

**FORCE PORTANTE D'UN SOL SUR UNE ASSISE RIGIDE**  
**THE BEARING CAPACITY OF SOILS ON A ROCK FOUNDATION**

J. MANDEL, Dr.Sc., Professeur  
 J. SALENCON, Ingénieur des Ponts et Chaussées

*Ecole Polytechnique, Laboratoire de Mécanique des Solides, Paris, France*

**SOMMAIRE.**

Considérant une semelle filante agissant sur une couche d'argile reposant sur un massif rigide, les auteurs calculent, en fonction de l'épaisseur de la couche, les coefficients de majoration sur les différents termes de la force portante. Cette étude est faite dans le cadre de la théorie de l'équilibre limite, l'argile étant supposée obéir au critère de Coulomb avec cohésion. Les résultats sont donnés pour  $\phi = 0, 10, 20$  et  $30$  degrés.

**I - INTRODUCTION.**

Nous étudions, par la méthode des caractéristiques, la force portante d'une semelle filante sur une couche argileuse reposant sur un massif rigide. On suppose que la fondation est chargée axialement et on fait l'hypothèse qu'à l'interface entre la couche d'argile et le massif rigide le frottement maximal est mobilisé.

Ce problème est traité, en déformation plane, dans le cadre de la théorie de l'équilibre limite des Sols (Sokolovski, 1960), l'argile étant supposée obéir au critère de Coulomb avec cohésion.

Cette question a été l'objet des travaux de Livneh (1965), Vyalov (1966), mais la solution proposée par ces auteurs suppose que la couche d'argile se sépare en deux blocs qui s'écartent en glissant sur le massif sous-jacent de part et d'autre d'une zone plastique située sous la fondation. Un tel mécanisme ne pourrait intervenir que si l'expansion latérale de la couche d'argile était libre, la couche étant par exemple coupée par deux tranchées à droite et à gauche de la fondation. La conclusion suivant

laquelle la capacité portante d'une fondation serait diminuée, et non augmentée, par la présence d'une assise rigide sous-jacente n'est donc valable que dans ces conditions très particulières qui ne correspondent pas aux problèmes réels.

**2 - NOTATIONS ET GENERALITES.**

Rappelons que pour une semelle isolée reposant sur un sol homogène et isotrope infini, on pose habituellement (Terzaghi) :

$$P_{\max} = \frac{F}{B} = qN_q + CN_c + \frac{1}{2} \gamma BN_\gamma \quad (1)$$

$P_{\max}$  désignant la pression moyenne maximale qui peut être exercée par la fondation,  $B$  la largeur de celle-ci,  $q$  la surcharge,  $C$  la cohésion,  $\gamma$  le poids spécifique du terrain ;  $N_q, N_\gamma, N_c$  sont des coefficients sans dimensions, fonctions de  $\phi$ .

Dans le cas où le sol est composé d'une couche homogène et isotrope d'épaisseur  $h$  reposant sur un massif rigide, nous allons calculer la force portante par application de la méthode de superposition (\*)

(\*) On sait que cette méthode n'est qu'approchée, mais va dans le sens de la sécurité.

ce qui conduit pour  $p_{max}$  à une expression de la même forme que (1), avec des coefficients  $N'_q, N'_c, N'_c$  différents de ceux de (1).

(On a toujours la relation :

$$N'_c = \frac{N'_q - 1}{\text{tg} \varphi} \quad (2) .$$

Nous définissons les coefficients de majoration  $F_Y, F_q, F_c$  :  $N'_Y = F_Y N_Y, N'_q = F_q N_q, N'_c = F_c N_c$  (3).

Pour une valeur de  $\varphi$  donnée, ces coefficients sont des fonctions de  $B/h$ .

Nous traiterons d'abord le cas où l'argile est à angle de frottement interne nul, son critère de plasticité devenant alors celui de Tresca. Ensuite nous étudierons le cas où, l'angle de frottement interne n'étant pas nul, le critère est celui de Coulomb avec cohésion. Nous ne considérons pour chacun de ces deux problèmes que la fondation rugueuse ; le cas de la fondation lisse, qui présente peu d'intérêt pratique, se traiterait de manière analogue.

On désigne par  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ) les contraintes principales (positives en traction), et par  $\theta$  l'angle de l'axe principal 1 avec Ox, et on pose  $p = -(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ .

Rappelons enfin que, du point de vue de la théorie de l'équilibre limite où nous nous plaçons, l'argile est supposée rigide, indéformable, tant que le critère de plasticité n'est pas atteint. La couche d'argile est infinie horizontalement et les déplacements à l'infini sont nuls.

3 - COUCHE D'ARGILE D'ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE NUL.

On sait que dans le cas d'une argile d'angle de frottement interne nul, on a  $N_q = 1, N_c = (\pi + 2), N_Y = 0$ .

Si l'épaisseur de la couche d'argile est suffisante, plus précisément si  $h \geq B \frac{\sqrt{2}}{2}$ , le schéma d'écoulement de Prandtl (fig. 1) est valable, et l'on a :

$$N'_q = 1, N'_c = (\pi + 2), N'_Y = 0$$

les facteurs de majorations étant égaux à 1.

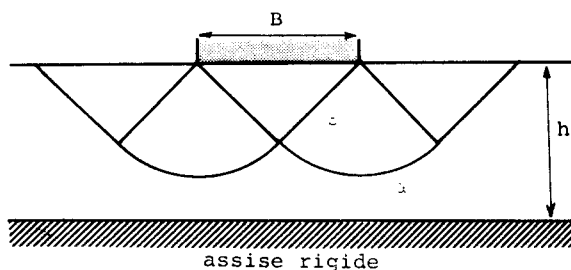


Figure 1

Si  $h < B\sqrt{2}/2$ , le schéma d'écoulement de la fig. 1 n'est plus valable. Il y a interférence de la fondation et du massif rigide sous la couche. Le schéma d'écoulement est alors celui de la fig. 2 proposé par Johnson et Kudo (1960), et indépendamment par Mandel

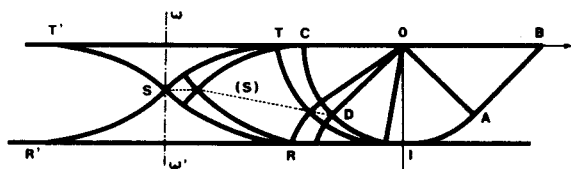


Figure 2

Il correspond au mécanisme suivant : La zone déformée plastiquement (à droite de l'axe de symétrie) est STOBAIRS ; STT' est un triangle rigide qui s'enfonce verticalement avec la fondation ; il y a glissement sous la fondation le long de TO ; SRR', triangle rigide, reste immobile ; il y a glissement le long de RIAB ; au-delà de IAB les déplacements sont nuls.

Le réseau de caractéristiques dans la zone déformée est déterminé par la caractéristique  $\alpha$ , CI, arc de cercle de centre O, et les conditions de frottement maximal (\*) sous la fondation ( $x = 0$ ) et à l'interface ( $x = h$ ). La zone déformée STOBAIRS est limitée par les deux caractéristiques  $\alpha$  et  $\beta$  de ce réseau qui se coupent sur l'axe  $\omega\omega'$  en faisant un angle de  $\pi/4$  avec celui-ci (les directions principales des contraintes en ce point S sont parallèles à Ox et Oy).

(\*) C.à.d. contrainte de cisssion égale à C.

## FORCE PORTANTE

La connaissance de  $p = C$  sur OB détermine les contraintes en tout point de la zone déformée par utilisation des relations le long des caractéristiques.

$$\begin{aligned} d(p - \gamma x) + 2Cd\theta &= 0 & \text{ligne } \alpha \\ d(p - \gamma x) - 2Cd\theta &= 0 & \text{ligne } \beta \end{aligned} \quad (4)$$

Le calcul de la force portante de la fondation se fait alors simplement par intégration des contraintes exercées sur la fondation : en fait, le plus pratique pour le calcul numérique est d'intégrer les contraintes verticales de O à S le long de la courbe (S) lieu du point S, et de soustraire au résultat obtenu le poids du sol situé au-dessus de cette courbe. Il vient :

$$P_{\max} = \frac{2}{B} \int_s^0 (p - \gamma x) dy = CN'_C = CF_C N'_C \quad (5)$$

valeur qui ne dépend pas de  $\gamma$ .

Il est évident d'autre part que  $N'_q \equiv N'_q = 1$

Les résultats concernant  $F_C$  sont représentés à la fig. 6.

Lorsque  $B/h \rightarrow \infty$ , le réseau de caractéristiques sous la fondation tend, au fur et à mesure que l'on s'éloigne de O, vers le réseau limite, donné par Prandtl pour le problème de la presse, composé de cycloïdes. On en déduit l'expression asymptotique de  $N'_C$  :

$$N'_C \sim (\pi + 1 + B/2h) \quad (6)$$

(6) constitue une bonne approximation de  $N'_C$  dès que  $B/h \geq 4$ .

D'un point de vue plus théorique on peut faire quelques remarques complémentaires. En effet, la théorie classique des charges limites est applicable à ce problème, et en toute rigueur, les valeurs de  $N'_C$  et  $F_C$  obtenues ci-dessus, par la méthode cinématique ne sont que des majorants des valeurs exactes. On a démontré, [Salençon (1968)], en utilisant aussi la méthode statique, que  $N'_C$  et  $F_C$  sont bien les valeurs exactes et

que de plus, ces résultats étaient valables dès que le massif inférieur du bicouche, sans être infiniment rigide, avait une rigidité suffisante finie (\*); dans le même article on a également étudié le cas de la fondation lisse, d'intérêt pratique plus réduit, et l'on a démontré une relation remarquable entre les valeurs de  $P_{\max}$  correspondant aux cas "fondation lisse" et "fondation rugueuse":

$$P_{\max}^R \left(\frac{B}{h}\right) = P_{\max}^L \left(\frac{2B}{h}\right) \quad (7)$$

### 4 - COUCHE D'ARGILE D'ANGLE DE FROTTEMENT INTERNE NON NUL.

#### 4.1 - Calcul de $N'_\gamma$

Pour ce calcul on considère la fondation agissant sur la couche supposée pesante et sans cohésion, avec l'angle de frottement interne  $\phi$ , celle-ci reposant avec frottement maximal (\*\*\*) sur le massif rigide.

Dans le cas du poinçonnement d'un milieu infini ( $h = \infty$ ) le schéma d'écoulement est celui de la figure 3 (Lundgren et Mortensen, 1953).

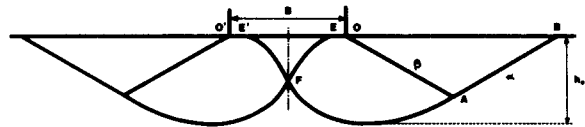


Figure 3

Il y a glissement sous la fondation au voisinage des bords, le long de OE et O'E'. Le coin rigide EFE' accompagne la fondation dans son mouvement vertical. La zone déformée plastiquement est OEFAB (le point O

(\*) Physiquement on devait s'attendre à un résultat de ce type, mais plutôt sous forme d'une asymptote plus ou moins rapidement atteinte.

(\*\*) C'est-à-dire contrainte inclinée de  $\phi$  sur la normale au massif.

MANDEL and SALENCON

n'est pas une caractéristique  $\alpha$  réduite à un point mais un point de discontinuité : il n'y a pas "d'éventail" en O, mais une seule caractéristique  $\beta$  la droite OA, (H. Reissner, 1925).

Les lignes caractéristiques dans la zone déformée sont homothétiques de centre O. Les équations permettant de construire ces lignes sont données dans Sokolovski (1960), p. 138.

Nous désignons par  $h_0$  l'épaisseur de la zone déformée dans cette solution pour une largeur de fondation égale à B donnée.

Traitant maintenant le problème de la fondation sur le bicouche, il est évident que si l'épaisseur de la couche supérieure est suffisante, c'est-à-dire :  
 Si  $h/B \geq h_0/B$ , le schéma d'écoulement de la fig. 3 est encore valable, et l'on a :  $N'_Y = N_Y$ .

Si  $h/B < h_0/B$ , le schéma d'écoulement est celui de la fig. 4 analogue dans son principe à celui de la fig. 2, et le mécanisme d'écoulement est du même type.

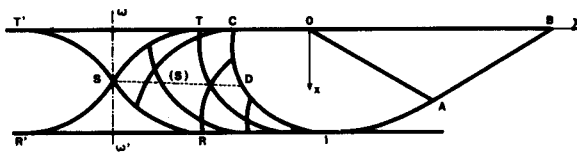


Figure 4

Le réseau de caractéristiques dans la zone déformée est déterminé par la caractéristique  $\alpha$ , CIA, qui est celle du schéma de Lundgren et Mortensen, et les conditions de

frottement maximal sous la fondation ( $x = 0$ ) et à l'interface ( $x = h$ ). La zone déformée (de droite) est limitée par deux caractéristiques  $\alpha$  et  $\beta$  comme au § 2. (En S les directions principales des contraintes sont parallèles à Ox et Oy).

Les contraintes sont connues dans toute la zone déformée à partir de la connaissance de  $p = 0$  sur OB, par les relations le long des caractéristiques (cf. Sokolovski (1960) p. 16 sqq).

Pour le calcul de la force portante, le plus pratique est d'intégrer les contraintes verticales de O à S le long de la courbe (S) lieu du point S et de soustraire du résultat obtenu le poids du sol situé au-dessus de cette courbe.

D'où  $N'_Y$  et  $F_Y = N'_Y/N_Y$ , qui sont des fonctions de B/h.

La figure 5 représente  $F_Y$  pour des valeurs de  $\phi$  égales à  $10^\circ$ ,  $20^\circ$  et  $30^\circ$ , les valeurs trouvées pour  $N_Y$  étant :  $N_Y = 0,43$  ; 2,84 ; 14,7. (Voir aussi le Tableau I).

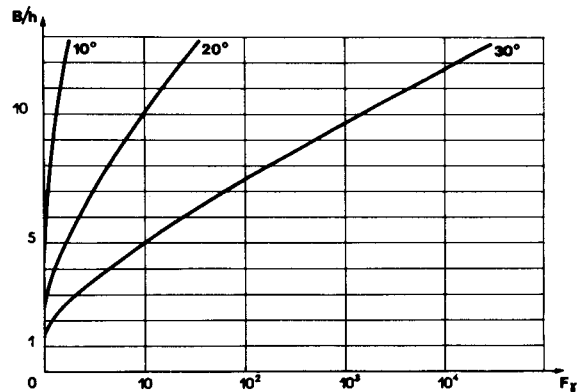


Figure 5

TABLEAU I : Valeurs de  $F_Y$

$\phi$ \ B/h		2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	40
$30^\circ$	$B/h \leq 1,3$ $F_Y = 1$	1,20	2,07	4,23	9,9	24,8	178	1450	$3,81 \times 10^5$	$1,3 \times 10^8$	$1,95 \times 10^{13}$	
$20^\circ$	$B/h \leq 2,14$ $F_Y = 1$		1,07	1,28	1,63	2,20	4,41	9,82	97	340	$2,6 \times 10^5$	$7 \times 10^7$
$10^\circ$	$B/h \leq 4,07$ $F_Y = 1$				1,01	1,04	1,12	1,36	2,28	4,33	20	113

## FORCE PORTANTE

### 4.2 - Calcul de $N'_q$ et $N'_c$

On sait que  $N'_c = (N'_q - 1)/\text{tg}\phi$ .

Pour le calcul de  $N'_q$ , on considère la fondation agissant sur la couche non pesante sans cohésion, avec angle de frottement interne  $\phi$ , celle-ci soumise à la surcharge de surface  $q$  et reposant avec frottement maximal sur le massif rigide.

Les raisonnements sont exactement les mêmes qu'au § 4.1. Les schémas d'écoulement utilisés, très semblables aux précédents, en diffèrent cependant, car dans le cas de la semelle isolée agissant en milieu infini,

le point O est maintenant une caractéristique  $\alpha$  réduite à un point ; la caractéristique  $\alpha$ , CIA, est une spirale logarithmique de pôle O.

En intégrant les contraintes le long de (S) de S à O, on obtient :  $N'_q$  et  $F_q = N'_q/N_q$  d'où :  $N'_c$  et  $F_c = N'_c/N_c$  en fonction de  $B/h$  à  $\phi$  fixé.

Les calculs ont été faits pour  $\phi = 10^\circ$ ,  $20^\circ$  et  $30^\circ$ . Les figures 6 et 7, les tableaux II et III en présentent les résultats pour  $F_c$  et  $F_q$ . Les valeurs trouvées pour  $N_c$  et  $N_q$  étant :  $N_c = 8,3 ; 14,8 ; 30,1 ; N_q = 2,47 ; 6,40 ; 18,4$ .

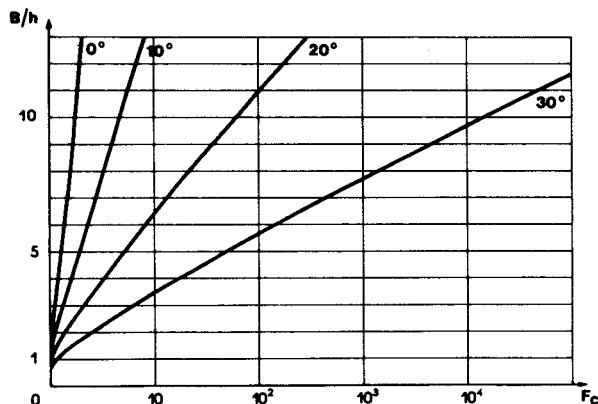


Figure 6

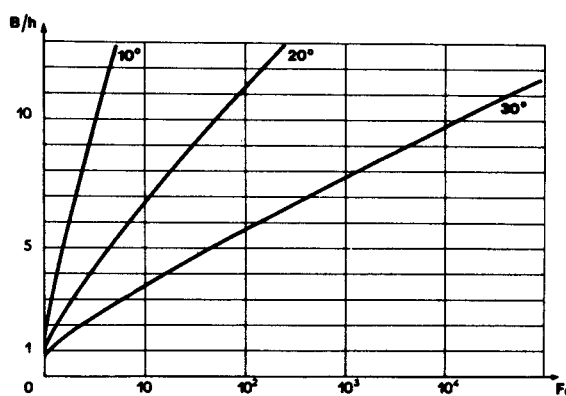


Figure 7

TABLEAU II : Valeurs de  $F_c$

$\phi$	$B/h$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
$30^\circ$	$B/h \leq 0,63$ $F_c = 1$	1,13	2,50	6,36	17,4	50,2	150	1444	$1,48 \times 10^4$	$5,81 \times 10^6$		
$20^\circ$	$B/h \leq 0,86$ $F_c = 1$	1,01	1,39	2,12	3,29	5,17	8,29	22,0	61,5	905	$1,5 \times 10^4$	
$10^\circ$	$B/h \leq 1,12$ $F_c = 1$		1,11	1,35	1,62	1,95	2,33	3,34	4,77	11,7	29,4	
$0^\circ$	$B/h \leq 1,414$ $F_c = 1$		1,02	1,11	1,21	1,30	1,40	1,59	1,78	2,27	2,75	3,72

MANDEL and SALENCON

TABLEAU III : Valeurs de  $F_q$

B/h		1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
30°	$B/h \leq 0,63$ $F_q = 1$	1,12	2,42	6,07	16,5	47,5	142	1370	$1,40 \times 10^4$	$5,50 \times 10^6$		
20°	$B/h \leq 0,86$ $F_q = 1$	1,01	1,33	1,95	2,93	4,52	7,14	18,7	51,9	763	$126 \times 10^4$	
10°	$B/h \leq 1,12$ $F_q = 1$		1,07	1,21	1,37	1,56	1,79	2,39	3,25	7,37	17,9	92,3

5 - COMMENTAIRES SUR LES RESULTATS.

On remarque que  $F_\gamma$ ,  $F_q$ ,  $F_c$  sont des fonctions croissantes de B/h. La croissance est d'autant plus rapide que  $\phi$  est plus élevé. Il est possible par un calcul analogue à celui fait dans le cas  $\phi = 0$ , d'obtenir les expressions asymptotiques de  $N'_c$ ,  $N'_q$ ,  $N'_\gamma$ , pour  $\phi \neq 0$ , qui sont du même type que celles trouvées par Mandel (1942, 1943) pour le problème de la presse. (Le réseau de caractéristiques tend vers un réseau de cycloïdes isogonales, (W. Hartmann, 1925)).

Les valeurs de B/h au-dessous desquelles, pour une valeur de  $\phi$  donnée,  $F_\gamma$  d'une part,  $F_q$  et  $F_c$  d'autre part, sont égaux à 1 sont différentes. Cela est une conséquence de l'emploi de la méthode classique de superposition des états d'équilibres limites, qui conduit à la séparation de la force portante en trois termes.

Les résultats obtenus ici sont particulièrement intéressants dans le cas de fondations larges. C'est ainsi que pour des remblais autoroutiers sur une couche superficielle, des rapports B/h de 10 à 20 ne sont pas exceptionnels.

Enfin nous croyons utile de donner quelques précisions sur l'hypothèse qui a été faite, de la mobilisation du frottement maximal à l'interface. On suppose ainsi qu'il y a glissement, non directement entre la cou-

che d'argile et le massif, mais entre une pellicule d'argile adhérente au massif rigide et le reste de la couche. Il suffit pour qu'il en soit ainsi que, en désignant par  $\psi$  l'angle de frottement mutuel entre le massif et l'angle et en ne tenant compte d'aucune cohésion dans ce contact, la condition suivante soit vérifiée :

$$P_I > C \cot \gamma (\psi - \phi) \quad (8)$$

Dans le cas où  $q$  et  $\gamma$  sont nuls (calcul de  $N'_c$ ), (8) donne :

$$P_I = C \cot \gamma \phi \times \frac{e^{(\frac{\pi}{2} + \phi) \tan \phi}}{1 - \sin \phi} - 1 \quad (9)$$

dont on déduit une valeur minimale de  $\psi$  telle que l'hypothèse faite soit sûrement justifiée (tableau IV) :

TABLEAU IV

$\phi$	0	10°	20°	30°
$\psi$	22,5	25,2	30°	35,8

Dans les autres cas la valeur minimale de  $\psi$  est plus faible, puisque si  $C = 0$  la condition devient simplement  $\psi > \phi$ .

Il résulte de là que dans la majorité des cas l'hypothèse du frottement maximal

### FORCE PORTANTE

est justifiée si la couche d'argile est saine dans toute son épaisseur.

S'il n'en est pas ainsi, en particulier si à l'interface on a une couche d'argile de moins bonne qualité, on obtiendra une approximation par défaut en considérant le même problème que celui traité dans ce travail, dans le cas de l'interface lisse. Les schémas d'écoulement correspondants ainsi que divers résultats sont donnés par Mandel et Salençon (1969). Les tableaux V et VI ci-dessous donnent les valeurs de  $F_c$  et  $F_g$  dans ce cas. Pour  $\phi = 0$ ,  $N'_c = 4$  pour  $B/h = 2$  et, pour  $B/h > 2$ , on pourra utili-

ser l'expression asymptotique :

$$N'_c \sim \left( \frac{\pi}{2} + 2 + \frac{B}{4h} \right) \quad (10)$$

qui fournit très rapidement une excellente approximation.

On remarque sur ces résultats que si l'interface du bicouche est lisse, pour les valeurs faibles de  $B/h$ , la force portante de la fondation est diminuée par la présence d'une couche rigide sous la couche d'argile, par rapport à celle obtenue sur couche d'argile infinie.

TABLEAU V : Valeurs de  $F_c$

$\phi$ \ B/h		2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
30°	B/h=1,154 $F_c = 0,460$	0,562	0,891	1,46	2,33	3,78	10,5	30,2	491	8930	$351 \times 10^4$
20°	B/h=1,40 $F_c = 0,585$	0,622	0,776	0,997	1,26	1,58	2,49	3,96	13,3	47,7	703
10°	B/h=1,68 $F_c = 0,691$	0,699	0,774	0,879	0,994	1,11	1,36	1,66	2,67	4,22	10,5
0°	B/h = 2 $F_c = 0,778$	0,778	0,808	0,861	0,918	0,972	1,07	1,17	1,42		

TABLEAU VI : Valeurs de  $F_g$

$\phi$ \ B/h		2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
30°	B/h=1,154 $F_g = 0,489$	0,586	0,897	1,43	2,26	3,63	9,95	28,65	464	8450	$331 \times 10^4$
20°	B/h=1,40 $F_g = 0,650$	0,681	0,811	0,998	1,22	1,49	2,26	3,50	11,4	40,4	594
10°	B/h=1,68 $F_g = 0,816$	0,821	0,865	0,928	0,996	1,07	1,22	1,39	1,99	2,91	6,63

## MANDEL and SALENCON

### 6 - PRECISIONS SUR LES METHODES DE CALCUL EMPLOYEES.

On a utilisé la méthode d'intégration le long des caractéristiques, les petits arcs élémentaires de caractéristiques étant assimilés à des arcs de cercles.

Dans le cas  $\phi = 0$ , et pour  $N'_q$  et  $N'_c$  dans le cas  $\phi \neq 0$ , où le premier théorème de Hencky est applicable, le pas du réseau, constant sur chaque caractéristique, était de 1 degré et la méthode de calcul ne nécessitait pas d'itération.

Dans le cas  $\phi \neq 0$  pour  $N'_y$ , le pas était de 1 degré sur la caractéristique initiale et nous avons effectué quatre itérations. Un problème supplémentaire se pose également dans ce cas, qui est la construction de la caractéristique  $\alpha$  initiale par la méthode de "tir au but".

Les calculs numériques nécessités par ce travail ont été effectués sur l'ordinateur UNIVAC 1108 du C.C.S.A.

### REMERCIEMENTS.

Nous remercions M. Morlière qui a participé à cette étude, et également M. Passos pour sa collaboration dans la délicate détermination, par la méthode du "tir au but" de la caractéristique  $\alpha$  initiale.

### REFERENCES.

HARTMANN, W., (1925), Thèse, Université de Göttingen, Über die Integration der Differential Gleichungen des ebenen Gleichgewichtszustandes für den allgemein plastischen Körper.

JOHNSON, W., et KUDO, H., (1960) The compression of rigid perfectly plastic material between rough parallel dies of unequal width Int. J. Mech. Sc. 1 4 p. 336.

LIVNEH, M., (1965) The theoretical bearing capacity of soils on a rock foundation, C-R. 6ème Cong. Int. de Mec. des Sols, Montréal, tome 2, p. 122.

LUNDGREN, H., et MORTENSEN, K., (1953) Determination of the bearing capacity of continuous footing on sand, C-R. IIIe Cong. Int. de Mec. des Sols, Zurich, tome 1, p. 409.

MANDEL, J., (1942) Equilibre par tranches planes des solides à la limite d'écoulement. Thèse, Imp. Louis Jean, Gap, France.

MANDEL, J., (1943) Equilibres limites des milieux plastiques plans. Revue Travaux Juin, Juillet, Nov. , 1943

MANDEL, J., et SALENCON, J. (1969), Force portante d'une fondation sur un bicouche à interface lisse C-R. Acad. Sc. Paris, A, 268.

REISSNER, H., (1925), Proc. first Int. Cong. Appl. Mech., p. 295, Delft 1925.

SALENCON, J., (1968) Poinçonnement d'un bicouche en déformation plane, C-R, Acad, Sc, Paris, A, 266, p. 1210.

SOKOLOVSKI, V.V., (1960), Statics of soil media, Butterworths Scientifics publications, Londres.

VYALOV, S.S., (1966), Bearing capacity of weak soil layer with underlying rigid base, Proc. 3rd Asian Regional Conf. on soil mechanics and civil engineering, Haifa.