

Un exemple de non validité de la théorie classique des charges limites pour un système non standard

JEAN SALENÇON

Ecole Polytechnique, Paris, France

Introduction. Le calcul à la rupture couramment utilisé en résistance des matériaux et en mécanique des sols repose sur les théorèmes suivants:

Considérant une structure S soumise à un système de charges proportionnel à un paramètre $\lambda > 0$, soit $\lambda\Phi^1$) alors:

Théorème 1 – si un système de charges $(\lambda_s\Phi)$ est tel que l'on puisse trouver un champ de contraintes qui l'équilibre sans excéder nulle part la limite de rupture, la structure résistera à ce chargement (i.e. $\lambda_s \leq \lambda_1$ valeur limite).

Théorème 2 – si on connaît un mode de rupture admissible pour la structure, dans lequel un système de charges $\lambda_c\Phi$ est suffisant pour produire la ruine (i.e. puissance des forces motrices excédant la puissance des forces résistantes), la structure ne résistera pas à ce chargement (i.e. $\lambda_1 \leq \lambda_c$).

Ces théorèmes qui peuvent paraître intuitifs et conformes au bon sens expérimental²) les résultats de la théorie classique des charges limites (cf. [4, 10]) et on sait que ceux-ci ne peuvent être établis que dans l'hypothèse du *principe du travail maximal*³), qui doit être vérifié par les lois du comportement plastique des matériaux constitutifs, et par les conditions de frottement aux interfaces entre les solides de la structure étudiée [2, 9, 10].

Rappelons que lorsqu'il n'en est pas ainsi, des théorèmes ont été donnés [2, 7, 8, 6, 10] permettant d'encadrer la zone possible pour les charges limites, l'unicité de λ_1 ne pouvant plus être établie.

Les cas se produisent couramment en mécanique des sols où l'on a affaire à des matériaux non standards. Les difficultés d'application des théorèmes

¹) λ apparaît comme le coefficient de sécurité de S par rapport à Φ , [1].

²) Dans le cas d'un système de charges proportionnel à un paramètre.

³) Rappelons que cette condition est équivalente à la convexité du critère de plasticité et à la 'normalité' de la loi de comportement (matériau dit standard [7, 8]).

limites classiques apparaissent alors dans l'utilisation de la méthode cinématique (méthode des cercles de glissement etc.): l'évaluation de la puissance des forces résistantes fait l'objet de nombreux errements, la puissance dissipée n'étant pas une fonction univoque de la vitesse de déformation.

On étudie ici un problème où le principe du travail maximal est satisfait par la loi de comportement du matériau constituant le système, tandis que la condition de frottement à l'interface est non standard.

Le problème posé. On étudie en déformation plane, la force limite de poinçonnement d'un demi-espace en matériau de Tresca standard non-pesant de cission limite k , par un poinçon de largeur $2a$ placé dans une entaille rectangulaire de largeur $2a$ et de profondeur h (problème de la fondation peu profonde). A l'interface de contact ($BAA'B'$) entre le poinçon et le demi-plan, la liaison est unilatérale avec frottement de Coulomb; avec les notations de la Fig. 1, on a donc la règle suivante:

$$\left. \begin{array}{l} \sup\{\sigma, \tau^2 - \sigma^2 \operatorname{tg}^2 \varphi, \tau^2 - k^2\} < 0 : [u_n] = [u_t] = 0 \\ \sup\{\sigma, \tau^2 - \sigma^2 \operatorname{tg}^2 \varphi, \tau^2 - k^2\} = 0 \\ \sigma < 0 \\ \sigma = 0, \tau = 0 \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} [u_n] = 0, \\ \tau \cdot [u_t] \geq 0 \\ [u_n] \geq 0, [u_t] \text{ arbitraire} \end{array} \right. \quad (1)$$

On supposera dans la suite,

$$\operatorname{tg} \varphi > 0,39. \quad (2)$$

La Fig. 1a représente cette condition de frottement: critère de glissement et loi de glissement associée. On voit que la règle de normalité n'est pas satisfaite [10]: cette condition n'est pas standard.

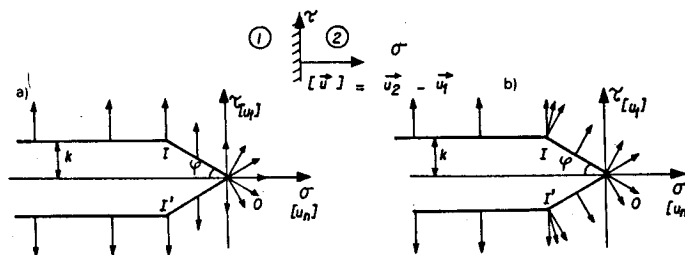


Fig. 1

Discussion notes

(La Fig. 1b représente pour le même critère de glissement, ce que serait la loi de glissement pour un interface standard: discontinuité de vitesse purement tangentielle uniquement pour $|\tau| = k$; discontinuité de vitesse avec décollement inclinée à φ sur l'interface pour $|\tau| = -\sigma \operatorname{tg} \varphi$, points coniques, en 0 d'ouverture $(\pi - 2\varphi)$ seulement et en I et I').

Solution statique. Le champ de contraintes symétrique dont la partie droite de la Fig. 2 représente la moitié, fournit une solution statique du problème, (analogue au champ proposé dans [12]).

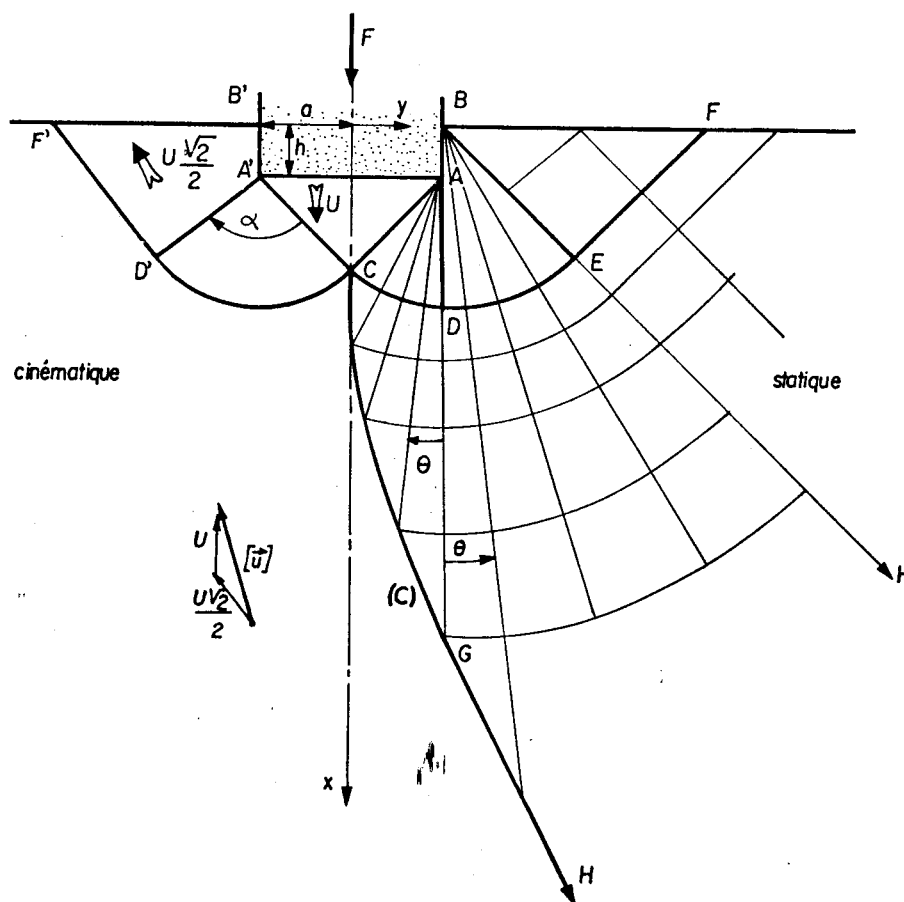


Fig. 2

Dans BEF le champ est homogène; BDE , éventail de Prandtl de sommet B et d'ouverture $\pi/4$; AOC , éventail de Prandtl de sommet A et d'ouverture $\pi/4$; $A'AC$, champ homogène.

La contrainte sur $A'A$ est: $\tau = 0$, $\sigma = -(\pi+2)k$
 qui est admissible; sur AB on a: $\tau = k$, $\sigma = -(\pi/2+1)k$
 qui est admissible pour $\operatorname{tg} \varphi > 0,39$.

Au-dessous de $CDEF$ le champ de contraintes statiquement et plastiquement admissible est obtenu par la méthode de Shield [11]: on détermine une ligne de discontinuité du champ de contraintes (C), issue de C , telle que l'on obtienne un prolongement licite en utilisant au-dessus de (C) les mêmes champs homogènes, semi-homogènes, que dans ACD , BCD , BDE , BEF et au-dessous de (C) le champ statiquement admissible, vérifiant $\tau_{xy} = 0$, défini par la continuité de la contrainte sur (C) et la condition $(\sigma_x - \sigma_y) = 2k$ sur (C) dans ce champ.

Ici la courbe (C) se compose de deux arcs:

- l'arc CG du prolongement de Shield classique pour un champ de Prandtl centré en A et de rayon $a\sqrt{2}$, dont l'équation en coordonnées polaires de centre A et d'axe AD est ([9]):

$$\rho = a\sqrt{2} \left/ \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} \right) \right) \right. \quad (3)$$

pour $-(\pi/4) \leq \theta < 0$;

- l'arc GH homothétique (centre G , rapport $\overline{GB}/\overline{GA}$) de l'arc d'équation (3) pour $0 \leq \theta \leq \pi/4$, et qui a ainsi pour équation en coordonnées polaires (B, BD):

$$\rho = \left(a\sqrt{2} + h \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \left/ \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} \right) \right) \right. \quad (4)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/4;$$

ces deux arcs se raccordent tangentiellement en G .

Les valeurs de σ_x , σ_y sur (C) sont, pour chaque valeur de θ , les mêmes que dans le prolongement de Shield classique: on est donc assuré que dans la zone située au-dessous de (C) le champ de contraintes est plastiquement admissible.

On dispose ainsi d'un champ de contraintes statiquement et plastiquement admissible. L'intégration des contraintes sur $B'A'AB$ fournit la valeur

Discussion notes

de la force de poinçonnement correspondant à cette solution statique:

$$F_s(h/a) = 2ak(\pi + 2 + h/a). \quad (5)$$

Remarquons au passage que la solution statique considérée ici est celle qui donne la plus forte valeur de $F_s(h/a)$, parmi toute la classe schématisée sur la Fig. 3 (où le champ de contraintes au-dessous de $CDEF$ est encore obtenu par la méthode de Shield [9]).

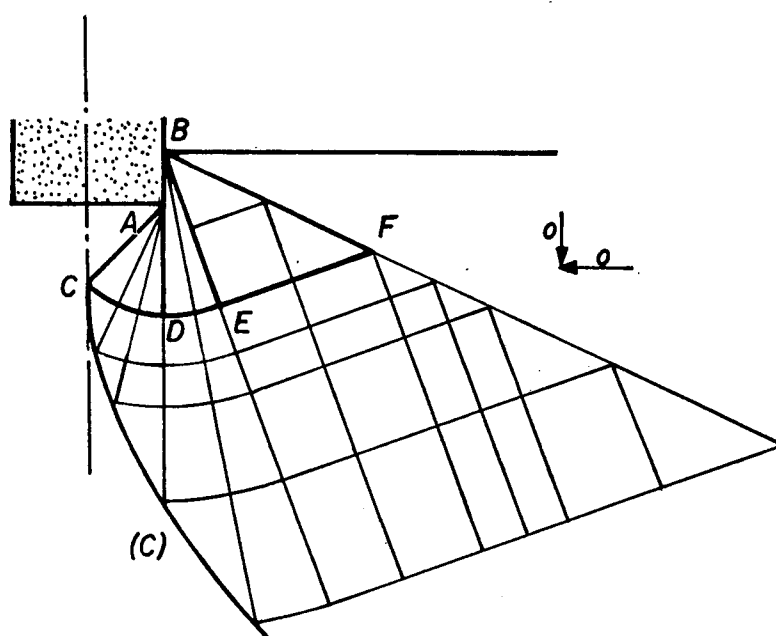


Fig. 3

Solution cinématique. Le schéma d'écoulement symétrique dont la partie gauche de la Fig. 2 représente la moitié fournit une solution cinématique du problème. Il s'agit d'un mode de déformation classiquement utilisé ([5, 3] par exemple): il y a enfoncement du bloc $A'AC$ à la vitesse verticale U du poinçon; déformation plastique dans l'éventail $A'CD'$ d'ouverture α ; discontinuité de la vitesse ($= U/\sqrt{2}$) le long de $ACD'F'$, et $A'D'F'B'$ glisse en bloc le long de $D'F'$; la discontinuité de vitesse entre sol et poinçon le long de $A'B'$ se compose donc de $U(\sqrt{2}/2)$ selon $D'F'$ et de U selon la verticale (cf. Fig. 2): il y a décollement.

Pour l'application de la méthode cinématique classique, le calcul de la puissance des forces résistantes dans ce mode de déformation ne pose aucun problème: le matériau étant standard la puissance dissipée a une expression univoque dans la zone déformée et le long des lignes de discontinuité $A'C$ et $CD'F'$; enfin le long de $A'B'$ où la discontinuité de vitesse correspond à un décollement, on a $\sigma = \tau = 0$ d'après (1), (cf. Fig. 1a), et la puissance dissipée y est *nulle* sans aucune ambiguïté.

Egalant la puissance des forces motrices à la puissance des forces résistantes, on obtient pour ce mécanisme:

$$F_c(h/a, \alpha) = 2ak \left((1 + 2\alpha + \operatorname{tg}(3\pi/4 - \alpha)) + \frac{h}{a} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\cos(3\pi/4 - \alpha)} \right). \quad (6)$$

On voit que:

$$F_c(h/a, \pi/2) = 2ak(2 + \pi + h/a) = F_s(h/a). \quad (7)$$

D'autre part, l'étude de $F_c(h/a, \alpha)$ sur $0 \leq \alpha \leq 3\pi/4$, à h/a fixé montre que $F_c(h/a, \alpha)$ passe par un minimum pour $\alpha = \alpha_0$;

$$\alpha_0 = 3\pi/4 - \operatorname{arc} \sin \left(-\frac{h}{a} \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} \sqrt{h^2/a^2 + 16} \right) \quad (8)$$

croît de $\pi/2$ à $3\pi/4$ quand h/a croît à partir de 0.

La solution correspondant à $\alpha = \alpha_0$ est donc la meilleure de la classe considérée, puisque fournissant la valeur de F_c la plus faible.

La Fig. 4 représente $F_c(h/a, \alpha_0)$ en fonction de h/a .

Il résulte évidemment de (7) que l'on a:

$$F_c(h/a, \alpha_0) < F_s(h/a) \quad \text{pour } h/a > 0. \quad (9)$$

Ainsi les résultats de la théorie classique des charges limites sont en défaut puisque le chargement obtenu par la méthode statique est supérieur à celui obtenu par la méthode cinématique.

Cela provient évidemment du caractère non-standard de la condition de frottement sur $BAA'B'$. On vérifie facilement par exemple que dans l'hypothèse, sans signification pratique, d'un interface standard de même critère (Fig. 1b), la puissance dissipée le long de $B'A'$ n'est plus toujours nulle, bien qu'il y ait décollement: suivant les valeurs relatives de α et φ , la discontinuité de vitesse peut appartenir au cône des normales extérieures en I

Discussion notes

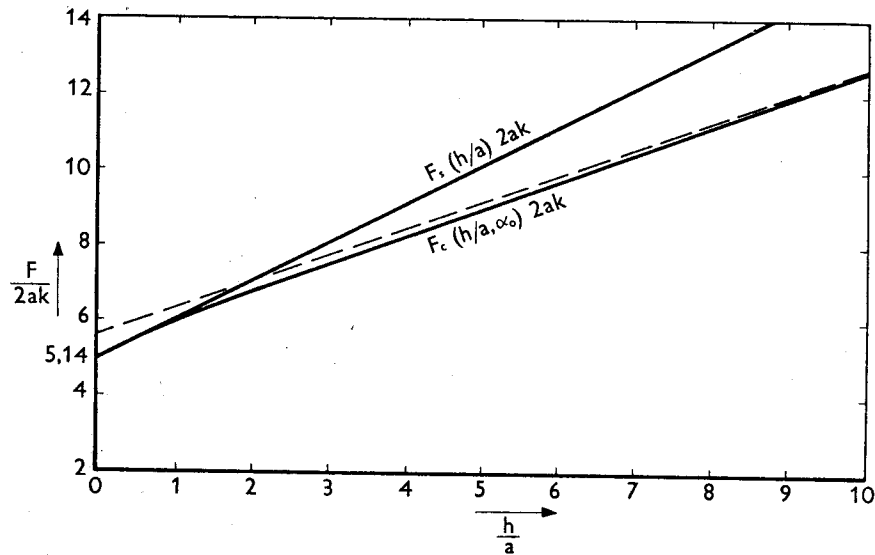


Fig. 4

et il y a dissipation qui conduit à modifier l'expression de $F_c(h/a, \alpha)$ par rapport à (6) en:

$$F_c(h/a, \alpha) = 2ak \left[1 + 2\alpha + \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{4} - \alpha \right) + \frac{h}{a} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\cos(3\pi/4 - \alpha)} \right] + 2ak \times \operatorname{Max} \left\{ 0, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(\frac{3\pi}{4} - \alpha \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sin(3\pi/4 - \alpha)}{\operatorname{tg} \varphi} \right\}. \quad (10)$$

Il s'ensuit, compte-tenu de la condition (2) sur φ , que la plus faible valeur de $F_c(h/a, \alpha)$ ainsi obtenue est supérieure à $F_s(h/a)$.

Conclusion. La présente note attire l'attention sur les dangers de l'application des théorèmes limites classiques, dans le cas de matériaux satisfaisant le principe du travail maximal et d'interfaces non standards: en particulier, sans paraître à aucun moment poser de problèmes, une telle utilisation peut conduire à des paradoxes.

L'exemple présenté n'a rien de pathologique, à la différence de ceux donnés dans [2]; il s'agit d'un problème banal dont on ne connaît pas de solution complète, et les schémas que nous avons utilisés dans l'étude sont tout à fait habituels.

Jean Salençon

Le praticien de la mécanique des sols, pour qui il s'agit là de la force portante d'une fondation peu profonde, notera sur la Fig. 4 que dans la gamme des valeurs usuelles ($h/a \leq 2$ par exemple), les résultats donnés par les deux solutions diffèrent peu. Mais la question reste posée de façon générale de savoir quelle approche on devra choisir et quel résultat on devra adopter; en particulier l'usage de la méthode statique n'est plus une garantie de sécurité.

References

- [1] Courbon, J., Plasticité appliquée au calcul des structures. Cours E.N.P.C., Paris 1971.
- [2] Drucker, D. C., Coulomb friction, plasticity and limit loads. *Jl. Appl. Mech. Trans. A.S.M.E.*, vol. 21, 1 (1954) 71-74.
- [3] Hansen, Bent, Bearing capacity of shallow strip footings in clay, *C.R. 7ème congr. int. Mec. Sols, Mexico, Vol. 2* (1969) 107-113.
- [4] Mandel, J., Cours de Mécanique des milieux continus, Tome II Annexe 20. Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [5] Meyerhof, G., The ultimate capacity of foundation, *Géotechnique, Vol. 2, no 4* (1950/1951) 301-332.
- [6] Palmer, A. C., A limit theorem for materials with non-associated flow-laws, *J. de Mécanique, Vol. 5, 2* (1966) 217.
- [7] Radenkovic, D., Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non-standardisée. *C.R. Ac. Sc. Paris, 252* (1961) 4103-4104.
- [8] Radenkovic, D., Théorie des charges limites in *Séminaire de Plasticité, ed. J. Mandel, P.S.T.*, no 116, 1962.
- [9] Salençon, J., La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane. Thèse Doc. ès-Sc., Paris, 1969.
- [10] Salençon, J., Théorie de la Plasticité pour les applications à la Mécanique des Sols. Cours E.N.P.C., Paris, 1972.
- [11] Shield, R. T., *J. Appl. Mech.* 21 (1954) 193 et cf. A. Philipps, Introduction to plasticity, Ronald Press, N.Y. (1956) 158.
- [12] Sokolovski, V. V., Statics of Soil Media. Butterworths - London (1960) 118.