

## **Butée d'une paroi lisse sur un massif plastique : solutions statiques**

par

**J. SALENÇON \***

---

**RÉSUMÉ.** — La butée d'une paroi sur un massif est un des problèmes très classiques étudiés en plasticité. L'aspect statique ayant été auparavant négligé, nous complétons ici les solutions connues. L'intérêt de ce point de vue est non seulement d'affirmer l'exactitude des valeurs trouvées en tant que chargements limites correspondant à certains modes de déformation, mais aussi d'obtenir des renseignements utiles sur les chargements limites correspondant à des modes de déformation pour lesquels des solutions exactes (ou même incomplètes) ne sont pas connues.

**ABSTRACT.** — The paper is concerned with the indentation of a rigid plastic wedge by a smooth rigid punch. This classical problem is studied here from the statical point of view, an aspect which seems to have been neglected in previous papers. It is shown that the classical results actually yield limit loadings corresponding to some definite deformation modes. Thence, through the use of the limit load theory, one can derive important indications as to the limit loadings corresponding to deformation modes for which neither exact nor even incomplete solutions are known.

### **1. Position du problème**

Le problème étudié est celui de l'équilibre limite de butée d'une paroi rigide lisse agissant sur un massif plastique en forme de coin infini. On se place dans l'hypothèse de la déformation plane et le matériau est supposé satisfaire le principe du travail maximal et obéir au critère de Tresca (ou à tout autre critère indépendant du premier invariant du tenseur des contraintes; la déformation plastique s'effectue alors sans variation de volume).

---

\* Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique, Paris.

Les conditions aux limites sont les suivantes (fig. 1) :

à l'infini : les vitesses de déplacement sont nulles;

sur  $Ox$  : on applique une pression normale uniforme,  $\bar{\omega}$ ;

sur  $OA$  : la plaque rigide lisse agit sur  $OA$ ; la distribution de la vitesse normale est donc connue : seule cette composante intervient et l'on peut supposer que le centre instantané de rotation de la plaque,  $I$ , est situé

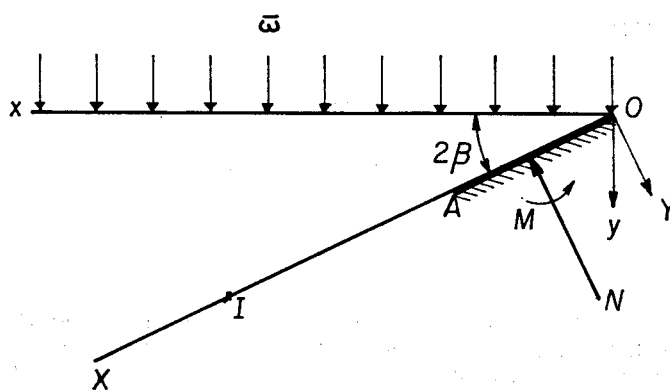


Fig. 1

sur  $X'OX$ . Les conditions sont ainsi : vitesse normale donnée par la rotation autour de  $I$ , et contrainte tangentielle nulle;

sur  $AX$  :  $AX$  est une surface libre, les contraintes appliquées sont nulles.

On pose  $OA = 2a$ ; l'angle du dièdre  $xOX = 2\beta$ .

On considère le système formé du massif plastique et de la paroi rigide lisse agissant sur lui. Le problème posé consiste à chercher, parmi tous les chargements correspondant aux conditions aux limites ci-dessus, les chargements limites.

Les conditions aux limites du problème correspondent pour le système à des chargements dépendant de trois paramètres  $Q_i$ , à savoir :  $N$ , force normale appliquée à la plaque (lisse);  $M$ , moment des efforts appliqués par rapport au milieu de la plaque;  $\bar{\omega}$ , intensité de la pression uniforme sur  $Ox$ .

D'autre part la condition de frottement lisse entre les deux éléments constitutifs du système vérifie le principe du travail maximal.

On peut donc appliquer la théorie des charges limites dans la formulation de ([8], [9]), dont nous allons rappeler la terminologie et les principaux résultats.

## 2. Théorie classique des charges limites

Soit un système soumis à un processus de chargement dépendant de  $n$  paramètres  $Q_i$ . Dans les hypothèses de validité de la théorie des charges limites (cf. [8], [11]), on démontre que :

2.1. Les chargements limites ont pour lieu, dans l'espace vectoriel (à  $n$  dimensions) des chargements du processus étudié, la frontière [variété à  $(n - 1)$  dimensions] de l'ensemble des chargements auxquels on peut associer au moins un champ de contraintes statiquement et plastiquement admissible (<sup>1</sup>). Cet ensemble est un convexe, et sa frontière est appelée *frontière d'écoulement*.

2.2. Tout mode de déformation du système, c'est-à-dire tout champ de vitesses de déformation cinématiquement admissible, est caractérisé vis-à-vis du type de chargement étudié par les valeurs des  $n$  paramètres  $\dot{q}_i$  associés aux  $Q_i$  dans l'expression générale de la puissance des forces extérieures.

Si on considère les modes de déformation « licites », c'est-à-dire les champs de vitesses de déformation cinématiquement et plastiquement admissibles (<sup>2</sup>), on peut définir pour chacun de ceux-ci, la *puissance dissipée* qui est une grandeur intrinsèque.

Alors le lieu des chargements limites admet la définition suivante, duale de celle du paragraphe 2.1 :

La frontière d'écoulement du système est l'enveloppe générale des plans obtenus en égalant dans tous les modes de déformation licites, la puissance des forces extérieures à la puissance dissipée.

Cet énoncé correspond à la méthode cinématique de détermination de la frontière d'écoulement.

2.3. Avec la terminologie de la théorie des charges limites, le problème posé au paragraphe 1 est donc la détermination de la frontière d'écoulement du système.

## 3. Solutions incomplètes

Les solutions données classiquement pour ce problème sont des solutions incomplètes au sens de Bishop [1]; ce type de solutions correspond on le sait, à l'application de la méthode cinématique de détermination de la frontière d'écoulement.

(<sup>1</sup>) Champ de contraintes satisfaisant les équations de l'équilibre les conditions aux limites sur les contraintes et ne violant pas le critère de plasticité; ces champs de contraintes sont aussi appelés « licites », de même que les chargements correspondants.

(<sup>2</sup>) Champ de vitesses de déformation licite : champ de vitesses de déformation cinématiquement admissible et tel que en chaque point du corps, le tenseur vitesse de déformation puisse être celui d'une déformation *plastique* du matériau.

## 3.1. COIN AIGU

Dans le cas où l'angle du coin est aigu, la solution comprend un champ discontinu dans (OABC) (*fig. 2*). La contrainte sur OA est alors une pression uniforme égale à

$$(1) \quad p = \bar{\omega} + 2k(1 - \cos 2\beta).$$

On sait d'après [3], [7] qu'il n'est possible d'associer un champ de vitesse cinématiquement et plastiquement admissible (C. P. A.) à ce champ de contraintes dans (OABC) que si la vitesse normale donnée sur OA est nulle en A et est non décroissante ainsi que sa dérivée première de A vers O (positivité de la puissance dissipée).

Dans le cas présent, il n'y a donc de champ de vitesse que si I est en A.

On a alors une solution incomplète au sens de Bishop [1] (\*) et d'après le paragraphe 2.2 on peut tirer la conclusion suivante : dans l'espace des chargements, le plan

$$(2) \quad M + N a - 2 a^2 [\bar{\omega} + 2k(1 - \cos 2\beta)] = 0$$

est extérieur ou tangent à la frontière d'écoulement du système.

## 3.2. COIN OBTUS

Dans le cas où l'angle du coin est obtus, la solution est celle de Prandtl : champ de contraintes continu dans (OABCD) avec éventail (*fig. 3*). La contrainte sur OA est une pression uniforme :

$$(3) \quad p = \bar{\omega} + 2k \left( 1 - \frac{\pi}{2} + 2\beta \right).$$

Un champ de vitesses C. P. A. peut y être associé si I est situé sur AX (positivité de la puissance dissipée).

On a alors une solution incomplète et, en posant  $AI = s$ , on peut énoncer que  $\forall s \geq 0$ , le plan

$$(4) \quad M + N(a + s) - 2a(a + s) \left[ \bar{\omega} + 2k \left( 1 - \frac{\pi}{2} + 2\beta \right) \right] = 0$$

est extérieur ou tangent à la frontière d'écoulement du système.

---

(\*) La terminologie de Bishop est différente de celle de Geiringer dans [3], où la solution est dite « complète » bien que le champ de contraintes dans les zones rigides ne soit pas donné.

4. Solutions statiques. Solutions complètes

Se plaçant du point de vue statique, on se propose de compléter les champs de contraintes donnés dans les solutions précédentes, en les prolongeant par des champs statiquement et plastiquement admissibles (S. P. A.) dans tout le massif plastique.

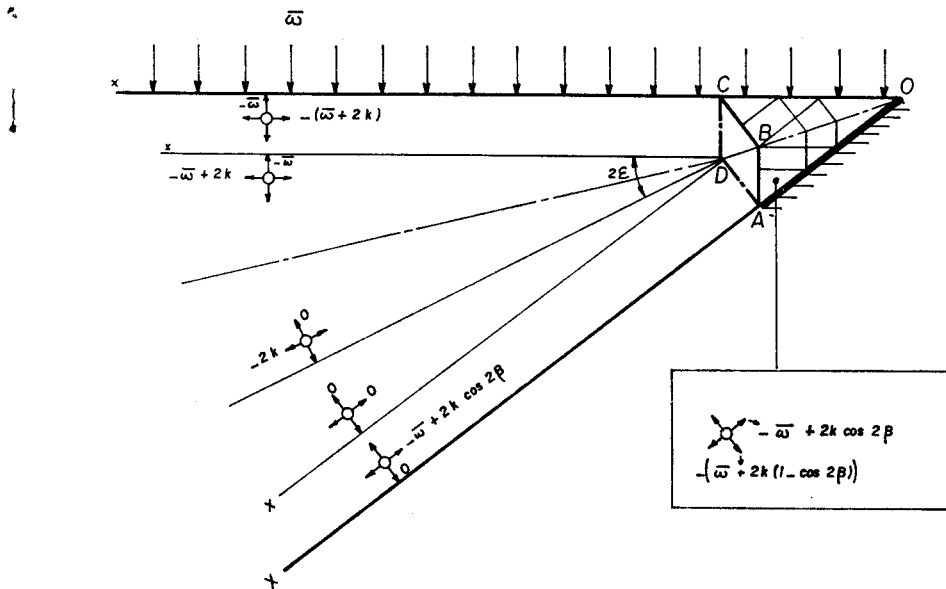


Fig. 2

4.1. COIN AIGU

Le prolongement proposé est indiqué à la figure 2, où CD et AD sont les normales à O x et OX en C et A, D x et DX les parallèles aux côtés de l'angle :

Dans (x CBD x), le champ est identique à celui de (OBC) :

$$\sigma_x = -(\bar{\omega} + 2k), \quad \sigma_y = -\bar{\omega}, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (\text{champ S. P. A.}).$$

Dans (BDA), le champ est identique à celui de (OBA) :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -(\bar{\omega} - 2k \cos 2\beta), \\ \sigma_y &= -[\bar{\omega} + 2k(1 - \cos 2\beta)], \quad \tau_{xy} = 0 \quad (\text{champ S. P. A.}). \end{aligned}$$

DA est une ligne de discontinuité du champ de contraintes, et dans (XADX) celui-ci est

$$\sigma_x = -(\bar{\omega} - 2k \cos 2\beta), \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0;$$

ce champ est plastiquement admissible (P. A.) si

$$(5) \quad \bar{\omega} \leq 2k(1 + \cos 2\beta).$$

Dans (x DX) on considère tout champ S. P. A. permettant de satisfaire les conditions aux limites :

$$(6) \quad \begin{cases} \text{sur } D x : \sigma_y = -\bar{\omega}, & \tau_{xy} = 0; \\ \text{sur } D X : \sigma_x = 0, & \tau_{xy} = 0. \end{cases}$$

D'après le théorème de Hill [6] appliqué au sommet D de l'angle x DX, il ne peut exister de tels champs que si

$$(7) \quad \bar{\omega} \leq 2k(1 - \cos 2\beta).$$

Si cette condition est satisfaite on peut utiliser le champ de contraintes représenté sur la figure, où  $\varepsilon$  est défini par

$$(8) \quad 0 \leq 2\varepsilon \leq 2\beta : \bar{\omega} = 2k(1 - \cos 2\varepsilon) \quad (*).$$

En conclusion on a mis en évidence un champ de contraintes S. P. A. dans tout le massif si (7) est satisfaite :

$$(7) \quad \bar{\omega} \leq 2k(1 - \cos 2\beta).$$

*On dispose alors d'une solution statique du problème.*

*De plus si I est en A (§ 3.1) on a une solution complète.*

Cela démontre que :

le segment  $M = 0$  :

$$(9) \quad N = 2a(\bar{\omega} + 2k(1 - \cos 2\beta)),$$

$$(10) \quad 0 \leq \bar{\omega} \leq 2k(1 - \cos 2\beta)$$

appartient à la frontière d'écoulement du système et correspond à la rotation de la plaque autour de I.

---

(\*) Si l'inégalité (7) est satisfaite au sens strict, les champs de contraintes S. P. A. dans (x DX) satisfaisant (6) ne sont pas uniques. On peut utiliser diverses variantes évidentes du champ proposé sur la figure, et aussi le champ de contraintes donné dans [10] à propos de l'étude du problème élastoplastique du coin infini.

D'autre part d'après le théorème d'unicité du champ de contraintes [5], le champ de contraintes dans (OABC), zone déformée plastiquement, est la solution exacte dans le cas où I est en A.

Si

$$(11) \quad \bar{\omega} > 2k(1 - \cos 2\beta),$$

le procédé indiqué ci-dessus ne permet pas d'obtenir une solution statique : le champ dans (x DX) n'est plus plastiquement admissible; cela ne prouve pas qu'il n'existe pas de moyen de compléter la solution incomplète.

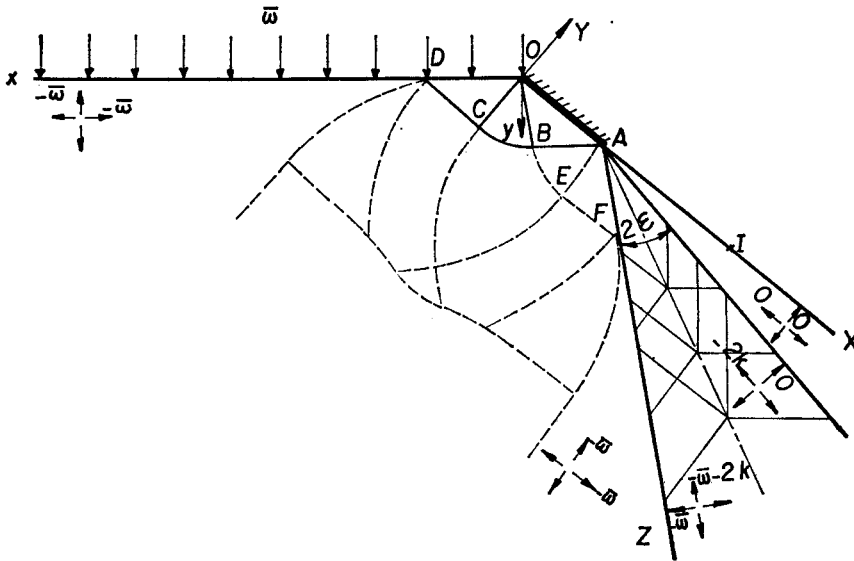


Fig. 3

Par contre en appliquant le théorème de Hill [6] au sommet A de l'angle XAB, on prouve qu'il n'est certainement pas possible de compléter la solution incomplète du paragraphe 3.1, si

$$(12) \quad \bar{\omega} > 2k \left( \frac{\pi}{2} + \cos 2\beta \right) \quad (*)$$

(\*) Cela ne prouve pas encore que la demi-droite (9), (12) n'appartient pas à la surface limite. Il paraît vraisemblable que la limite de validité de (9) se situe entre (11) et (12); ceci ne pourrait se démontrer que par un raisonnement cinématique en utilisant par exemple des modes de déformation avec ligne de glissement isolée, ce qui n'est pas de notre propos ici.

## 4.2. COIN OBTUS

Le prolongement proposé est indiqué à la figure 3.

Les angles  $AOx$  et  $OAZ$  sont égaux.

Dans  $(x DCBAZ)$ , on utilise le prolongement du champ de Prandtl par la méthode de Bishop [1], donné dans [11], [13] qui est S. P. A. [11]. (Par rapport au cas étudié dans ces références on surimpose au tenseur des contraintes, le tenseur isotrope  $-\bar{\omega}\delta_{ij}$ , ce qui ne modifie en rien les conclusions.)

Dans  $(XAZ)$  on considère tout champ de contraintes S. P. A. satisfaisant les conditions aux limites :

$$(13) \quad \begin{cases} \text{sur } AX : \sigma_y = 0, & \tau_{xy} = 0; \\ \text{sur } AZ : \sigma = -\bar{\omega}, & \tau = 0. \end{cases}$$

D'après le théorème de Hill [6] appliqué au sommet A de  $XAZ$ , il ne peut exister de tels champs que si

$$(5) \quad \bar{\omega} \leq 2k(1 + \cos 2\beta).$$

Si cette condition est satisfaite on peut utiliser le champ de contraintes représenté sur la figure 3, l'angle  $2\varepsilon$  y est défini par

$$(8) \quad \begin{cases} 0 \leq 2\varepsilon \leq (\pi - 2\beta), \\ \bar{\omega} = 2k(1 - \cos 2\varepsilon) \end{cases} \quad (e).$$

Au lieu du prolongement par la méthode de Bishop, on peut dans  $(x DCBAZ)$ , utiliser le prolongement du champ de Prandtl par la méthode de Shield [12] généralisée au cas d'un angle quelconque [11]. Rien n'est à modifier aux résultats ci-dessus.

En conclusion, si

$$(5) \quad \bar{\omega} \leq 2k(1 + \cos 2\beta),$$

on a mis en évidence un champ de contraintes S. P. A. dans tout le massif.

On dispose alors d'une solution statique du problème. Si I est sur AX, on a une solution complète.

On en déduit comme au paragraphe 3.1 que :  
le segment  $M = 0$  :

$$(14) \quad N = 2a \left[ \bar{\omega} + 2k \left( 1 + 2\beta - \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

$$(15) \quad 0 \leq \bar{\omega} \leq 2k(1 + \cos 2\beta)$$

(e) Même remarque qu'au paragraphe 4.1 à propos de (8).



appartient à la frontière d'écoulement du système. Pour chacun de ses points, les modes de déformation associés correspondent à toutes les rotations de centre I situé sur AX.

Le champ de contraintes dans (OABCD) est le champ de contraintes exact si I est sur AX.

Le théorème de Hill [6] appliqué au sommet A de l'angle XAB, montre que le prolongement de la solution incomplète du paragraphe 3.2 ne peut certainement pas être effectuée si

$$(16) \quad \bar{\omega} > 2k(\pi - 2\beta),$$

le procédé donné ci-dessus couvre donc une partie du domaine possible *a priori* (?).

Remarquons que la solution statique avec la ligne de discontinuité donnée au paragraphe 4.1 dans le cas du coin aigu, est encore valable si l'angle  $2\beta$  est obtus. C'est alors (5) et non plus (7) qui constitue la condition prépondérante; c'est-à-dire que le domaine de validité de cette solution statique est le même que celui de la solution continue : elle ne présente donc aucun intérêt dans ce cas.

### 5. Centre instantané de rotation situé sur OA

Nous reprenons maintenant les mêmes problèmes dans le cas où I est situé sur OA, la rotation de la paroi s'effectuant toujours dans le sens trigonométrique.

On obtient immédiatement les solutions complètes dans les cas d'angles aigus ou obtus : il suffit de considérer que la paroi est réduite à sa partie IO, qui seule reste en contact avec le massif; il y a décollement sous IA, qui est à traiter comme une surface libre : ces modes de déformation ont été clairement mis en évidence dans [4].

On procède alors comme aux paragraphes précédents.

Posant  $AI = 2i$ , on obtient les résultats suivants :  
coin aigu :

$$(17) \quad \begin{cases} N = 2(a - i)[\bar{\omega} + 2k(1 - \cos 2\beta)], \\ M = Ni, \\ 0 \leq \bar{\omega} \leq 2k(1 - \cos 2\beta), \\ 0 \leq i \leq a; \end{cases}$$

---

(?) Le théorème de Hill ne prouve pas que si  $\bar{\omega} \leq 2k(\pi - 2\beta)$  le prolongement peut être effectué.

coin obtus :

$$(18) \quad \begin{cases} N = 2(a-i) \left[ \bar{\omega} + 2k \left( 1 + 2\beta - \frac{\pi}{2} \right) \right], \\ M = N i, \\ 0 \leq \bar{\omega} \leq 2k(1 + \cos 2\beta), \\ 0 \leq i \leq a, \end{cases}$$

les segments (17) dans le cas du coin aigu, (18) dans le cas du coin obtus appartiennent à la frontière d'écoulement du système.

### 6. Conclusions

Les résultats qui précèdent permettent de tracer une partie de la frontière d'écoulement : surface conique à base parabolique (17) ou (18) (fig. 4).

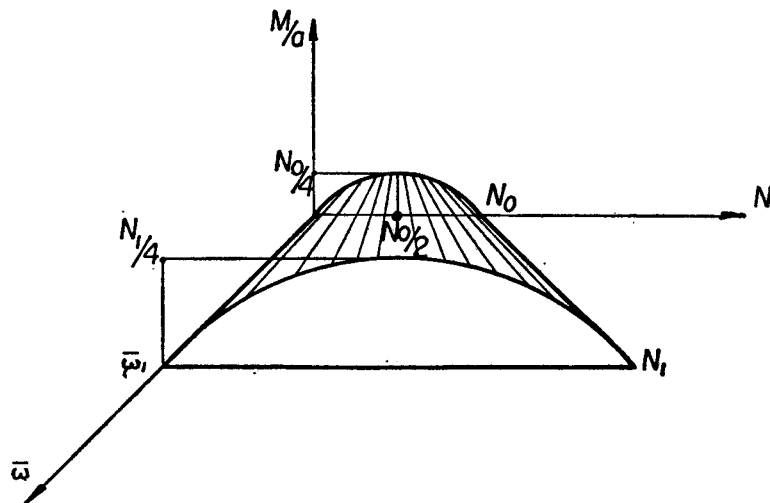


Fig. 4

Dans le cas du coin aigu, les paramètres ont les valeurs

$$\begin{aligned} N_0 &= 4ak(1 - \cos 2\beta), \\ \bar{\omega} &= 2k(1 - \cos 2\beta), \\ N_1 &= 8ak(1 - \cos 2\beta) = 2N_0. \end{aligned}$$

Cette surface correspond aux modes de déformation par rotation dans le sens trigonométrique autour d'un point I sur OA.

Dans le cas du coin obtus :

$$\begin{aligned} N_0 &= 4 ak \left( 1 + 2\beta - \frac{\pi}{2} \right), \\ \bar{\omega} &= 2k (1 + \cos 2\beta), \\ N_1 &= 4 ak \left( 2 + \cos 2\beta + 2\beta - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

$N_0 N_1$  est une arête de la frontière d'écoulement (\*) de sorte que les modes de déformation associés aux différents points de cette surface correspondent à toutes les rotations directes autour de points I situés sur OX.

La présentation de tous les résultats, en termes de théorie des charges limites, sous forme de frontière d'écoulement, a, outre l'avantage de la clarté, celui de permettre d'obtenir commodément des renseignements sur les chargements limites correspondant à des modes de déformation non étudiés. Il suffit pour cela d'appliquer la propriété de convexité de la frontière d'écoulement. C'est ainsi que dans le cas du coin obtus on sait que quel que soit le mode déformation, pour  $\bar{\omega}$  donné  $0 \leq \bar{\omega} \leq \bar{\omega}_1$ , N ne peut dépasser la valeur

$$N = 2a \left[ \bar{\omega} + 2k \left( 1 + 2\beta - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Collins [2] a recherché ce type de résultats par application directe des principes de minimum. Il est évident qu'il y a strictement équivalence entre les deux points de vue, mais la méthode utilisant les principes de minimum est relativement plus délicate et artificielle.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BISHOP J. F. W., *On the complete solution to problems of deformation of a plastic rigid material* (*J. Mech. Phys. Sol.*, vol. 2, n° 1, 1953, p. 43-53).
- [2] COLLINS H., *The upper bound theorem for rigid-plastic solids generalized to include Coulomb friction* (*J. Mech. Phys. Sol.*, vol. 17, 1969, p. 323-338).
- [3] GEIRINGER H., *Some recent results in the theory of an ideal plastic body in Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, New York, vol. 3, 1953, p. 199-294.
- [4] HAERINGER J., *Contribution à l'étude de la force portante des fondations de surface en milieu pulvérulent à deux dimensions* (Thèse Dr. Spec., Grenoble, 1964).

(\*) Dans le p an  $\left( N, \frac{M}{a} \right)$ , la trace du plan tangent le long de  $N_0 N_1$  a pour pente  $-1$  dans le cas du coin aigu; dans le cas du coin obtus, la pente de cette trace varie de  $-1$  à  $-\infty$ .

- [5] HILL, R., *On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point* (*Phil. Mag.*, vol. 42, 1951, p. 868-875).
- [6] HILL R., *On the limits set by plastic yielding to the intensity of singularities of stress* (*J. Mech. Phys. Sol.*, vol. 2, n° 4, 1954, p. 278-285).
- [7] LEE E. H., *On stress discontinuities in plane plastic flow* (*Proc. third Symp. App. Math.*, Mc Graw-Hill, 1950, p. 213-228).
- [8] MANDEL J., *Mécanique des milieux continus*, II, Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [9] PRAGER W., *Problèmes de plasticité théorique*, Dunod, Paris, 1958.
- [10] NAJAR J., RYCHLEWSKI J. et SHAPIRO G. S., *On the problems of the elastic-plastic state of an infinite wedge* (*Bull. Acad. Pol. Sc.*, vol. 14, n° 9, p. 515-522.)
- [11] SALENÇON J., *La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane* (*Thèse Fac. Sc.*, Paris, 1969).
- [12] SHIELD R. T. Brief note in *Appl. Mech.*, vol. 21, p. 193.
- [13] SZCZEPINSKI W., *Indentation of a plastic block by two opposite narrow punches* (*Bull Acad. Pol. Sc.*, vol. 14, n° 11-12, 1966, p. 671-676).

(Manuscrit reçu le 25 mai 1971.)

---