

ANNALES DE L'INSTITUT TECHNIQUE
DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS

Supplément au N° 295-296 JUILLET-AOUT 1972

SÉRIE : THÉORIES ET MÉTHODES
DE CALCUL

N° 152

**ÉCOULEMENT PLASTIQUE LIBRE ET ANALYSE LIMITE
POUR LES MATÉRIAUX STANDARDS
ET NON STANDARDS**

par

Jean **SALENÇON**,

Ingénieur des Ponts et Chaussées - Docteur ès Sciences
Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique

INSTITUT TECHNIQUE DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS

RÉSUMÉ

On donne une présentation nouvelle de la théorie des charges limites dans le cas d'un nombre fini de paramètres de chargement. On y met en évidence les propriétés mathématiques fondamentales sur lesquelles repose la théorie et on montre que dans le cas du matériau standard la détermination des solutions du problème d'écoulement libre se ramène à la minimisation d'une fonctionnelle. Le cas de certains matériaux non standards est également traité.

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird eine neue Darstellung der Grenzlasttheorie für den Fall einer endlichen Anzahl Belastungsparameter gegeben. Die grundlegenden mathematischen Eigenschaften, auf denen die Theorie beruht, werden herausgestellt und es wird gezeigt, dass im Falle des Standard — Materials die Lösungen des Problems des freien Fließens auf die Minimierung eines Funktional zurückgeführt werden können. Der Fall gewisser, nicht standardmässiger, Materialien wird ebenfalls behandelt.

Mots clés : Écoulement plastique • Analyse • Matériau • Charge limite • Facteur • Chargement • Procédé • Statique • Cinématique.

SUMMARY

A new formulation for limit analysis in the case of a finite number of load parameters is given. The basic mathematical properties are underlined and it is shown that for a plastic material with associated flow law, the stress fields and strain rates fields corresponding to free plastic flow are obtained by means of the minimization of a functional. The case of some materials with non associated flow laws is also studied.

RESUMEN

Se da aquí una nueva presentación de la teoría de las cargas límites en el caso de un número finito de parámetros de carga. Se hacen resaltar las propiedades matemáticas fundamentales sobre las cuales se funda la teoría y se demuestra que, en el caso del material normal, la determinación de las soluciones del problema del movimiento libre queda reducida a la minimización de una funcional. También se trata el caso de ciertos materiales no normales.

Les thèses et la méthode d'exposition adoptées par les auteurs peuvent parfois heurter certains points de vue habituellement admis. Mais il doit être compris que ces thèses, à l'égard desquelles l'Institut Technique ne saurait prendre parti, ne visent en rien les personnes ni le principe des Institutions.

ÉCOULEMENT PLASTIQUE LIBRE ET ANALYSE LIMITE POUR LES MATÉRIAUX STANDARDS ET NON STANDARDS

par J. SALENÇON

NOTATIONS

V	volume d'un solide.	{Q}	espace vectoriel des chargements.
S	frontière du solide.	{ \dot{q} }	espace vectoriel des vitesses de déformation.
T	vecteur contrainte de composantes T_i .	f	fonction de charge du matériau.
u	vitesse de composantes u_i .	$\underline{\sigma}$	tenseur des contraintes, valeur du champ σ au point courant.
S_{u_i}	partie de S sur laquelle u_i est donnée.	\underline{v}	tenseur des vitesses de déformation, valeur du champ v au point courant.
S_{T_i}	partie de S sur laquelle T_i est donnée.	$\underline{\sigma} \cdot \underline{v}$	produit doublement contracté = $\sigma_{ij} v_{ji}$.
J_a	jeu de données dynamiques.	$\partial f(\underline{\sigma})$	sous différentiel de f au point $\underline{\sigma} =$ ensemble des \underline{y} tels que : $f(\underline{\sigma}^*) - f(\underline{\sigma}) \geq y \cdot (\underline{\sigma}^* - \underline{\sigma})$, $\forall \underline{\sigma}^*$.
J_c	jeu de données cinématiques.	g	potentiel plastique du matériau non standard.
σ	champ de contraintes.	[u]	discontinuité de u.
v	champ de vitesses de déformation.		
$Q(\sigma) = (Q_1(\sigma), \dots, Q_n(\sigma))$	chargement du système.		
$\dot{q}(v) = (\dot{q}_1(v), \dots, \dot{q}_n(v))$	vitesse de déformation du système.		

1. INTRODUCTION

On sait que l'étude de l'écoulement plastique libre d'un système élasto-plastique se ramène sous certaines conditions [3, 4] à l'étude du même problème pour un système identique constitué du matériau rigide plastique associé. C'est de cette propriété que découle toute l'importance de l'utilisation du schéma de comportement rigide-plastique. On peut alors pour la détermination des chargements correspondant à l'écoulement libre utiliser des méthodes variationnelles portant sur les champs de contraintes et les champs de vitesses de déformation : c'est la théorie des charges limites.

Le but du présent article est, après une étude du problème des conditions à la limite, de présenter la théorie des charges limites sous une forme mettant clairement en évidence les propriétés mathématiques utilisées et qui soit bien adaptée à l'utilisation pratique. De plus il sera possible de considérer outre les matériaux standards, certains matériaux non standards [5, 7, 8].

La forme mathématique, qui pourra sembler trop moderne à certains et déjà désuète à d'autres, a été choisie non dans un souci d'académisme, mais parce qu'elle est la mieux appropriée au but fixé.

2. CONDITIONS A LA LIMITE. CHARGEMENT DÉPENDANT D'UN NOMBRE FINI DE PARAMÈTRES

2.1. Pour un système rigide-plastique, les seules solutions possibles qui ne se réduisent pas à la solution triviale pour le champ de vitesses de déformation sont les solutions d'écoulement plastique libre.

Ceci impose certaines restrictions sur la façon de poser les conditions à la limite qui doivent être compatibles avec l'écoulement libre. C'est ce que MANDEL [4] appelle les conditions à la limite **cohérentes**. En particulier il convient pour que le problème soit correctement posé de laisser aux données dynamiques (contraintes au contour et forces de masse) un certain caractère variable.

En fait dans tous les problèmes pratiques, la formulation des conditions à la limite la mieux adaptée est celle des paramètres de chargement, spontanément utilisée par les ingénieurs, que l'on peut présenter comme suit.

2.2. Soit un solide V de frontière S. On suppose que le processus de chargement subi par le matériau possède les propriétés suivantes :

il est possible de définir en chaque point M de S trois axes fixes orthogonaux entre eux M_x , (les direc-

tions de ces axes peuvent varier d'un point à un autre de S), tels que tout jeu de données à la limite correspondant à un chargement du processus étudié consiste en la donnée de trois composantes suivant ces trois axes pour l'ensemble des deux vecteurs T et u (contrainte et vitesse), la nature de la donnée suivant chaque axe étant fixe.

On désigne par S_{u_i} la portion de S sur laquelle u_i est donnée; S_{T_i} la portion de S sur laquelle T_i est donnée.

On a :

$$S_{u_i} \cup S_{T_i} = S, \quad S_{u_i} \cap S_{T_i} = \emptyset, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

Nous appellerons :

— **jeu de données dynamiques**, J_d :

des données T_i sur S_{T_i} ($i = 1, 2, 3$)
 F (forces de masse) en tout point de V
 (telles que l'équilibre des forces extérieures totales soit possible).

— **jeu de données cinématiques**, J_c :

des données u_i sur S_{u_i} ($i = 1, 2, 3$)

— **jeu de données**, J :

la réunion d'un jeu de données dynamiques et d'un jeu de données cinématiques :

$$J = J_d \cup J_c$$

On suppose que le processus de chargement étudié est tel que les ensembles des jeux de données dynamiques réalisables dans ce processus, jeux de données cinématiques réalisables, jeux de données réalisables, aient des structures d'espaces vectoriels sur \mathcal{R} . On désigne par \mathcal{D}_p et \mathcal{C}_p les deux premiers de ces espaces (*).

2.3. On a alors les définitions classiques suivantes :

— **champ de contraintes statiquement admissible**

un champ de contraintes σ est dit statiquement admissible associé à un jeu de données dynamiques :

$$\sigma \text{ s.a. ass. } J_d \in \mathcal{D}_p$$

s'il satisfait pour ce jeu de données

les équations d'équilibre (prises au sens des distributions)

les données aux limites sur les contraintes.

— **champ de vitesses de déformation cinématiquement admissible**

un champ de vitesses de déformation v est dit cinématiquement admissible associé à un jeu de données cinématiques :

$$v \text{ c.a. ass. } J_c \in \mathcal{C}_p$$

* L'indice p rappelle qu'il s'agit d'espaces correspondant à un processus particulier alors que pour S_{u_i} et S_{T_i} fixées, les ensembles de jeux de données dynamiques et cinématiques définis au § 2.2 constituent des espaces vectoriels \mathcal{D} et \mathcal{C} de dimension infinie, dont \mathcal{D}_p et \mathcal{C}_p sont des sous-espaces.

s'il dérive $(v_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}))$ au sens des distributions) d'un champ de vitesses u satisfaisant les données aux limites pour les vitesses dans ce jeu de données.

2.4. **Le théorème des puissances virtuelles** s'énonce :

$$\forall J_d \in \mathcal{D}_p, \quad \forall J_c \in \mathcal{C}_p$$

$$\forall \sigma \text{ s.a. ass. } J_d, \quad \forall v \text{ c.a. ass. } J_c$$

posant en chaque point de $S_{\sigma} \cap n = T$, et désignant par u le champ de vitesse dont dérive v , on a (*) :

$$\int_S T \cdot u dS + \int_V \rho F \cdot u dV = \int_V (\sigma \cdot v) dV = \mathcal{F}(\sigma, v) \quad (2)$$

$\mathcal{F}(\sigma, v)$ est une forme bilinéaire (fonctionnelle) en σ et v .

2.5. On dira que le corps est soumis à un **processus de chargement dépendant d'un nombre fini de paramètres** Q_i

si :

on peut définir une application linéaire qui fait correspondre

$$\forall J_d \in \mathcal{D}_p, \quad \forall \sigma \text{ s.a. ass. } J_d$$

$$\sigma \longrightarrow Q(\sigma) = (Q_1(\sigma), \dots, Q_n(\sigma)) \in \mathbb{R}^n$$

et une autre application linéaire

$$\forall J_c \in \mathcal{C}_p, \quad \forall v \text{ c.a. ass. } J_c$$

$$v \longrightarrow \dot{q}(v) = (\dot{q}_1(v), \dots, \dot{q}_n(v)) \in \mathbb{R}^n$$

et telles que

$$\mathcal{F}(\sigma, v) = Q(\sigma) \dot{q}(v) = \sum_{i=1}^n Q_i(\sigma) \dot{q}_i(v) \quad (3)$$

Alors les vecteurs $Q(\sigma)$ correspondant à tous les champs de contraintes S.A. associés à tous les jeux de données dynamiques réalisables forment un espace vectoriel à n dimensions $\{Q\}$ (**).

De même les vecteurs $\dot{q}(v)$...

Les espaces $\{Q\}$ et $\{\dot{q}\}$ sont duaux.

2.6. Remarquons que :

— étant donné $J_d \in \mathcal{D}_p$

il lui correspond en général plusieurs champs

$$\sigma \text{ s.a. ass. } J_d$$

auxquels correspondent en général plusieurs vecteurs $Q(\sigma)$.

— Propriété analogue pour $J_c \in \mathcal{C}_p, v, \dot{q}(v)$.

* $\sigma \cdot v = \sigma_{ij} v_{ji}$.

** Ne pas confondre les paramètres de chargement d'un système ainsi définis avec les Q_i introduits dans [1] qui désignent les contraintes généralisées, c'est-à-dire les paramètres de chargement d'un élément du système.

— Un même vecteur Q peut correspondre à plusieurs champs σ s.a. mais ceux-ci sont associés au même $J_d \in \mathcal{D}_p$.

— Propriété analogue pour \dot{q}, v , (les J_e étant identiques à un déplacement d'ensemble près).

— On suppose au § 2.2. dans la définition, que \mathcal{D}_p et \mathcal{C}_p sont des espaces **vectoriels**; cela implique que dans le processus de chargement il n'y a pas d'autres données constantes que celles qui sont nulles. Dans le cas où il y aurait des données constantes (e.g. forces de masse, surcharge sur une partie de la surface) on considèrera ces données comme variables et on les fixera finalement à leurs valeurs prescrites; on pourrait aussi opérer en prenant pour \mathcal{D}_p et \mathcal{C}_p des espaces affines afin d'éviter l'artifice indiqué ci-dessus. Cette méthode aurait, nous le pensons, plus d'inconvénients que d'avantages.

2.7. Dans le cas d'un corps ayant un contact avec frottement sur une partie de sa surface, les données au contour ne sont pas du type indiqué au § 2.2. On pourra alors définir les paramètres de chargement pour un système plus vaste incluant le corps et l'interface de frottement; la condition de frottement n'intervenant ensuite que comme une loi de comportement (plastique) à l'intérieur du système. De même pour un système comprenant plusieurs corps en contact avec frottement.

2.8. Citons quelques exemples de conditions à la limite dépendant d'un nombre fini de paramètres de chargement rencontrés dans la pratique : force de direction imposée; pression uniforme imposée sur une partie du contour du solide à un paramètre d'échelle près; déplacement de solide rigide, arbitraire, imposé sur une partie du contour; etc.. (*).

3. THÉORIE DES CHARGES LIMITES POUR LE MATÉRIAU STANDARD

Nous allons maintenant exposer la théorie des charges limites pour un système soumis à un processus de chargement dépendant de n paramètres. Cette théorie est classique (cf. par ex. [4, 6]), mais n'est pas utilisée aussi souvent qu'elle le pourrait.

Le problème posé est la détermination des chargements limites du système (chargements correspondant à l'écoulement libre) et éventuellement des champs de vitesses de déformation et de contraintes associés.

La présentation que nous adoptons consiste à énoncer une suite de définitions et de propriétés mathématiques simples en les rattachant à chaque pas à l'aspect mécanique et à la théorie classique. Nous ne donnerons que les démonstrations indispensables (pour des compléments, on pourra se reporter à [11]).

3.1. Soit f une fonction de charge convexe.

On suppose que la surface $f(\underline{\sigma}) = 0$ est éventuellement « ouverte » (*) dans diverses directions qui sont nécessairement, par suite de la convexité de f , toutes les directions d'un cône convexe.

Alors :

$$\text{l'ensemble } G' = \{ \underline{v} \mid \underline{v} \in \lambda \delta f(\underline{\sigma}), \lambda \geq 0, f(\underline{\sigma}) = 0, |\underline{\sigma}| < \infty \} \quad (4)$$

est un cône convexe de sommet O de \mathbb{R}^s .

Ce cône est le complémentaire du cône des directions dans lesquelles la surface $f(\underline{\sigma}) = 0$ est ouverte.

* On peut noter que dans [3] Hill remarque que seul ce type de conditions à la limite permet l'application pratique des principes de minimum pour le matériau rigide-plastique, ce qui correspond à ce qui a été dit au § 2.1.

* Si $\underline{\alpha}$ est un vecteur de \mathbb{R}^s définissant une direction dans laquelle $f(\underline{\sigma}) = 0$ est ouverte, et $\forall \underline{\sigma}$ tel que $f(\underline{\sigma}) < 0$, alors $f(\underline{\sigma} + \lambda \underline{\alpha}) < 0, \forall \lambda \geq 0$.

Aspect mécanique : les conditions imposées à f sont celles que satisfont toutes les fonctions de charge des matériaux usuels.

Si on considère le matériau standard de fonction de charge f , G' est le cône des tenseurs des vitesses de déformation plastiquement admissibles.

(Rappelons qu'un matériau est dit standard [7] si sa fonction de charge est aussi son potentiel plastique).

3.2. Puissance dissipée

Dans toute la suite f est une fonction de charge possédant les propriétés indiquées au § 3.1., et on suppose $f(\underline{0}) \leq 0$.

On désigne par G l'ensemble, convexe par définition :

$$G = \{ \underline{\sigma} \mid f(\underline{\sigma}) \leq 0 \} \quad (5)$$

On considère la forme bilinéaire :

$$F(\underline{\sigma}, \underline{v}) = \underline{\sigma} \cdot \underline{v} \quad (6)$$

où \underline{v} est un tenseur des vitesses de déformation et $\underline{\sigma}$ un tenseur des contraintes;

et on cherche :

$$\text{Sup}_{\underline{\sigma} \in G} \{ F(\underline{\sigma}, \underline{v}) \} \quad (7)$$

Alors :

1) si $\underline{v} \in G'$, $F(\underline{\sigma}, \underline{v})$ a un maximum fini atteint pour

$$\underline{\sigma} : f(\underline{\sigma}) = 0, \underline{v} \in \lambda \delta f(\underline{\sigma}), \lambda \geq 0 \quad (8)$$

on désignera par $\pi(\underline{v})$ la valeur de ce maximum

$$\pi(\underline{v}) = \text{Sup}_{\underline{\sigma} \in G} F(\underline{\sigma}, \underline{v}) \quad (9)$$

2) si $\underline{v} \notin G'$ on a :

$$\text{Sup}_{\underline{\sigma} \in G} F(\underline{\sigma}, \underline{v}) = + \infty \quad (10)$$

on conviendra de poser encore dans ce cas :

$$\pi(\underline{v}) = \sup_{\underline{\sigma} \in G} F(\underline{\sigma}, \underline{v}) = +\infty \quad (11)$$

Aspect mécanique :

1) G est le convexe des tenseurs des contraintes plastiquement admissibles pour le matériau de fonction de charge f.

2) Si on considère le matériau *standard* de fonction de charge convexe f, (*) :

$\pi(\underline{v})$ dans le cas où $\underline{v} \in G'$, n'est autre que la puissance dissipée pour le tenseur des vitesses de déformation \underline{v} .

(8) correspond à l'inversion de la loi de comportement pour \underline{v} .

3.3. Propriété de π

1) On a : $\pi(\underline{v}) \geq 0$ (12)

2) $\pi(\lambda \underline{v}) = \lambda \pi(\underline{v}), \forall \lambda \geq 0$ (13)

3) Convexité de π .

On vérifie aisément que π est une fonction convexe sur G' et, avec la convention (11), π est convexe sur l'ensemble de tous les tenseurs vitesses de déformation (R^6).

3.4. σ et v désignent des champs de contraintes et de vitesses de déformation. ($\underline{\sigma}$ et \underline{v} désignent les tenseurs, valeurs de ces champs au point courant).

Nous ne nous préoccupons pas dans la suite de préciser, du point de vue de l'analyse, les espaces fonctionnels dans lesquels on doit se placer pour que les intégrales écrites aient un sens. Il est entendu d'autre part que le matériau constituant le système n'est pas nécessairement homogène : on considérera en chaque point les espaces G et G' appropriés.

Définissons les espaces :

$$H = \{ \sigma \mid \underline{\sigma} \in G; \sigma \text{ s.a. ass. } J_d \in \mathcal{D}_p \} (**)$$
 (14)

$$H' = \{ v \mid \underline{v} \in G'; v \text{ c.a. ass. } J_c \in \mathcal{C}_p \}$$
 (15)

Il résulte des § 2.2., 3.1., 3.2. que :

H est un convexe (qui contient O si G contient O)

H' est un cône convexe de sommet O.

Aspect mécanique : H est le convexe des champs de contraintes licites [4] (statiquement et plastiquement admissibles) pour le système étudié, soumis au processus de chargement à n paramètres considéré.

H' est le cône convexe des champs de vitesses de déformation licites [4] (cinématiquement et plastiquement admissibles) pour le système étudié, si le matériau est standard.

* Ces deux conditions équivalent à dire que le matériau obéit au principe du travail maximal.

** σ appartient à H si en tout point σ appartient à G et s'il existe J_d dans \mathcal{D}_p tel que σ soit statiquement admissible associé à J_d .

3.5. Fonctionnelle I

Considérons la fonctionnelle :

$$I(\sigma, v) = \int_V \pi(\underline{v}) dV - Q(\sigma) \dot{q}(v) \quad (16)$$

définie $\forall J_d \in \mathcal{D}_p, \forall J_c \in \mathcal{C}_p$
 $\forall \sigma$ s.a. ass. $J_d, \forall v$ c.a. ass. J_c

Cette fonctionnelle possède la propriété suivante :

$$\forall \sigma \in H, \forall v \in H'$$

on a : $I(\sigma, v) \geq 0$ (17)

En effet d'après (3) et (16) :

$$I(\sigma, v) = \int_V (\pi(\underline{v}) - \underline{\sigma} \cdot \underline{v}) dV \geq 0$$

par définition de $\pi(\underline{v})$.

3.6. Théorème

Une solution du problème d'écoulement libre pour le système en matériau standard rend minimale I(σ, v) sur $H \times H'$.

En effet : une telle solution consiste en :

un champ de contraintes σ licite $\sigma \in H$,
 un champ de vitesses de déformation v licite $v \in H'$,

Ces deux champs étant associés par la loi de comportement du matériau standard :

si $\underline{v} \neq 0$, alors $f(\underline{\sigma}) = 0$ et $\underline{v} \in \lambda \delta f(\underline{\sigma}), \lambda > 0$

Il s'ensuit que pour ces deux champs :

$$I(\sigma, v) = \int_V (\pi(\underline{v}) - \underline{\sigma} \cdot \underline{v}) dV = 0 \quad (18)$$

Donc I est minimale d'après (17).

3.7. Réciproque

Toute solution (σ, v) du problème

$$\text{Min}_{(\sigma, v) \in H \times H'} I(\sigma, v) \quad (19)$$

telle que $v \neq 0$, est une solution du problème d'écoulement libre pour le système en matériau standard.

En effet, on sait que $\text{Min}_{(\sigma, v) \in H \times H'} I(\sigma, v) = 0$, car le champ $v = 0$ appartient à H' .

Toute autre solution du problème de minimisation de I est donc telle que $I(\sigma, v) = 0$;

et en tout point où $\underline{v} \neq 0$ on a alors d'après la définition de π :

$$\pi(\underline{v}) = \underline{\sigma} \cdot \underline{v}$$

donc $f(\underline{\sigma}) = 0$ et $\underline{v} \in \lambda \delta f(\underline{\sigma}), \lambda > 0$

Ce qui prouve que l'on a bien une solution du problème d'écoulement libre du système en matériau standard.

3.8. Définissons les ensembles K et K' :

lorsque σ décrit H , $Q(\sigma)$ décrit $K \subset R^n$.
lorsque v décrit H' , $\dot{q}(v)$ décrit $K' \subset R^n$.

On vérifie immédiatement que K est un convexe et K' un cône convexe de sommet O .

Aspect mécanique

K est le convexe des chargements licites du système
 K' est le cône convexe des vitesses de déformation licites du système en matériau standard.

3.9. Théorème du travail maximal

Soit (σ, v) une solution du problème d'écoulement libre pour le matériau standard; soit $\sigma' \in H$.

D'après le § 3.6. on a :

$$I(\sigma', v) \geq I(\sigma, v) \tag{20}$$

d'où $(Q(\sigma) - Q(\sigma')) \cdot \dot{q}(v) \geq 0 \tag{21}$

En conséquence, $Q(\sigma)$ **chargement limite appartient nécessairement à la frontière de K et $\dot{q}(v)$ est normale extérieure à cette frontière.**

Aspect mécanique

Ce théorème constitue le fondement de la méthode « statique » de détermination des charges limites.

3.10. Définissons le convexe K_1 de l'espace $\{Q\}$ par : $Q \in K_1$ si, $\forall v \in H'$, on a

$$\int_V \pi(v) dV - Q\dot{q}(v) \geq 0 \tag{22}$$

on peut remarquer que l'on obtiendra le même convexe K_1 en considérant dans la définition (22) tous les champs de vitesses de déformation v .

Par application de (17) on voit que :

$$K \subset K_1$$

En conséquence : **étant donné $v \in H'$, l'hyperplan d'équation (23) de l'espace Q est extérieur ou tangent au convexe K_1 donc aussi au convexe K .**

$$\int_V \pi(v) dV - Q\dot{q}(v) = 0 \tag{23}$$

Aspect mécanique

Ce théorème constitue le fondement de la méthode « cinématique » de détermination des charges limites.

3.11. Tout chargement limite Q appartient aux frontières de K et de K_1 , et celles-ci sont tangentes en ce point.

En effet si (σ, v) est une solution du problème d'écoulement libre, $Q(\sigma)$ et $\dot{q}(v)$ le chargement et la vitesse de déformation du système correspondants, on sait que Q est sur la frontière de K à laquelle \dot{q} est normale (§ 3.9.), et que (§ 3.6.) :

$$I(\sigma, v) = \int_V \pi(v) dV - Q(\sigma) \dot{q}(v) = 0 \tag{24}$$

ce qui prouve que le plan d'équation (23), pour le champ de vitesses de déformation v passe par $Q(\sigma)$. Il est tangent à K en Q , et aussi à K_1 en ce point.

3.12. Hypothèse d'existence (de la solution du problème d'écoulement libre).

Nous appellerons ainsi l'hypothèse : $K = K_1$.

Aspect mécanique

Cette hypothèse est équivalente à la proposition suivante :

si on considère un processus de chargement proportionnel $Q = \lambda Q^*$, $\lambda > 0$,

ou bien, on peut poursuivre le chargement indéfiniment, c'est-à-dire que λQ^* est licite $\forall \lambda > 0$;

ou bien, il existe un chargement limite $Q = \lambda Q^*$ correspondant à la solution d'un problème d'écoulement libre.

(Cette proposition peut être considérée comme traduisant un fait d'expérience évident).

3.13. Procédés pratiques. Conséquences de l'hypothèse d'existence. Théorèmes

Méthode statique

La détermination de la frontière d'écoulement se fait en général en considérant des processus de chargement dépendant d'un seul paramètre, par exemple des chargements proportionnels :

étant donné Q^* , on considère les champs de contraintes

$$\sigma \in H \text{ tels que } Q(\sigma) = \lambda Q^*, \lambda \geq 0 \tag{25}$$

Ils appartiennent à l'intersection de H et d'un cône convexe de sommet O dans l'espace des champs de contraintes S.A.; soit C cette intersection convexe. On cherche à maximiser λ (fig. 1).

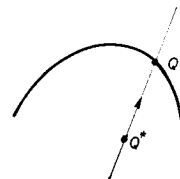


FIG. 1.

D'après l'hypothèse d'existence du § 3.12., on a :

ou bien $\sup_{\sigma \in C} \lambda = + \infty$

ou bien $\sup_{\sigma \in C} \lambda < \infty$ et est atteint dans C ; et si σ^1 est un champ qui réalise ce maximum, $Q^1 = Q(\sigma^1)$ est chargement limite pour le processus étudié et il existe une solution (σ, v) du problème d'écoulement libre correspondant à Q^1 :

$$Q(\sigma) = Q^1 = Q(\sigma^1) \tag{26}$$

et $I(\sigma, v) = \int_V \pi(v) dV - Q(\sigma^1) \dot{q}(v) = 0 \tag{27}$

ce qui prouve d'après le § 3.7. que (σ^1, v) est aussi une solution du problème d'écoulement libre correspondant à Q^1 .

Ainsi :

pour le matériau standard tout champ de contraintes licite correspondant à un chargement limite, peut être associé à un champ de vitesses de déformation licite pour former une solution du problème d'écoulement libre pour ce chargement limite.

Méthode cinématique

La détermination de la frontière d'écoulement se fait le plus souvent en utilisant des plans (23) parallèles à une direction donnée (fig. 2).

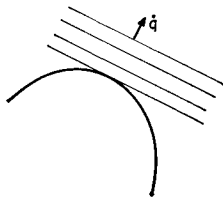


FIG. 2.

On se donne $\dot{q} \in K'$, et on considère les champs de vitesses de déformation v

$$v \in H' : \dot{q}(v) = \dot{q} \tag{28}$$

qui appartiennent à un convexe $C' \subset H'$.

On cherche alors à minimiser :

$$P(v) = \int_V \pi(v) dV \tag{29}$$

fonctionnelle convexe de v (d'après la convexité de π) sur C' ; d'après l'hypothèse d'existence du § 3.12. :

ou bien $\text{Inf}_{v \in C'} P(v) = +\infty$ et dans ce cas tous les champs de C' ont une zone déformée infinie,

ou bien $\text{Inf}_{v \in C'} P(v) < +\infty$ et est atteint dans C' ; si v^1 est un champ qui réalise ce minimum, le plan (22) correspondant à v^1

$$\int_V \pi(v^1) dV - Q\dot{q} = 0 \tag{30}$$

est tangent à la frontière de K et il existe une solution du problème d'écoulement libre (σ, v) telle que :

$$\dot{q}(v) = \dot{q} = \dot{q}(v^1)$$

4. CAS DE CERTAINS MATÉRIAUX NON-STANDARDS

Nous envisageons maintenant comme dans [5, 7, 8] le cas de certains matériaux non-standards, pour lesquels il est possible de mettre en évidence des théorèmes analogues à ceux des méthodes statique et cinématique pour le matériau standard.

4.1. Type de matériaux non-standards étudiés

On considère les matériaux dont le comportement

On a alors, d'après le § 3.6. :

$$I(\sigma, v) \leq I(\sigma, v^1) \tag{31}$$

ou $P(v) \leq P(v^1) \tag{32}$

ce qui entraîne $P(v) = P(v^1)$ d'après la définition de v^1 et donc :

$$I(\sigma, v^1) = 0 \tag{33}$$

(33) prouve que (σ, v) est une solution du problème d'écoulement libre correspondant à \dot{q} . Ainsi :

Pour le matériau standard, tout champ de vitesses de déformation licite, réalisant le minimum de l'intégrale de la puissance dissipée pour une valeur donnée de \dot{q} , peut être associé à un champ de contraintes licite pour former une solution du problème d'écoulement libre correspondant à cette vitesse de déformation du système, \dot{q} .

Enfin, employant les deux méthodes, supposons que le chargement $Q^1 = Q(\sigma^1)$ obtenu par la méthode statique, appartienne au plan (30) obtenu par la méthode cinématique, c'est-à-dire que :

$$\int_V \pi(v^1) dV - Q(\sigma^1) \dot{q}(v^1) = 0 \tag{34}$$

qui n'est autre que :

$$I(\sigma^1, v^1) = 0 \tag{35}$$

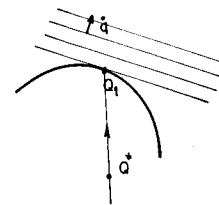


FIG. 3.

Ce qui prouve que (σ^1, v^1) est une solution du problème d'écoulement libre correspondant à Q^1, \dot{q}^* . Ainsi :

Pour le matériau standard, pour un chargement limite Q et la vitesse de déformation du système associée \dot{q} , tout champ de contraintes licite correspondant à Q , et tout champ de vitesses de déformation réalisant le minimum de l'intégrale de la puissance dissipée peuvent être associés pour former une solution du problème d'écoulement libre, correspondant à Q, \dot{q} .

plastique est tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

- 1) fonction de charge convexe f et telle que $f(0) \leq 0$

* A noter qu'ici il n'est évidemment pas nécessaire de faire intervenir l'hypothèse d'existence (§ 3.12).

2) potentiel plastique g

existence d'une fonction g convexe telle que :
étant donné $\underline{\sigma} : f(\underline{\sigma}) = 0$

$$\exists \underline{\sigma}' : g(\underline{\sigma}') = 0, \quad \underline{v}(\underline{\sigma}) \in \lambda \partial g(\underline{\sigma}'), \quad \lambda \geq 0 \quad (36)$$

et tel que :

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{v}(\underline{\sigma}) \geq \underline{\sigma}' \cdot \underline{v}(\underline{\sigma}) \quad (37)$$

ce qui implique que $G^g \subset G^f$ en posant :

$$G^g = \{ \underline{\sigma} \mid g(\underline{\sigma}) \leq 0 \}, \quad G^f = \{ \underline{\sigma} \mid f(\underline{\sigma}) \leq 0 \} \quad (*)$$

D'après [9], ce type de matériaux recouvre en particulier le cas des **sols**.

4.2. Théorèmes

Soit (σ, v) une solution du problème d'écoulement libre pour le matériau non-standard $M(f, g)$.

On a nécessairement :

$$\sigma \in H^f, \quad Q(\sigma) \in K^f \quad (38)$$

$$v \in H^g, \quad \dot{q}(v) \in K'^g \quad (39)$$

$\underline{\sigma}'$ étant défini par (36), on a :

$$\underline{\sigma}' \cdot \underline{v} = \pi^g(\underline{v}) \quad (40)$$

et d'après (37) :

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{v} \geq \pi^g(\underline{v}) \quad (41)$$

On en déduit :

$$\int_V \pi^g(\underline{v}) \, dV - Q(\sigma) \cdot \dot{q}(v) \leq 0 \quad (42)$$

Puisque $v \in H^g$, (42) prouve (cf. § 3.10.) que $Q(\sigma)$ n'est pas intérieur à K^g .

Donc :

$$Q(\sigma) \in K^f \cap \overline{K^g} \quad (43)$$

5. CONCLUSIONS. EXTENSIONS DIVERSES

Pour le matériau standard, on a mis en évidence que la recherche des solutions du problème d'écoulement libre correspond à un problème de minimum : recherche des champs (σ, v) réalisant le minimum de la fonctionnelle I sur $H \times H'$, dans lesquels $v \neq 0$ (i.e. solution non triviale en vitesses).

On en déduit de façon immédiate les théorèmes des méthodes statique et cinématique, on voit le rôle de l'hypothèse d'existence, et ses conséquences sur les procédés pratiques de détermination des chargements limites.

L'étude du cas de certains matériaux non-standard est ensuite très facile.

* Les notations utilisées dans la suite sont celles du § 3. avec en exposant la lettre f ou g pour préciser quelle est la fonction convexe à faire intervenir dans les définitions.

Aspect mécanique.

Les chargements limites pour le système en matériau non-standard appartiennent à la « couronne » comprise entre K^f et l'intérieur de K^g .

Dans le cas du chargement proportionnel, on peut dire que la (ou les) charge limite λ_1^M pour le système en matériau non-standard $M(f, g)$, est comprise entre la charge limite pour le matériau standard $G(g, g)$, borne inférieure, et la charge limite pour le matériau standard $F(f, f)$, borne supérieure :

$$\lambda_1^f \leq \lambda_1^M \leq \lambda_1^g \quad (*) \quad (44)$$

Ceci constitue le **théorème de Radenkovic** [7, 8].

Il n'est donc pas démontré dans ce cas que l'ensemble des chargements limites du système est une variété à $(n - 1)$ dimensions; en particulier il n'est pas exclu qu'un chargement puisse être limite pour un certain trajet de charge passant par lui et ne pas l'être pour un autre trajet de charge passant aussi par lui. Il se pourrait que la dénomination de **frontière d'écoulement** du système, pour désigner l'ensemble des chargements limites, soit trompeuse dans le cas du matériau non-standard.

Remarquons que dans la pratique, la fonction g n'est pas définie de façon unique, on choisira évidemment celle qui, satisfaisant les conditions indiquées, correspond au convexe K^g le plus grand (dans la zone des chargements correspondant au problème réel envisagé).

Rappelons enfin, que dans le cas d'un système comportant plusieurs corps, les conditions de frottement aux divers interfaces interviennent comme des formes particulières de critères de plasticité et lois de comportement plastique; elles devront donc satisfaire le principe du travail maximal pour que les résultats du § 3. soient applicables, ou satisfaire les conditions du § 4.1. pour que les résultats du § 4.2. soient applicables. On sait que cette question a été étudiée par Drucker [2]; nous indiquons en annexe les résultats que l'on peut obtenir.

Nous pensons que cette présentation, outre l'avantage de mettre clairement en évidence les propriétés mathématiques qui sous-tendent la théorie des charges limites, devrait rendre plus commode l'application des résultats puissants dont on dispose pour les problèmes de minimisation; pour ce faire il sera nécessaire de préciser les espaces fonctionnels H et H' du point de vue mathématique tout en vérifiant que les conditions imposées aux champs σ et v pour assurer la convergence des intégrales, etc..., sont bien acceptables du point de vue mécanique.

* Il est évident que (38) est vraie quelle que soit la loi de comportement plastique du matériau. En conséquence l'inégalité $\lambda_1^M \leq \lambda_1^g$ est aussi toujours vraie.

Nous avons traité le cas du milieu continu à trois dimensions. Le formalisme utilisé se transpose sans aucune difficulté pour les divers cas suivants :

- milieux polaires à trois dimensions,
- plaques,
- poutres.

Il convient en effet pour l'élément infinitésimal du système (dV , dS , ou dl) de définir au lieu des tenseurs $\underline{\sigma}$ et \underline{v} , les grandeurs dynamiques \sum et ciné-

matiques \mathcal{U} , intervenant dans l'expression de la puissance de déformation : $\sum \cdot \mathcal{U} dV$ (resp. dS ou dl).

Ensuite on devra préciser la fonction de charge $f(\sum)$ et la loi de comportement plastique, standard ou non-standard, pour \mathcal{U} .

NOTA : Ce travail s'inscrit dans un ensemble de recherches menées avec M. le Professeur RADENKOVIC et M. NGUYEN QUOC SON.

RÉFÉRENCES

- [1] J. COURBON, Résistance des matériaux, tome 2, Dunod, Paris, 1965.
- [2] D. C. DRUCKER, Coulomb friction, plasticity and limit loads. *J. Appl. Mech. Trans. A.S.M.E.*, vol. 21, 1, 1954, p. 71-74.
- [3] R. HILL, On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point. *Phil. Mag.* vol. 42, 1951, p. 868-875.
- [4] J. MANDEL, Cours de Mécanique des Milieux continus. Tome II, Ann. XX. Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [5] A. C. PALMER, A limit theorem for materials with non-associated flow laws. *J. Mécanique*, vol. 5, n° 2, 1966, p. 217-222.
- [6] W. PRAGER, Problèmes de plasticité théorique, Dunod, Paris, 1958.
- [7] D. RADENKOVIC, Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée. *C.R. Ac. Sc. Paris*, 252, 1961, p. 4103-4104.
- [8] D. RADENKOVIC, Théorie des charges limites, in Séminaire de Plasticité, éd. J. Mandel, P.S.T. n° 116, 1962.
- [9] K. H. ROSCOE, The influence of strain on soil mechanics. *Géotechnique*, vol. 20, 2, 1970, p. 129-170.
- [10] J. SALENÇON, La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane. Thèse Doc. Sc. Paris, 1969.
- [11] J. SALENÇON, Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols. Cours E.N.P.C., Paris, 1972.

ANNEXE

CONDITIONS DE FROTTEMENT AUX INTERFACES

1. DIVERS TYPES DE CONDITIONS DE FROTTEMENT

Soit un interface séparant deux matériaux M_1 et M_2 dont f^1 et f^2 sont les fonctions de charge au voisinage de l'interface, et g^1, g^2 les potentiels plastiques (§ 4.1.).

Nous examinons les conditions de frottement rencontrées couramment.

1.1. Interface lisse

Le contact lisse à l'interface, liaison unilatérale, correspond au domaine plastiquement admissible pour les contraintes :

$$\left. \begin{matrix} \sigma \leq 0 \\ \tau = 0 \end{matrix} \right\} \text{ soit } f(\underline{\sigma}) = \text{Sup} \{ \sigma, \tau^2 \} \leq 0 \quad (1)$$

et à la règle de glissement.

$$\left. \begin{matrix} \sigma < 0, \tau = 0 & [\vec{u}] \cdot \vec{n} = 0, & [\vec{u}] \cdot \vec{t} \text{ quelconque} \\ \sigma = 0, \tau = 0 & [\vec{u}] \cdot \vec{n} \geq 0, & [\vec{u}] \cdot \vec{t} \text{ quelconque} \end{matrix} \right\} \quad (2)$$

La figure 1 représente la « surface de charge de ce contact » et les vitesses de déformation — ici

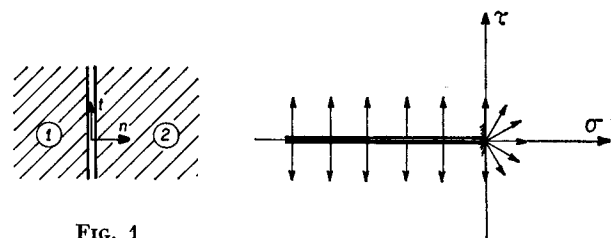


FIG. 1

discontinuité de vitesse : $\vec{u}^2 - \vec{u}^1$ — correspondantes. Le principe du travail maximal est vérifié, avec les notations du § 4.1. on a : f convexe et $f \equiv g$, pour le contact.

1.2. Frottement sec de Coulomb à l'interface

Le domaine plastiquement admissible pour les contraintes est :

$$\left. \begin{aligned} \sigma &\leq 0 \\ |\tau| &\leq -\sigma \operatorname{tg} \varphi_0 \end{aligned} \right\} \text{ soit } f(\sigma) = \operatorname{Sup} \{ \sigma, \tau^2 - \sigma^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \} \leq 0 \quad (3)$$

et la règle de glissement :

$$\left. \begin{aligned} \sigma < 0, \quad |\tau| < -\sigma \operatorname{tg} \varphi_0 : [\vec{u}] = 0 \\ \sigma < 0, \quad |\tau| = -\sigma \operatorname{tg} \varphi_0 : \\ & \quad [\vec{u}] \cdot \vec{n} = 0, \quad [\vec{u}] \cdot \vec{t} \cdot \tau \geq 0 \\ \sigma = 0, \quad \tau = 0 : \\ & \quad [\vec{u}] \cdot \vec{n} \geq 0, \quad [\vec{u}] \cdot \vec{t} \text{ quelconque} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

D'où la figure 2 :

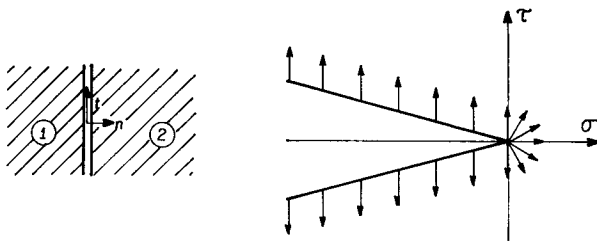


FIG. 2

Cette condition n'est pas standard : $f \neq g$; f correspond à la courbe de la figure 2 tandis que g correspond à celle de la figure 1.

L'état de contraintes et le champ de vitesse à l'interface sont régis non seulement par la condition de frottement à l'interface proprement dit, mais aussi par les propriétés de M_1 et M_2 : le domaine plastiquement admissible est ainsi l'intersection de (3), de $f^1 \leq 0$ et de $f^2 \leq 0$, et la discontinuité de vitesse est réglée par (4), par g^1 ou par g^2 suivant l'état de contraintes. La figure 3 représente le cas où M_1 est rigide, et où M_2 est un matériau de Tresca standard.

1.3. Interface dit « parfaitement rugueux »

Considérons l'exemple de la figure 3 et supposons : $\operatorname{tg} \varphi_0 \gg 1$. Alors la condition (3) ne limite le domaine P.A. de la figure 3 que pour des petites valeurs de $|\sigma|$. A la limite on aboutit au schéma de la figure 4

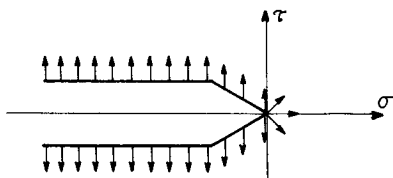


FIG. 3

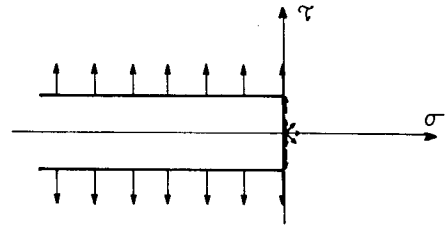


FIG. 4

qui représente le cas de l'interface dit « parfaitement rugueux », pour M_1 rigide et M_2 , matériau de Tresca standard.

De même pour des matériaux M_1 et M_2 quelconques.

1.4. Interface sans mouvement relatif ou « collé »

Certains théorèmes [2] font intervenir un modèle idéal où l'interface proprement dit ne permet aucun mouvement relatif. Le domaine P.A. et les règles pour les discontinuités de vitesse ne dépendent alors que de f^1, f^2, g^1, g^2 .

2. APPLICATION DES THÉORÈMES DE RADENKOVIC (§ 4)

2.1. Interfaces standards et non-standards

L'étude du § 1 montre que seul l'interface lisse est standard. L'interface « parfaitement rugueux » ne l'est pas quels que soient M_1 et M_2 (de même l'interface à frottement sec quelconque). Le caractère de l'interface « collé » ne dépend que de M_1 et M_2 : ainsi, si M_1 et M_2 sont standards, l'interface est certainement aussi.

Si l'interface n'est pas « collé » l'existence d'un potentiel plastique g convexe pour le comportement de l'ensemble (interface + M_1 et M_2 au voisinage), n'est pas toujours assurée. C'est ainsi que pour un matériau M_i de Coulomb ($f^i = \operatorname{Sup} \{ \sigma, \tau^2 - (C - \sigma \operatorname{tg} \varphi)^2 \}$) dont la loi de comportement est du type indiqué dans [9] correspondant au potentiel plastique $g^i = \operatorname{Sup} \{ \sigma, \tau^2 - \sigma^2 \operatorname{tg}^2 \nu \} 0 \leq \nu \leq \varphi$, l'existence de g convexe pour l'ensemble n'est assurée que pour $\nu = 0$.

Cette fonction g n'est autre dans tous les cas que le potentiel de l'interface lisse.

2.2. Application du théorème de Radenkovic

2.2.1. Matériau g .

S'il existe pour l'interface global un potentiel plastique convexe — à savoir : celui de l'interface lisse —, l'application du théorème de Radenkovic est immédiate : on considère le système en matériau standard $g(M)$ et à interfaces lisses et l'on sait que la charge limite pour ce système est inférieure ou égale à celles du système réel (*). En particulier

* Nous adoptons pour simplifier le langage du cas du chargement proportionnel.

si le système est constitué d'un matériau de Tresca standard, l'existence du potentiel plastique convexe pour l'interface global est assurée et on retrouve le théorème B de Drucker [2].

2.2.2. Matériau f.

2.2.2.1.

Le théorème de Radenkovic conduit également à une majoration, en considérant le système en matériau standard $f(M)$ et admettant pour règles de glissement aux interfaces celles déduites de la normalité de $[\vec{u}]$ à la frontière du domaine plastiquement admissible pour chaque interface global : la charge limite de ce système est supérieure ou égale à celles du système réel.

2.2.2.2.

C'est la meilleure majoration que puisse fournir le théorème. Par contre la règle d'écoulement aux interfaces n'étant pas physiquement très parlante, on peut préférer considérer le système composé du même matériau, et à interfaces parfaitement rugueux standards (*i.e.* $[\vec{u}]$ normal à la frontière du domaine P.A., cf. fig. 5 où M est un matériau de Tresca). On obtiendra alors une majoration des charges limites du système réel, qui ne peut être meilleure

que la précédente car le convexe des chargements licites pour ce deuxième système standard contient celui du premier système standard.

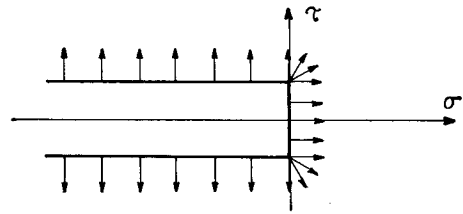


FIG. 5.

L'avantage de ce système est que dans les problèmes où par hypothèse $\sigma < 0$ à l'interface, il n'y a pas de différence entre l'interface parfaitement rugueux standard et l'interface parfaitement rugueux réel (§ 1.3.) pour lequel on sait mieux intuitivement construire des solutions.

Dans le cas où M est un matériau de Tresca standard on retrouve le théorème A' donné dans [10].

2.2.2.3.

Enfin on peut préférer considérer le système composé du même matériau standard 2.2.2.1. et 2.2.2.2., et à interfaces « collés ». Il fournit une majoration qui ne peut être meilleure que les précédentes, car le convexe des chargements licites pour ce système standard inclut les deux précédents.

Dans le cas où M est un matériau de Tresca standard on retrouve le théorème A de Drucker [2].