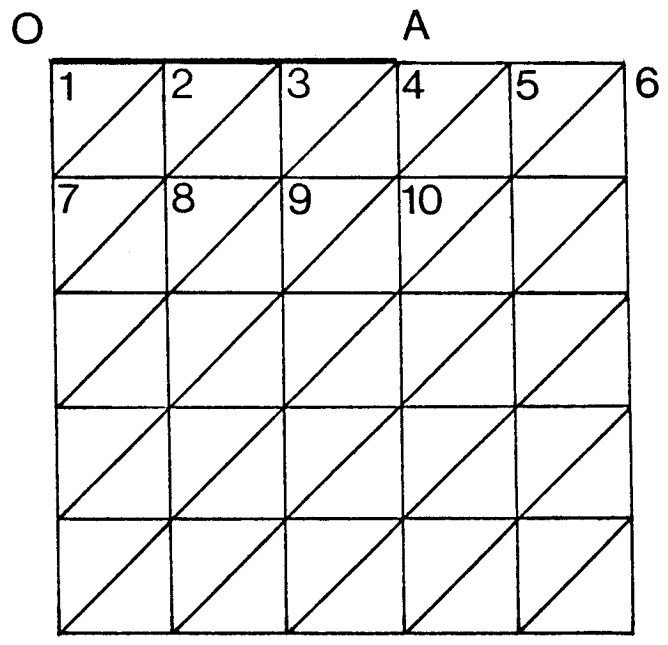


FIGURE 5.

Divers types de champs C.P.A. construits sur ce maillage ont été essayés et sont décrits dans la suite : la vitesse, nulle en dehors du carré maillé, sera soit constante sur chaque triangle, soit linéaire, et il pourra ou non y avoir discontinuité au passage d'un triangle à l'autre.

5.1 - VITESSES LINEAIRES CONTINUES.  $\text{div } \vec{v} = 0$  sur chaque triangle.

Les vitesses sont linéaires sur chaque triangle et continues sur l'ensemble du coin. Elles peuvent être définies par leur valeur aux  $n$  noeuds du maillage.  $u$  est le vecteur ( $2n$  composantes) formé par ces valeurs. La déformation est constante sur chaque triangle. Le champ sera rigoureusement P.A. si la condition  $\text{div } \vec{v}$  est vérifiée partout, ce qui impose  $t$  conditions linéaires.

La puissance dissipée (5) est sur chacun des triangles du maillage, la racine carrée d'une forme quadratique, d'où :

$$P(d) = \int k \sqrt{2 d_{ij} d_{ji}} d\Omega = \sum_{i=1}^t \sqrt{u^T A_i u} = P_1(u) \quad (11)$$

Enfin les conditions à la limite imposent les valeurs de certaines composantes de  $u$  en des points situés à la frontière du maillage :

$$Du = u^d$$

où  $D$  est une matrice de projection et  $u^d$  le vecteur de composantes données aux frontières. En fait, pour tenir compte de la possibilité de décollement sous OA, les conditions à la limite doivent être séparées en deux parties :

$$D_1 u = u_1^d \quad \text{et} \quad D_2 u \leq u_2^d ,$$

mais ceci ne modifie en rien les raisonnements.

On voit que dans ce schéma le nombre de degrés de liberté pour minimiser  $P_1$  est très petit. En effet, comme indiqué dans (ANDERHEGGEN et KNÖPFEL, 1972) le rapport  $t/n$  est asymptotiquement égal à 2, et le nombre de degrés de liberté sera de l'ordre de  $\sqrt{n}$ . Ce schéma est donc peu utilisable et nous avons été conduits à étudier une variante avec un nombre réduit de contraintes.

5.2 - VITESSES LINEAIRES CONTINUES. Div  $\vec{v} = 0$  EN MOYENNE  
SUR CHAQUE CARRE.

Nous disons que  $\text{div } \vec{v} = 0$  en moyenne sur un carré formé de deux triangles du maillage, (par exemple : carré 2389), si l'intégrale de  $\text{div } \vec{v}$  est nulle sur ce carré. Dans le cas présent, où la déformation est constante sur chacun des triangles égaux constituant le carré, ceci conduit pour chaque carré à une condition linéaire sur les composantes de  $u$ , (condition obtenue en additionnant les conditions correspondant aux deux triangles dans le schéma précédent) ; soit sous la forme matricielle :

$$Bu = 0$$

B matrice rectangulaire à  $t/2$  lignes et  $2n$  colonnes.

Les champs considérés ne sont plus strictement P.A., mais tendent à le devenir quand  $n \rightarrow \infty$ .

Le problème à résoudre est ainsi d'après (4) :

$$\text{Inf} \left\{ P_1(u) \mid Bu, Du = u^d \right\} \quad (12)$$

qui a été remplacée par le problème (13) de recherche d'un point selle par suite de la difficulté pratique de tenir compte de la condition  $Bu = 0$  :

$$\text{Inf}_{Du = u^d} \text{Sup}_{\mu} \left\{ P_1(u) + \mu^T Bu \right\} \quad (13)$$

dans lequel  $\mu$  est un vecteur à  $t/2$  composantes.

Le problème (13) a été résolu par une méthode itérative : méthode de descente sur  $u$  et méthode du gradient sur  $\mu$ .

Il est peut-être intéressant de donner une interprétation mécanique de la dualisation de la contrainte  $Bu = 0$  qui fait passer de (12) à (13). On considère un matériau standard dont le domaine d'élasticité est défini par :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{tr} s^2 &\leq k^v \\ 3l^- &\leq \operatorname{tr} \sigma \leq 3l^+ \end{aligned} \right\}$$

critère de Misès avec limite pour la valeur de la contrainte moyenne. Pour ce matériau tout champ  $d$  est P.A. et la puissance dissipée a pour expression :

$$P(d) = \int \left[ k \sqrt{2d_{ij}d_{ji}} + \operatorname{Sup} \left\{ l \operatorname{tr} d \mid l^- \leq l \leq l^+ \right\} \right] d\Omega \quad (14)$$

La recherche de la solution d'un problème pour un système constitué de ce matériau conduit à la minimisation de (14) sur tous les champs de vitesses C.A. d'où par discrétisation, et en prenant la divergence en moyenne sur chaque carré à la recherche de :

$$\operatorname{Inf}_{Du=u^d} \left\{ P_1(u) + \operatorname{Sup} \left\{ l^T Bu \mid l^- \leq l \leq l^+ \right\} \right\}$$

où  $l$  est un vecteur à  $t/2$  composantes. Enfin pour aboutir au matériau de Misès, il faut évidemment faire tendre  $l^+$  et  $-l^-$  vers  $+\infty$  ce qui amène au problème (13).

On a appliqué la méthode à l'exemple présenté plus haut. Le carré maillé a pour côté  $4a$ . Dans le cas, dont la solution exacte est connue, où  $x(\Omega)/a = 2$ ,  $\omega > 0$ ,  $\dot{q}^0$  de (4) étant:  $(\dot{q}_1^0 = 1, \dot{q}_2^0 = 1)$  la puissance minimale connue est égale à 4, et la méthode proposée conduit à la valeur 4,1 en 30 itérations ; le champ obtenu est très semblable au champ exact.

Dans le cas,  $\alpha(\Omega)/a = 0$ ,  $\omega < 0$  : pour un maillage de 121 points, on aboutit en 70 itérations à la valeur  $P = 7,312$ , moins bonne que le résultat indiqué en (10) obtenu la méthode des cercles de glissement.

De ces deux essais on peut tirer les renseignements suivants : dans le 1er cas, puisque le champ de vitesses exact est linéaire et continu<sup>(\*)</sup>, la méthode rigoureuse du premier schéma doit le retrouver. Le fait que ce champ soit atteint assez rapidement en utilisant le deuxième schéma doit nous inciter à la confiance dans les deux approximations concernant la condition  $\text{div } \vec{v} = 0$  faites dans ce modèle ; dans le deuxième cas, l'expérience de certaines solutions connues pour des problèmes analogues, nous conduit à penser qu'une ligne de discontinuité de vitesses issue de A doit exister dans la solution; la forme n'en étant pas connue à l'avance. Le schéma proposé n'est pas approprié à un tel type de solution, et nous avons envisagé le schéma suivant.

5.3 - CHAMPS DE VITESSES C.P.A. DISCONTINUS. VITESSES CONSTANTES SUR CHAQUE TRIANGLE.

Dans ces champs, la vitesse est constante sur chaque triangle, éventuellement discontinue sur les côtés du triangle. La condition  $\text{div } \vec{v} = 0$  est trivialement vérifiée sur chaque triangle ; sur les côtés, elle impose à la discontinuité d'être tangente au côté. Les champs sont définis par les valeurs de la vitesse sur chaque triangle.  $\hat{u}$  est le vecteur (2t composantes) formé par ces valeurs. Il doit satisfaire la condition matricielle ( $\text{div } \vec{v} = 0$  sur les côtés):

$$\hat{B} \hat{u} = 0 \quad (15)$$

Les conditions à la limite sont vérifiées en moyenne en égalant les vitesses des triangles adjacents au contour aux moyennes des vitesses imposées :

$$\hat{D} \hat{u} = \hat{u}^d$$

---

(\*) linéaire sur la partie du coin située au-dessus de la diagonale issue de A et nulle au-dessous.

La puissance dissipée est :

$$P(d) = \int k |[\vec{v}]| d\omega = \sum_{i,j} c_{ij} |\hat{u}_i - \hat{u}_j| = P_2(\hat{u}) \quad (16)$$

forme linéaire en les modules des différences de vitesses sur les côtés des triangles.

D'où le problème numérique :

$$\text{Inf} \left\{ P_2(\hat{u}) \mid \hat{B} \hat{u} = 0, \hat{D} \hat{u} = \hat{u}^d \right\} \quad (17)$$

qui se ramène à un problème classique de programmation linéaire.

Ce schéma a été utilisé dans le cas  $\alpha(\Omega)/a = 0$ ,  $\omega < 0$  :  
 avec un carré de largeur  $3a$ , et un maillage de 72 triangles, on aboutit au minimum  $P_2 = 6.75$ ;  
 avec un carré de largeur  $2,5a$ , et un maillage de 200 triangles,  $P_2 = 6.8125$  ;  
 avec un carré de largeur  $2,22a$ , et un maillage de 800 triangles, on aboutit après 3220 itérations à  $P_2 = 7.9205$ .

Tous ces résultats sont moins bons que ceux obtenus par la méthode des cercles de glissement. De plus on constate que le minimum  $P_2$  augmente alors que l'on raffine le maillage. Ceci n'est pas un paradoxe et tient au fait que les conditions à la limite (le long de OA) sont de mieux en mieux vérifiées.

Le schéma ci-dessus n'est donc pas approprié quoiqu'il permette de minimiser sur un grand nombre de tracés possibles de lignes de discontinuité, parce qu'il n'y a pas de déformation proprement dite des éléments.

On alors imaginé le schéma ci-dessous qui mêle les caractéristiques des deux schémas précédents.



5.4 - VITESSES LINEAIRES ; Div  $\vec{v} = 0$  EN MOYENNE SUR CHAQUE CARRE ;  
DISCONTINUITES DE VITESSE HORIZONTALES ET VERTICALES.

On choisit une ligne brisée  $\Gamma$  formée de côtés horizontaux et verticaux de triangles du maillage. La vitesse est linéaire sur chaque triangle, et peut admettre une discontinuité sur cette ligne. La condition  $\text{div } \vec{v} = 0$  impose, comme on l'a vu, à la discontinuité d'être tangente à la ligne. Il faut remarquer que la discontinuité  $[\vec{v}]$  est continue et linéaire par morceaux sur  $\Gamma$  ; elle s'annule à chaque angle de  $\Gamma$ .

Un tel champ est défini par le vecteur  $u$  formé avec les composantes de la vitesse aux sommets du maillage, les noeuds situés sur  $\Gamma$  étant dédoublés pour la composante horizontale ou verticale pour tenir compte de la discontinuité.

La puissance dissipée est :

$$P(d) = \sum_i \sqrt{u^T A_i u} + \sum_{j,k} f(|u_j - u_k|) = P_3(u) \quad (18)$$

Les conditions à la limite et la condition  $\text{div } \vec{v} = 0$  en moyenne s'expriment comme dans le 2ème schéma.

La méthode numérique utilisée pour résoudre le problème est identique à celle présentée plus haut.

Il faut remarquer que la minimisation de  $P_3$  peut être associée à une optimisation du tracé de  $\Gamma$ .

Pour l'exemple étudié dans les différents cas examinés, il est naturel de faire partir la ligne de discontinuité du point A. Divers tracés vraisemblables ont été essayés. La largeur du maillage était de  $4a$ .

Pour  $x(\Omega)/a = 0$ ,  $\omega < 0$ , avec un maillage de 200 triangles, on a obtenu la valeur 4,93 après 230 itérations. Ceci correspond au plan (19) tracé sur la figure 4.

Pour  $\alpha(-\Omega)/a = -2$ ,  $\omega < 0$ , avec un maillage de 72 triangles, on a obtenu  $P_3 = 13.03$ . La forme de la ligne de discontinuité et le champ de vitesses qui fournissent résultat sont représentés à la figure 6, et le plan correspondant (20) est tracé sur la figure 4, ( $\dot{q}_1^0 = 3$ ,  $\dot{q}_2^0 = -1$ ) :

$$3 N/ak - M/a^2k - 13.03 = 0 \quad (20)$$

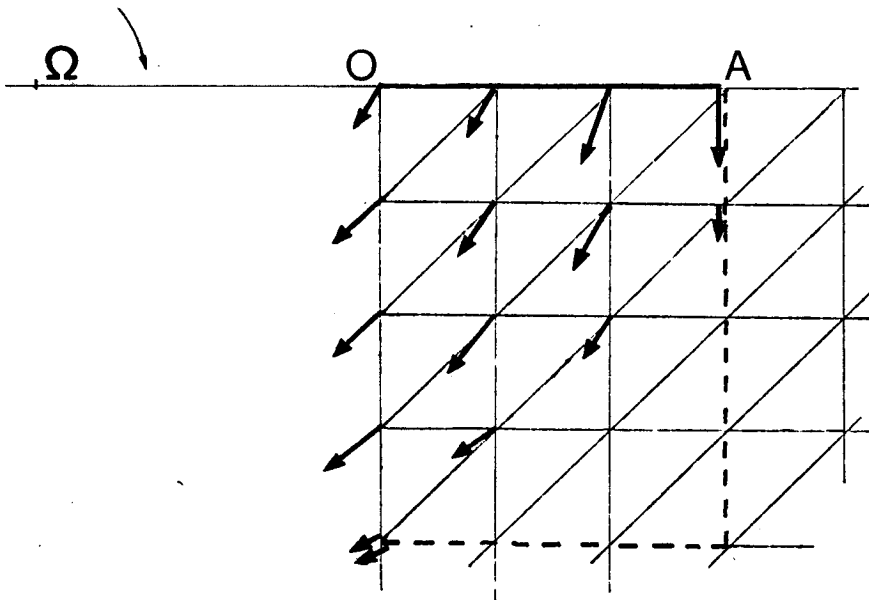


FIGURE 6.

Dans le premier cas, le résultat obtenu est enfin meilleur que la valeur 5,56 fournie par le cercle de glissement, mais il y a même quelque excès puisque le plan (19) coupe l'approximation statique (5) ! Ceci pourrait paraître surprenant car la méthode proposée est basée sur le problème cinématique, mais on ne doit pas oublier que les champs utilisés ne sont qu'approximativement P.A. Cela met en évidence les limitations de la méthode. En poursuivant le calcul jusqu'à 400 itérations, on constate d'ailleurs que, selon un comportement usuel avec le type de méthode numérique utilisée, la valeur de  $P_3$  remonte à 5.08, ce qui correspond à un plan tangent à l'approximation (5) .

.../...

Dans le second cas, le plan (20) est très bon. On ne doit pas, cela est évident, le considérer comme une stricte approximation par l'extérieur, mais comme une approximation avec une certaine incertitude.

Insistons enfin sur le fait que l'on s'attache là à une précision qui ne serait nécessaire dans aucun cas pratique ; ceci provient de ce que les résultats déjà connus concernant l'exemple choisi pour essayer la méthode seraient considérés comme suffisants pour les applications.

## 6 - COMMENTAIRES

Quatre modèles ont été successivement présentés dans cette étude et il semble que le dernier d'entre eux est le mieux adapté. Il permet en effet de considérer des champs de vitesses de déformation non nuls dérivant de champs de vitesses discontinus suivant certaines lignes. Ceci rejoint l'expérience acquise au moyen d'un certain nombre d'exemples de solutions exactes connues dans lesquelles des lignes de discontinuités sont présentes sans que tout la déformation y soit concentrée.

Il convient de remarquer que les conditions définissant les champs C.P.A. sont traitées de façons différentes dans les quatre modèles examinés : seul le premier modèle satisfait toutes les conditions mais il est pratiquement inutilisable ; dans le troisième les champs, rigoureusement P.A., ne vérifient les conditions à la limite qu'en moyenne ; dans le quatrième les conditions à la limite sont vérifiées exactement (ici elles sont linéaires), par contre les champs ne sont P.A. qu'à la limite (dualisation et moyenne pour la condition  $\text{div } \vec{v} = 0$ ).

D'une façon générale ceci ne permet d'appliquer rigoureusement le théorème cinématique : on ne peut affirmer que le minimum de  $P_i$  obtenu numériquement est nécessairement supérieur au minimum de  $P(d)$  intervenant dans (4), c'est-à-dire que l'on est bien en présence d'une approche par l'extérieur on sait seulement qu'ils sont voisins et il appartient au mécanicien de préjuger si l'approximation est suffisante comme il le fait dans toute méthode de résolution numérique.

De toute façon, les résultats obtenus en prenant la condition  $\text{div } \vec{v} = 0$  en moyenne et en la dualisant incitent à la confiance dans cette méthode qui paraît l'une des plus efficaces pour l'instant.

Dans l'utilisation du quatrième modèle, il a été constaté que les résultats dépendent fortement de la forme de la ligne de discontinuité. Une amélioration sensible serait apportée par l'introduction de lignes de discontinuité plus variées. D'autre part, il doit être possible de réduire les temps de calcul qui sont encore assez longs.

En conclusion, les auteurs pensent que la méthode des éléments finis doit apporter des développements nouveaux dans le calcul des charges limites du fait de son aptitude à décrire de façon systématique des champs de vitesses assez élaborés. Il y a bon nombre de problèmes, en particulier se rapportant à la mécanique des sols, pour lesquels la frontière d'écoulement est beaucoup moins bien connue que dans le cas pris ici comme exemple et pour lesquels tout résultat nouveau obtenu avec une précision suffisante pour les besoins pratiques serait le bienvenu.

La méthode repose sur les théorèmes limites classiques qui ne sont pas valables en pratique lorsque l'on a affaire à des sols obéissant au critère de Coulomb. Dans ce cas, il conviendra de s'appuyer sur les théorèmes limites élargis proposés par RADENKOVIC (1961), PALMER (1966).

L'extension de la méthode au cas tridimensionnel qui ne pose aucune difficulté de principe serait évidemment du plus haut intérêt malheureusement les difficultés numériques sont encore trop importantes.

## RÉFÉRENCES

- ANDERHEGGEN E. (1969) - Finite element plate bending equilibrium analysis.  
J. Engng. Mech. Div. Am. Soc. Civ. Engrs., 95, EM4, 1969, p. 841-857.
- ANDERHEGGEN E. (1970) - A conforming triangular finite element plate bending solution.  
Int. J. Numerical Meth. Engng., 2, 1970, p. 259-264.
- ANDERHEGGEN E. et KNÖPFEL H. (1972) - Finite element limit analysis using linear programming.  
Int. J. Solids Structures, Vol. 8, 1972, p. 1413-1431.
- GAVARINI C. (1972) - L'analyse limite des structures au moyen de la programmation mathématique.  
Séminaire Plasticité et Viscoplasticité 1972, Ecole Polytechnique, Paris.  
A paraître in Sciences et Techniques de l'Armement.
- MAIER G., ZAVELANI-ROSSI A., BENEDETTI D. (1972) - A finite element approach to optimal design of plastic structures in plane stress.  
Int. J. Numerical Meth. Engng., 4, 1972, p. 455-473.
- RADENKOVIC D. (1961) - Théorèmes limites par un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée.  
C.R. Ac. Sc. Paris. 252, 1961, p. 4103-4104.
- SALENÇON J. (1972) - Théorie des charges limites.  
Séminaire Plasticité et Viscoplasticité 1972, Ecole Polytechnique, Paris  
A paraître in Sciences et Techniques de l'Armement.
- SALENÇON J. (1973) - Quelques résultats théoriques concernant la butée d'une paroi sur un coin plastique.  
A paraître.
- SAVE M. (1972) - Théorie des charges limites - Plaques et coques.  
Séminaire Plasticité et Viscoplasticité 1972, Ecole Polytechnique, Paris  
A paraître in Sciences et Techniques de l'Armement.