N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 3420

THÈSES

DE DOCTORAT D'ÉTAT ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentées

à la Faculté des Sciences
de l'Université de Paris

par

Jean SALENÇON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES

PREMIÈRE THÈSE

La théorie des charges limites dans la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane

DEUXIÈME THÈSE

(Propositions données par la Faculté)

Programmation linéaire et non linéaire

---

soutenues le 22 septembre 1969 devant la Commission d'examen

M. GERMAIN, *Président*

M. MANDEL,
M. SIESTRUNCK, } *Examinateurs*
M. TEMAM,

LA THÉORIE DES CHARGES LIMITES DANS LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE PLASTICITÉ EN DÉFORMATION PLANE

AVANT-PROPOS

Que Monsieur le Professeur Germain qui a bien voulu s'intéresser à mes recherches et présider mon jury de thèse, Monsieur le Professeur Siestrunck qui m'a toujours réservé un accueil chaleureux et encourageant dans les périodes difficiles, Monsieur Temam qui a aimablement accepté de faire partie de ce jury, trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique et je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur Mandel, qui a dirigé mes recherches et m'a éclairé de ses enseignements.

Je remercie tout particulièrement Monsieur le Professeur Radenkovic avec qui j'ai eu constamment des entretiens où il a mis beaucoup d'amitié, et qui m'a aidé de ses suggestions, de ses conseils et de ses critiques.

Monsieur Habib, Directeur Adjoint du laboratoire, a su me signaler parmi les problèmes que j'envisageais de traiter, ceux qui présentaient un intérêt essentiel pour l'ingénieur ; je l'en remercie ainsi que Monsieur Louis Brun qui m'a fait profiter de son expérience et tous mes collègues et amis chercheurs, secrétaires et techniciens du laboratoire.

Enfin je ne saurais oublier tous les professeurs dévoués qui ont assuré ma formation et plus particulièrement Monsieur Vissio, Professeur de Mathématiques, qui m'a judicieusement conseillé et soutenu et n'a jamais ménagé sa peine pour m'aider à surmonter les obstacles.

INTRODUCTION

Cette étude, dont certains résultats ont été présentés dans quatre notes aux Comptes rendus [Salençon (1967 a, b, 1968 a, b)], a trait à l'application de la théorie des charges limites à la résolution des problèmes de plasticité en déformation plane, pour le matériau rigide parfaitement plastique obéissant au critère de Tresca et au principe du travail maximal.

On sait que l'étude de la déformation plane apparaît habituellement comme un chapitre à part dans les traités de plasticité, dominé par la théorie mathématique des réseaux de lignes de glissement. S'appuyant sur cette théorie liée au caractère hyperbolique des équations en contraintes et en vitesses dans les zones plastifiées, on construit des solutions, qui n'intéressent en général qu'une partie de la structure étudiée (la zone plastifiée supposée) ; pour un même problème on peut d'ailleurs bien souvent trouver plusieurs solutions de ce type.

Par contre, pour interpréter ces solutions, en préciser la portée, et analyser la signification physique des résultats obtenus, il est nécessaire de se replacer dans le cadre général en utilisant les principes extrémaux de la théorie des charges limites. C'est sur la reconnaissance de ce fait qu'est fondé notre travail.

Dans la première partie, nous définissons avec précision la notion de charge limite et les diverses conditions sous lesquelles celle-ci a une signification pour une structure réelle élasto-plastique. Nous analysons, à la lumière de la théorie des charges limites, les caractères et la validité des résultats fournis par les méthodes couramment utilisées dans la résolution des problèmes pour le matériau rigide parfaitement plastique ; mettant en évidence que la grande majorité des solutions connues, en particulier pour les problèmes de déformation plane, ne sont que des solutions incomplètes, nous insistons sur le fait que seules les solutions complètes, dans lesquelles on connaît dans toute la structure un mode de déformation licite et un champ de contraintes licite associés, fournissent une solution exacte.

Nous traitons également des possibilités d'extension de la théorie classique pour interpréter les résultats dans les cas fréquemment étudiés où l'on emploie le critère de Coulomb comme critère de plasticité de matériaux non standards ou comme condition de frottement sec aux interfaces entre solides constituant la structure.

Les trois parties suivantes sont consacrées à l'étude de divers problèmes de poinçonnement en déformation plane. L'application de la théorie des charges limites nous fournit une méthode de recherche productive permettant de trouver des résultats nouveaux : notre idée directrice dans ces recherches est la mise en évidence de solutions complètes et la discussion de leurs conditions de validité ; diverses méthodes sont utilisables. Lorsque ce but ne peut être atteint, nous cherchons à encadrer au mieux la charge limite aux moyens des théorèmes limites classiques.

Dans le problème du poinçonnement symétrique d'une plaque par deux poinçons rigides étroits $(h/a \geqslant 1)$, nous utilisons la méthode qui consiste à compléter statiquement une solution incomplète. Pour $5{,}298 \leqslant h/a \leqslant 8{,}713$ nous parvenons ainsi à mettre en évidence une solution complète par une construction progressive au moyen d'une méthode issue de celle de Bishop (1953) ; nous démontrons des théorèmes permettant de faciliter la vérification des conditions nécessaires, dans cette construction et toutes autres semblables.

Pour $h/a < 5{,}298$, la méthode ne permet plus de compléter la solution de Hill mais nous construisons une solution statique encadrant ainsi avec une bonne précision la charge limite.

Nous étudions la question de la signification intrinsèque des résultats obtenus, c'est-à-dire en quoi les conclusions que nous tirons sont liées à la méthode de prolongement choisie ; et nous montrons par exemple :

· que dans le cas $h/a \geqslant 5{,}298$, la largeur minimale du bloc nécessitée pour le prolongement par cette méthode diffère au plus de 0,3% en écart relatif de la largeur minimale absolue (inconnue mais que nous encadrons au moyen des théorèmes limites) : cela constitue une bonne justification des conditions supplémentaires que nous avons imposées au prolongement pour adapter la méthode de Bishop au problème ;

· en considérant certains problèmes locaux posés par le prolongement, qu'il est plausible que la borne $h/a = 5{,}298$ ait un sens indépendamment du mode de prolongement choisi et que pour $h/a < 5{,}298$ la solution de Hill ne puisse pas être complétée.

Cela apparaît comme une contribution, sur cet exemple particulier, à l'étude détaillée du problème fondamental posé par Prager (1958) sur la prolongation du champ de contraintes des domaines en écoulement plastique aux domaines rigides.

Pour le problème de l'écrasement d'une plaque entre les plateaux d'une presse $(h/a < 1)$, nous utilisons une méthode différente, construisant d'abord une solution statique à laquelle nous essayons d'associer ensuite un mode de déformation licite pour constituer une solution complète. Nous obtenons ainsi, quelles que soient les valeurs de h/a, de la largeur de la plaque L et du coefficient de rugosité des plateaux m, une solution statique ; par contre nous ne trouvons de solution cinématique associée, si $L/a > 1$, que dans certains intervalles de h/a fonctions de m. Grâce à la méthode utilisée, associant considérations statiques et cinématiques, ces intervalles sont plus étendus que ceux obtenus antérieurement par d'autres auteurs par la recherche directe de solutions cinématiques ; ils nous permettent, dans les intervalles où la charge limite n'est pas connue exactement, de donner de meilleures majorations.

C'est ensuite au problème du poinçonnement d'un bicouche que nous appliquons notre méthode de recherche. On considère un bicouche semi-indéfini formé d'une bande de matériau rigide-plastique fixée sur un demi-plan en matériau rigide plastique plus dur.

Envisageant d'abord le cas où le demi-plan inférieur est indéformable ($K = \infty$) nous donnons, quelle que soit la valeur du coefficient de rugosité partielle sous le poinçon, une solution complète. Nous étudions les propriétés de la charge limite connue ainsi : comportement asymptotique, ..., ainsi qu'une relation très simple entre les charges limites correspondant aux cas du poinçon lisse et du poinçon à rugosité maximale.

Si le demi-plan inférieur a une cission limite finie K, la solution précédente est valable comme solution incomplète. Pour chaque valeur de h/a et de m, nous montrons qu'il existe une valeur minimale de K, soit $K_0(h/a, m)$ finie, telle que si $K \geqslant K_0$, cette solution incomplète peut être complétée. Cela signifie que si $K \geqslant K_0\ (h/a, m)$, la charge limite du bicouche est la même que si le demi-plan inférieur était indéformable. La démonstration de ce théorème est basée sur la mise en évidence d'une solution complète valable si $K \geqslant K'_0$ $(h/a, m)$ fini ; K'_0 est donc un majorant de K_0. La recherche d'un minorant de K_0, se fait à partir de solutions cinématiques du problème, dont la zone déformée pénètre dans le demi-plan inférieur du bicouche.

Nous sommes ainsi conduits à l'étude de certaines classes de solutions cinématiques du problème. Nous choisissons de considérer la classe des mécanismes de déformation licites associés à la solution de Prandtl puisque celle-ci fournit la valeur exacte de la charge limite dans le cas du milieu homogène, et nous cherchons la meilleure parmi ces solutions cinématiques en minimisant la puissance dissipée. Il est alors loisible d'élargir le problème à la recherche du minimum de la puissance dissipée sur cette classe de solutions cinématiques dans le cas où le milieu sur lequel agit le poinçon est non homogène de façon quelconque vérifiant seulement une hypothèse de symétrie par rapport à l'axe du poinçon. Dans ces conditions nous ramenons la recherche du minimum de la puissance dissipée, qui est un problème de minimisation de fonctionnelle sur la classe de fonctions dont dépend la classe de solutions cinématiques, à la minimisation d'une fonction d'une variable. Ce résultat s'applique très simplement au cas du bicouche pour lequel nous donnons l'expression de la fonction à minimiser dans tous les cas de valeurs de h/a et de m. On en déduit un minorant $K''_0\ (h/a, m)$ de K_0. De plus nous étudions le poinçonnement d'un demi-plan composé d'un matériau rigide-plastique stratifié (non homogénéité fonction uniquement de la profondeur) : la fonction à minimiser s'obtient par intégration à partir de celles du bicouche et cette méthode permet d'obtenir un majorant de la charge limite de façon remarquablement simple.

Le point fondamental qui ressort de ce travail est qu'il est nécessaire pour résoudre les problèmes de déformation plane de se placer dans l'optique de la théorie des charges limites. Nous en avons déduit une méthode de recherche axée principalement sur la mise en évidence de solutions complètes, qui se révèle productive, comme le montrent les exemples traités, même lorsqu'on ne peut parvenir à mettre en évidence de telles solutions.

PREMIÈRE PARTIE

théorèmes généraux

I – THEORIE DES CHARGES LIMITES.

Afin de préciser la terminologie utilisée dans la suite, nous rappelons sans entrer dans les détails les principaux résultats de la théorie des charges limites en dégageant au maximum les hypothèses nécessaires à leur établissement. Pour des exposés généraux plus détaillés on pourra se reporter à Mandel (1966), Koiter (1960), Radenkovic (1962).

1 – Le problème de l'équilibre limite

1.1 – Structures étudiées et matériaux les constituant.

Considérons une structure (un solide, un système de solides) formée de matériaux élastiques-plastiques.

Elle est soumise à un chargement défini par les paramètres d'intensité Q_1, Q_2, ... Q_r, les autres conditions aux limites étant homogènes : vitesses de déplacement nulles ou contraintes appliquées nulles. Pour simplifier les énoncés nous supposons qu'il n'y a pas de forces de masse. D'autre part tous les processus de chargement considérés sont quasi statiques.

Nous supposons que les lois de comportement des matériaux constituant les solides sont telles qu'en phase plastique le principe du travail maximal [Hill (1950)] soit vérifié dans chacun de ceux-ci.

De plus nous faisons sur les conditions de frottement aux interfaces des solides une hypothèse analogue, sur laquelle nous reviendrons dans la suite (§ 1.8).

1.2 – Structure rigide-plastique associée.

Nous supposons que les matériaux constituant les solides, s'ils sont écrouissables ont un écrouissage limité ; c'est-à-dire que, au cours d'un processus de chargement monotone, lorsque la déformation en un point a atteint une valeur suffisante, il n'y a plus écrouissage en ce point au-delà de la charge correspondante et le matériau est alors parfaitement plastique : son critère de plasticité ne dépend plus de la déformation (dans la représentation à une dimension ϵ, σ, la courbe présente un palier).

Les matériaux peuvent présenter un effet Bauschinger mais nous supposons que celui-ci n'affecte pas le critère " palier " ([1])

Nous définissons la structure rigide-plastique associée comme la structure semblable à la structure élastoplastique donnée, constituée en chaque point par le matériau rigide-parfaitement plastique dont le critère est le critère " palier " du matériau élasto-plastique donné correspondant, et la loi de comportement celle de ce matériau élasto-plastique lorsque le palier est atteint (le matériau rigide parfaitement plastique ainsi obtenu satisfait donc au principe du travail maximal) ([2]).

1.3 – Chargement de la structure rigide-plastique associée : charge limite.

Considérons la structure rigide-plastique associée soumise aux mêmes conditions aux limites que la structure élasto-plastique donnée. Soit un processus de chargement " croissant " ([3]) de la structure ; on peut même supposer un chargement radial où les Q_i croissent proportionnellement à un facteur unique $\lambda > 0$.

---

(1) On pourra noter par la suite la grande ressemblance de cette hypothèse (conforme à l'expérience) avec les propriétés démontrées pour la surface limite de plasticité.

(2) Pour les démonstrations des résultats de la théorie des charges limites, il est seulement nécessaire que la matériau rigide parfaitement plastique associé vérifie le principe du travail maximal : l'hypothèse faite au § 1.1 sur les lois de comportement des matériaux élasto-plastiques donnés est donc trop forte : il suffit de supposer que le principe du travail maximal est vérifié par ces matériaux en phase plastique au " palier ".

La structure étant rigide-plastique, il n'y a pas en général unicité du champ de contraintes sous un chargement donné.

Si l'on étudie la déformation de la structure, il est clair que celle-ci ne devient possible que lorsque l'écoulement plastique libre apparaît.

On peut démontrer, par application du principe du travail maximal, que malgré la non-unicité signalée ci-dessus, la valeur λ_1^{rp} pour laquelle l'écoulement plastique libre apparaît lors du processus de chargement radial considéré est unique.

Ainsi tant que $\lambda < \lambda_1^{rp}$ il n'y a pas de déformation et la structure demeure rigide.

Pour $\lambda = \lambda_1^{rp}$, la déformation de la structure devient possible ; elle se poursuivrait à charge constante si les changements de géométrie qui en résultent n'avaient pas d'influence. Une légère augmentation de la charge au-dessus de λ_1^{rp} (parfois même une diminution) suffit ensuite à entraîner des déformations ruinant la structure.

λ_1^{rp} est la charge limite de la structure rigide-plastique pour le processus de chargement radial considéré.

Pour un trajet de charge[3] croissant quelconque on définit de même dans l'espace Q_1, Q_2, ... Q_r, le point P_1^{rp} : point de charge limite de la structure.

La démonstration de l'unicité [cf. Mandel (1966)] montre également que P_1^{rp} est indépendant du trajet de charge suivi pour l'atteindre : quel que soit le trajet de charge de 0 à P_1^{rp} il y a écoulement plastique quand on atteint P_1^{rp}. Pour cette démonstration on utilise le principe du travail maximal et on prouve que l'ensemble des points de charge limite P_1^{rp} qui appartient nécessairement à l'ensemble des chargements auxquels on peut associer un champ de contraintes licites, est la frontière de cet ensemble qui est convexe dans l'espace des chargements Q et que, de plus, le vecteur de coordonnées $\dot{q}_i$, correspondant à l'écoulement plastique libre naissant est normal extérieur au point de charge limite à cette frontière.

1.4 – Chargement de la structure élasto-plastique, lorsque les changements de géométrie sont négligeables.

Soit la structure élasto-plastique soumise au même processus de chargement radial que ci-dessus. Nous supposons que les déformations sont suffisamment petites jusqu'à l'apparition de l'écoulement plastique libre λ_1^{ep} défini ci-dessous pour pouvoir négliger les changements de géométrie de la structure (confondre coordonnées actuelles et coordonnées initiales).

Ceci nécessite une condition supplémentaire en ce qui concerne les matériaux constituant la structure : la déformation plastique nécessaire pour atteindre le critère " palier " doit être suffisamment faible.

On a alors en suivant la croissance de λ :

a) pour $\lambda \leqslant \lambda_0$: les vitesses de déformation sont élastiques en tous les points de la structure : $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e$ (cela ne veut pas dire que la limite d'écoulement n'est atteinte en aucun point de la structure). Remarquons que dans certains cas de contraintes résiduelles cette valeur λ_0 peut être nulle, les vitesses de déformation plastiques étant non nulles pour tout λ positif.

b) pour $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1^{ep}$: en des points de la structure où la limite d'écoulement est atteinte, la vitesse de déformation contient une partie plastique non nulle : $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p$ avec $\dot{\epsilon}_{ij}^p \neq 0$.

Cette déformation plastique est contenue par la déformation des régions où les vitesses de déformations sont purement élastiques, ou par l'écrouissage : cela se traduit par le fait que si λ est maintenu constant égal à une telle valeur on a : $\dot{\epsilon}_{ij}^p = 0$. ($\lambda_0 < \lambda < \lambda_1^{ep}$, $\lambda = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}_{ij}^p = 0$).

c) pour $\lambda = \lambda_1^{ep}$: l'écoulement plastique libre apparaît. En certains points de la structure où la limite d'écoulement est atteinte, la vitesse de déformation contient une partie plastique non nulle $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ qui ne s'annule pas pour $\dot{\lambda} = 0$: ces points constituent une zone où l'écrouissage est terminé et où le critère d'écoulement vérifié est celui correspondant au " palier ". En négligeant les changement de géométrie il y aurait déformation de la structure sous charge constante $\lambda = \lambda_1^{ep}$. En fait, comme au § 1.3 une légère augmentation de λ au-dessus de λ_1 (ou même une diminution) suffit à entraîner des déformations ruinant la structure.

(3) On peut par exemple définir ainsi la "croissance" : le long du trajet, $\forall_i$ $|Q_i|$ est une fonction croissante, et Q_i est de signe constant.

Dans l'espace Q_1, Q_2, ... Q_r pour un trajet de charge croissant on définit de même les points P_0 et P_1^{ep}.

Il est clair, puisque les changements de géométrie sont négligeables jusqu'en $\lambda = \lambda_1^{ep}$, et d'après la définition de λ_1^{ep}, que λ_1^{ep} est identique à λ_1^{rp} pour le même chargement radial, de même pour P_1^{rp} et P_1^{ep}. On peut donc les noter λ_1 et P_1.

Ainsi dans le cas où les conditions sont telles que les changements de géométrie sont négligeables jusqu'à l'apparition de l'écoulement plastique libre, la charge correspondant à cette apparition pour la structure réelle est la même que pour la structure rigide plastique associée. C'est la charge limite de la structure.

1.5 – Autres cas où la charge limite de la structure rigide-plastique associée a une signification pour la structure élasto-plastique.

Dans certains cas très courants dans la pratique on trouve que, considérant la structure élasto-plastique soumise à un processus de chargement radial, lorsqu'on calcule les déformations au cours du chargement en supposant les changements de géométrie produits négligeables, la charge est asymptote à une limite correspondant à l'apparition de l'écoulement plastique libre lorsque les déformations deviennent infinies. Cette constatation interdit donc d'appliquer les résultats du § 1.4 puisque l'on vérifie a posteriori que les changements de géométrie ne sont pas négligeables jusqu'à l'apparition de l'écoulement plastique libre. On trouve également que cette limite est atteinte rapidement, c'est-à-dire que sur un diagramme représentant λ en fonction du paramètre de déformation associé, pour une déformation de l'ordre de deux à trois fois celle à la limite d'élasticité λ_0, λ est déjà très voisin de sa limite qui est évidemment la charge limite de la structure rigide-plastique associée.

Cela prouve que la charge limite de la structure rigide-plastique associée a une signification pour la structure élasto-plastique : elle est très voisine de la valeur pour laquelle des déformations ruinant la structure apparaissent.

1.6 – Cas où la charge limite de la structure rigide-plastique associée n'a aucune signification pour la structure élasto-plastique.

Ce sont les cas où l'on doit tenir compte des changements de géométrie en suivant le processus de chargement.

Un exemple est fourni par l'expansion quasi-statique d'une cavité sphérique dans une sphère élasto-plastique épaisse [cf. Mandel (1966)] et en particulier dans un milieu infini : dans ce dernier cas, la charge limite de la structure rigide-plastique associée est infinie tandis que, en tenant compte des changements de géométrie, on obtient une valeur finie de la pression à l'intérieur de la cavité pour la plastification totale du milieu.

1.7 – Recherche d'une charge limite. Remarques.

Dans le cas où les hypothèses de § 1.4 ou 1.5 sont vérifiées, on voit que l'on peut se borner pour apprécier la ruine de la structure élasto-plastique étudiée à rechercher la charge limite de la structure rigide-plastique associée : on se proposera alors de rechercher pour cette structure le chargement limite correspondant à des vitesses de déplacements $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ ... $\dot{q}_r$.

C'est le problème de la recherche d'un chargement limite où il faut remarquer que les Q_i ne sont plus considérés comme des données et qu'il faut se donner les $\dot{q}_i$ *en remplacement. Ce sont les conditions aux limites cohérentes* (cf. § 1.8).

On ne devra pas perdre de vue toutefois, que c'est seulement la charge limite qui est atteinte par cette méthode pour la même structure en matériaux élasto-plastiques correspondants et par exemple ne pas donner aux solutions complètes dont il sera question par la suite, une valeur qu'elles n'ont pas.

La méthode de présentation de la théorie des charges limites adoptée ici, est très voisine de celle de Hill (1951, 1952). Remarquons qu'il existe effectivement des cas où ce qui a été dit au § 1.4 est applicable : par exemple le problème de la torsion d'un tube cylindrique mince [Lee (1952)].

Ainsi que cela a été montré, par Hill (1952) et Prager (1958), la présentation de la notion de charge limite donnée par Drucker, Greenberg et Prager (1951) est absolument équivalente à celle de Hill : quoique d'apparence plus générale, elle nécessite en fait les mêmes hypothèses et est peut-être d'application plus difficile aux cas ressortissant du § 1.5. Celle de Hill est assurément la plus précise.

1.8 – Conditions aux limites.

Mandel (1966) a défini la notion *de conditions aux limites cohérentes* sur les surfaces extérieures S d'une structure, pour l'étude des problèmes d'écoulement libre :

a) en chaque point de S, on doit se donner trois composantes orthogonales entre elles pour l'ensemble des deux vecteurs contrainte et vitesse,

b) l'écoulement libre doit être possible pour des valeurs arbitraires, entre certaines limites, de ces données.

Dans le cas (qui est celui étudié ici) où le chargement appliqué – c'est-à-dire les contraintes appliquées – dépend d'un nombre fini de paramètres Q_i (forces généralisées), auxquels correspondent les $\dot{q}_i$ (paramètres de vitesses de déplacement), la reconnaissance des données aux limites cohérentes, qui en général est délicate, est plus aisée.

Les Q_i étant les inconnues, indépendantes, du problème de la détermination de la frontière d'écoulement de la structure, la condition a) indique que les $\dot{q}_i$ données doivent correspondre aux Q_i inconnus.

Quant à b), cette condition correspond au fait que l'écoulement libre doit être possible pour des valeurs arbitraires des $\dot{q}_i$ (entre certaines limites, souvent imposées pour des questions de signes).

En d'autres termes les données ne doivent être ni sous abondantes ni surabondantes ([4]).

Dans le cas d'un système de solides nous devons aussi considérer les conditions aux interfaces (cf. § 1.2). Sur un tel interface de contact entre deux solides il y a nécessairement continuité de la contrainte appliquée et de la vitesse normale ; de plus une condition de frottement est satisfaite.

Comme l'ont remarqué Drucker et Prager (1952), Drucker (1954), la condition de frottement de Coulomb ne satisfait pas dans ces conditions le principe du travail maximal et ne permet pas la démonstration des propriétés fondamentales de la théorie des charges limites énoncées ci-dessus.

La condition à l'interface doit être : soit la donnée de la vitesse de glissement, soit celle de la contrainte tangentielle, $[\![\vec{r}]\!]$ ou $\vec{\sigma}_t$, soit une condition de frottement indépendante de la pression normale (valable dans le cas où les critères des matériaux constituant les solides sont indépendants de la pression moyenne) du type :

$$[\![\vec{r}]\!] = 0, \quad |\vec{\sigma}_t| \leqslant mk \qquad m \text{ donné} \quad 0 \leqslant m \leqslant 1$$

$$[\![\vec{v}]\!] \neq 0, \quad |\vec{\sigma}_t| = mk, \quad \vec{\sigma}_t \quad [\![\vec{v}]\!] \text{ colinéaires}, \ \vec{\sigma}_t \ [\![\vec{r}]\!] > 0$$

(k minimum au point considéré dans la direction considérée des cissions limites des deux matériaux en contact).

1.9 – Circonstances particulières.

Il peut se faire que pour certaines données aux limites cohérentes sur la structure on trouve plusieurs points de charge limite correspondants : cela se produit lorsque la surface limite représentée dans l'espace Q_1, Q_2 ... Q_r, comporte des faces planes [voir un exemple dans l'article de Mandel (1964)].

De même lorsque la surface limite présente des points coniques le même point de charge limite sera obtenu pour des données aux limites cohérentes différentes.

D'autre part, on a supposé dans tous les raisonnements que la structure était finie. On est pourtant parfois amené pour la simplification de certains problèmes, à étudier des cas de milieux infinis ou semi-infinis . les seules conditions à la limite à l'infini plausibles sont d'y supposer les déplacements nuls : dans ce cas tous les résultats de la théorie des charges limites sont applicables à ce type de problèmes.

---

(4) C'est ainsi que, si l'on considère un processus de chargement proportionnel, les Q_i n'étant plus indépendants mais proportionnels à un facteur Λ, la donnée cohérente correspondante n'est pas celle des $\dot{q}_i$, mais celle de $\dot{\Lambda}$ (associé à Λ dans l'expression de la puissance) : en effet l'écoulement libre ne serait possible que si les données $\dot{q}_i$ étaient telles que le vecteur $\dot{q}$ soit dirigé suivant une normale sortante à la frontière d'écoulement au point de charge limite correspondant au chargement proportionnel effectué (la condition b ne serait donc pas remplie) ; on se trouve en présence de données surabondantes auxquelles doit être imposée une condition de compatibilité. Les résultats de Rychlewski (1966 a) ont trait à ce problème si on les interprète dans le cadre de la théorie des charges limites.

2 – Propriétés de la charge limite.

Le tableau suivant résume les propriétés des points de charge appartenant aux différentes régions séparées par la surface limite :

intérieur	surface limite	extérieur
$Q < L$	L	$Q > L$
Il existe au moins un champ de contraintes S.P.A. en équilibre avec Q		Il n'existe aucun champ de contraintes S.P.A. en équilibre avec Q.
Dans tout champ de vitesses de déformation C.P.A. la puissance des forces extérieures du chargement est inférieure ou égale à la puissance dissipée.		Il existe au moins un champ de vitesses de déformations C.P.A. dans lequel la puissance des forces extérieures du chargement Q soit supérieure à la puissance dissipée.
Dans tout champ de vitesses de déformation C.P.A., la puissance des forces extérieures du chargement Q est inférieure à la puissance dissipée.		Il existe au moins un champ de vitesses de déformation C.P.A. dans lequel la puissance des forces extérieures du chargement Q soit supérieure ou égale à la puissance dissipée.
La structure peut supporter le chargement Q.		La structure ne peut pas supporter le chargement Q.

S.P.A. : statiquement et plastiquement admissible
C.P.A. : cinématiquement et plastiquement admissible. } ou encore licites.

Ces résultats sont des conséquences du fait que le principe du travail maximal est vérifié dans toute la structure.

Remarquons que la surface limite, lieu des points de charge limite est à la fois : la frontière de l'ensemble des chargements Q auxquels on peut associer un champ de contraintes licite ([5]) qui soit en équilibre avec Q.

Et la frontière de l'ensemble des chargements Q tels qu'il existe au moins un champ de vitesses licite ([6]) dans lequel la puissance des forces extérieures de Q soit supérieure ou égale à la puissance dissipée.

Dans le cas de chargement proportionnel à un seul paramètre on peut énoncer :

2.1 – La charge limite est la borne supérieure précise des chargements auxquels il est possible d'associer dans les systèmes un champ de contraintes statiquement et plastiquement admissible ([5]).

2.2 – Dans tout champ de vitesses cinématiquement et plastiquement admissible ([6]), la puissance produite par un chargement non supérieur à la charge limite ne dépasse pas la puissance dissipée.

2.3 – Si un chargement est supérieur à la charge limite il existe au moins un champ de vitesses cinématiquement et plastiquement admissible dans lequel sa puissance dépasse la puissance dissipée.

D'où :

2.4 – La charge limite est la borne inférieure précise des chargements dont la puissance dépasse ou égale la puissance dissipée dans au moins un champ de vitesses cinématiquement et plastiquement admissible.

3 – Détermination d'un chargement limite.

Pour simplifier le langage, nous étudions le cas du chargement proportionnel ; il s'agit donc de la détermination de la charge limite.

---

(5) C'est-à-dire satisfaisant les équations d'équilibre, les conditions aux limites et ne violant nulle part le critère.

(6) Satisfaisant les conditions aux limites sur les vitesses et tel qu'il soit possible en tout point où le tenseur des vitesses de déformation n'est pas nul de lui associer au moins un tenseur contraintes à la limite de plasticité et tel que la loi de comportement soit vérifiée.

La détermination directe de la charge limite est possible dans certains cas, mais la plupart du temps on utilise des méthodes " d'encadrement " conséquences directes des propriétés énoncées au § 2.

3.1 – Minorant de la charge limite ou m éthode statique.

La valeur de λ correspondant à une distribution de contraintes qui satisfait les équations d'équilibre, les conditions aux limites sur les contraintes (pour cette valeur de λ) et ne viole nulle part le critère de plasticité, n'est pas supérieure à la charge limite. Autrement dit une telle distribution de contraintes fournit un *minorant de la charge limite.*

3.2 – Majorant de la charge limite ou méthode cinématique.

Supposons que l'on connaisse un mode de déformation satisfaisant les conditions aux limites sur les vitesses et plastiquement admissible (c'est-à-dire qu'il est possible en tout point où le tenseur des vitesses de déformation n'est pas nul de lui associer (au moins) un tenseur contraintes tel que la loi de comportement soit vérifiée ainsi que le critère de plasticité : dans le cas du critère indépendant de la pression moyenne, la condition " plastiquement admissible " correspond, d'après le principe du travail maximal à l'invariance du volume). On peut alors calculer la puissance dissipée dans le système dans ce mode de déformation, celle-ci est en effet une fonction univoque du tenseur des vitesses de déformation plastiquement admissible ([7]). En égalant cette puissance dissipée, au travail des forces extérieures, on obtient une valeur de λ qui n'est pas inférieure à la charge limite. La méthode cinématique fournit un *majorant de la charge limite.*

4 – Les différentes manières pratiques de traiter les problèmes.

On considère un système de solides rigides parfaitement plastiques soumis à des conditions aux limites et aux interfaces cohérentes. Pour simplifier les énoncés nous supposons comme précédemment qu'il n'y a qu'un seul paramètre de chargement.

Les différentes manières pratiques de traiter les problèmes sont directement issues des théorèmes énoncés ci-dessus.

4.1 – Utilisation de la méthode statique.

On cherche à déterminer une distribution de contraintes satisfaisant les conditions d'équilibre, les conditions aux limites sur les contraintes pour une valeur λ, et ne violant en aucun point le critère de plasticité. La valeur de λ correspondant à une telle distribution fournit un minorant de la charge limite.

Il faut insister sur le fait que la distribution de contraintes en question doit être connue et remplir les conditions ci-dessus *en tout point du système* faute de quoi on ne peut rien dire sur la valeur de λ correspondante.

4.2 – Utilisation de la méthode cinématique.

Cette fois, on cherche à déterminer un mode de déformation du système satisfaisant les conditions aux limites sur les vitesses et plastiquement admissible. La valeur de λ obtenue en égalant dans ce mode de déformation, le travail des forces extérieures à la puissance dissipée est un majorant de la charge limite.

Les deux procédés ci-dessus sont couramment employés, notamment en utilisant. pour 4.1 des distributions de contraintes formées de champs uniformes séparés par des lignes de discontinuité, pour 4.2, des modes de déformation par glissement le long de surfaces de discontinuité isolées [cf. par exemple pour le problème du poinçon, Drucker et Shield (1953)].

4.3 – Notion de problème statiquement déterminé.

Le système considéré est soumis à des conditions aux limites et aux interfaces cohérentes, portant sur les contraintes et sur les vitesses. Envisageant alors le problème du seul point de vue des contraintes, ajoutons aux conditions aux limites sur les contraintes du problème, des conditions aux limites supplémentaires portant également sur les contraintes de façon que : à partir de cet ensemble de conditions aux limites dépendant de λ, des équations d'équilibre, et du critère d'écoulement supposé vérifié, il soit possible de déterminer pour une certaine valeur de λ une distribution de contraintes dans une certaine zone du système. Cette solution satisfait

(7) Il n'y a pas de difficulté le long d'éventuelles surfaces de discontinuité de vitesse dans les solides, qu'il suffit de considérer comme des zones déformées infiniment minces.

évidemment les conditions aux limites du problème sur les contraintes aux frontières de la zone en question. Il est clair que si le domaine de définition de la distribution de contraintes est le système entier, la valeur de λ est un minorant de la charge limite. Ce cas ne se rencontre que très rarement. S'il n'en est pas ainsi, on ne peut rien dire a priori quant à la valeur de λ trouvée, sauf à prolonger la distribution dans tout le système en satisfaisant les relations d'équilibre, les conditions aux limites sur les contraintes pour la même valeur de λ et en ne violant pas le critère, de façon à pouvoir appliquer la méthode statique, ou bien à mettre en évidence une solution incomplète au sens précisé ci-dessous.

4.4 – Solutions " incomplètes " et solutions " complètes ".

Nous utilisons ici la terminologie introduite par Bishop (1953). Les solutions proposées le plus couramment présentent :

un mode de déformation valable pour l'intégralité du système considéré, c'est-à-dire que les vitesses sont définies en tout point du système ;

et une distribution de contraintes compatible avec ce mode de déformation, satisfaisant certaines autres conditions énoncées par la suite, qui n'est définie que dans les zones où les vitesses de déformation ne sont pas nulles, c'est-à-dire les zones où il y a effectivement déformation plastique dans le mode de déformation proposé.

Compatible, veut dire que le critère d'écoulement est satisfait en tout point et que le tenseur de contraintes et le tenseur des vitesses de déformation sont liés par la loi de comportement. De plus, la distribution de contraintes satisfait les conditions aux limites sur les contraintes pour une certaine valeur de λ, dans la zone déformée ; et elle est telle que l'équilibre de chacune des zones déformées soit possible pour la même valeur de λ sous l'action des charges qui lui sont appliquées et en assurant le respect des conditions de continuité des contraintes aux surfaces de discontinuité de vitesse compte tenu des données dont on y dispose.

Une solution partielle de ce type est dite *incomplète* en ce sens qu'il reste, pour démontrer sa validité en tant que solution du problème, à montrer la possibilité de trouver une distribution de contraintes acceptable dans les zones non déformées, c'est-à-dire qui satisfasse les conditions aux limites sur les contraintes ([8]) dans ces régions pour la même valeur du paramètre λ ainsi que les relations d'équilibre, et telle que le critère d'écoulement ne soit nulle part violé.

Si l'on peut trouver dans les zones non-déformées une telle distribution de contraintes acceptable, la solution globale ainsi obtenue est dite solution *complète*.

Il est clair d'après les résultats de la théorie des charges limites rappelés au § 3 qu'une solution incomplète peut être utilisée pour le calcul d'un majorant de la charge limite : le mode de déformation est bien licite et nous connaissons même une distribution de contraintes compatible. En calculant la puissance dissipée comme la puissance du champ de contraintes compatible, nous obtenons L_1, majorant de la charge limite, *qui n'est autre que la valeur du paramètre de chargement* λ pour laquelle la distribution de contraintes compatible connue satisfait les conditions aux limites sur les contraintes dans la zone où elle est définie.

Notons que cette propriété conduit parfois à certaines confusions : on croit avoir obtenu un minorant de la charge limite par la méthode statique alors qu'il s'agit en réalité d'un majorant obtenu par la méthode cinématique.

Si l'on dispose d'une *solution complète,* la valeur de la charge à laquelle elle correspond est un minorant de la charge limite (méthode statique), $L_2 = \lambda$.

λ est donc alors la valeur exacte de la charge limite.

Pour résumer, nous rappelons les conditions sur le matériau et aux interfaces pour que la théorie développée, ci-dessus, soit valable :

· Dans le cas d'un solide unique : matériau parfaitement plastique satisfaisant au principe du travail maximal en phase plastique (matériau standard ou à dilation standardisée ([9])).

· Dans le cas d'un système de solides formés de matériaux standards :

(8) Parmi ces conditions aux limites figurent aussi les conditions de continuité des contraintes aux frontières entre zones déformées et zones indéformées et le long des lignes de glissement isolées.

(9) Radenkovic (1961).

aux interfaces entre solides contitués de matériaux à critère indépendant de la pression moyenne, conditions de frottement générales énoncées au § 1.6 ;

aux interfaces où un solide au moins est constitué d'un matériau dont le critère dépend de la pression moyenne, condition de frottement $|\vec{\sigma}_t| = 0\,\vec{v} = 0$ (lisse ou vitesses relative nulle).

II – EXTENSIONS POSSIBLES DE LA THEORIE DES CHARGES LIMITES.

Une extension de la théorie est possible au cas des structures constituées de matériaux élasto-plastiques dont le critère est indépendant de la pression moyenne et satisfaisant au principe du travail maximal, avec aux interfaces des conditions de frottement de Coulomb. Des théorèmes utiles peuvent être établis, moins précis que dans la théorie classique des charges limites.

1 – Les différents types de chargement.

La définition de la structure rigide-plastique associée est identique à celle donnée au § I.1.2. Cette fois le principe du travail maximal n'est plus vérifié dans l'ensemble de cette structure par suite du frottement de Coulomb aux interfaces.

Comme précédemment on se ramène dans les cas correspondant à ceux des § I.1.4 et 1.5 à l'étude de l'apparition de l'écoulement plastique libre dans la structure rigide plastique associée. C'est cette étude qui est profondément modifiée : les résultats du chapitre I § 1.3 et 2 sont changés.

Comme dans le cas classique, nous pouvons évidemment affirmer la condition nécessaire suivante : *si un chargement Q ne provoque pas la ruine, c'est-à-dire est supporté par la structure, ou est limite, il existe au moins un champ de contraintes statiquement et plastiquement admissible en équilibre avec lui.*

Considérons d'autre part un chargement limite, soit Q ; il lui correspond par définition un champ de contraintes σ_{ij} statiquement et plastiquement admissible qui l'équilibre auquel est associé un champ de vitesses de déformation v_{ij} cinématiquement et plastiquement admissible. L'application du théorème des travaux virtuels donne alors :

$$\underset{\substack{\text{puissance}\\\text{des forces}\\\text{extérieures}}}{Q_i \dot{q}_i} = \int_{\text{solides}} \sigma_{ij}\, v_{ij}\, dV + \int_{\text{interfaces}} \vec{\tau}\, \| \vec{v} \|_t\, dS$$

(il n'y a pas de terme relatif aux vitesses normales car ou bien $\| \vec{v} \|_n \neq 0$ détachement et $\sigma = 0$, ou bien $\| \vec{v} \|_n = 0$ et $\sigma \neq 0$ compression.)

Le premier terme du second membre n'est autre que la puissance dissipée $\pi(v_{ij})$ correspondant au champ de vitesses de déformation v_{ij} dans la même structure constituée des mêmes solides en les mêmes matériaux avec des *interfaces lisses,* pour laquelle ce champ est certainement cinématiquement et plastiquement admissible ; et on a : $Q_i \dot{q}_i \geqslant \pi\,(v_{ij})$.

Cherchant maintenant à donner une condition suffisante pour un chargement Q non supporté par la structure le résultat précédent nous conduit à énoncer ([10]) : *si Q est un chargement non supporté par la structure il existe au moins un champ de vitesses de déformation cinématiquement et plastiquement admissible dans lequel la puissance des forces extérieures de Q soit supérieure à la puissance dissipée $\pi(v_{ij})$ dans les solides de la structure.* (Si Q peut aussi être limité l'énoncé doit être modifié en remplaçant "*supérieure*" par "*supérieure ou égale*").

2 – Propriétés.

Soit E l'ensemble des chargements Q tel qu'il existe un champ de contraintes licites en équilibre avec Q.

Soit F l'ensemble des chargements Q tel qu'il existe au moins un champ de vitesses de déformation licite dans lequel la puissance des forces extérieures de Q soit supérieure ou égale à la puissance dissipée $\pi(v_{ij})$ dans les solides de la structure.

---

(10) Qui contient la propriété énoncée au § I.1.2 dans le cas des conditions aux limites cohérentes (interfaces lisses ou parfaitement rugueux).

On a les propriétés suivantes :

2.1 –
$\forall Q$ supporté par la structure ou limite : $Q \in E$.

2.2 –
$\forall Q$ non supporté par la structure ou limite : $Q \in F$.

2.3 –
$\forall Q$ limite : $Q \in E \cap F$ qui donc n'est pas vide,
qui sont identiques à celles énoncées au chapitre I.

2.4 –
Par contre il n'est pas possible en général de démontrer que dans l'espace des chargements Q, $E \cap F$ est une surface, frontière commune des ensembles E et F.

2.5 –
En conséquence, si Q est un chargement limite représenté par le point de charge limite P_1 pour un certain trajet de charge, et si l'on considère un autre trajet de charge, aboutissant en P_1, P_1 n'est pas nécessairement point de charge limite pour ce nouveau trajet : une influence de l'histoire des contraintes ne peut être exclue.

2.6 –
Si Q est un chargement tel que l'on ait construit un champ de contraintes licite en équilibre avec lui et le mode de déformation licite associé alors $Q \in E \cap F$.

2.7 –
Si Q est un chargement auquel correspond une solution incomplète (définition identique à celle de I § 4.4) : $Q \in F$.

2.8 –
Dans le cas de chargement proportionnel à un seul paramètre λ, l'ensemble $E \cap F$ est un segment fermé de l'axe des λ dont il n'est pas possible en général de démontrer qu'il se réduit à un point.

3 – Drucker (1954) : Théorème A :

Si un chargement Q n'est pas supporté par la structure pour la condition $[\![\vec{v}]\!] = 0$ aux interfaces, il ne peut être supporté par aucune structure semblable, avec conditions de frottement de Coulomb aux interfaces.

Nous en donnons la démonstration suivante par l'absurde à partir des deux conditions que nous avons énumérées plus haut :

puisque Q n'est pas supporté par la structure avec les interfaces à glissement bloqué (condition cohérente), il existe un champ de vitesses de déformation v_{ij}^* cinématiquement et plastiquement admissible pour cette structure dans lequel $Q_i \dot{q}_i^* > \pi(v_{ij}^*)$ qui est produite uniquement dans les solides. On suppose que pour certaines valeurs des μ, coefficients de frottement de Coulomb, Q soit supporté par la structure, alors il existe un champ de contrainte statiquement et plastiquement admissible $\sigma_{ij}^{\wedge}$ qui l'y équilibre : en appliquant le théorème des travaux virtuels on obtient :

$$Q_i \dot{q}_i^* = \underset{\text{solides}}{\int \sigma_{ij}^{\wedge} v_{ij}^* \, dV} + \underset{\text{aux interfaces}}{\int \vec{\tau} \; [\![\vec{v}^*]\!] \, dS} = \underset{\text{solides}}{\int \sigma_{ij}^{A} v_{ij}^* \, dV} \quad \text{car} \quad [\![\vec{v}^*]\!] = 0$$

donc $\int \sigma_{ij}^{A} v_{ij}^* dV > \pi(v_{ij}^*)$ dans les solides, ce qui est impossible car contredit le principe du travail maximal satisfait en tout point des solides.

Le théorème est donc démontré.

4 – Théorèmes A'.

Si un chargement Q n'est pas supporté par la structure pour la condition aux interfaces : $[\![\vec{v}]\!] = 0$ $|\tau| \leqslant k$, (k minimum des cissions limites des deux matériaux en présence) $[\![\vec{v}]\!] \neq 0$ $|\tau| = k$ et puissance dissipée par frottement positive (11), il ne peut être supporté par aucune structure semblable avec conditions de frottement de Coulomb aux interfaces.

(11) Cette condition de frottement est plus physique que celle du théorème précédent : elle correspond au cas d'interfaces collés. (cf. Rychlewski, 1966 b).

La démonstration en est analogue :

Dans la première structure où les conditions aux interfaces sont cohérentes, on a :

$\exists\ v_{ij}^{*}$ licite tel que $Q_i\,\dot{q}_i^{*} > \pi(v_{ij}^{*}) + k\,|\,[\![\,\vec{v}^{*}\,]\!]\,|$

puissance des forces extérieures de Q. > puissance dissipée totale

On suppose que pour certaines valeurs des μ, Q soit supporté par la structure : $\exists\ \sigma_{ij}^{A'}$ licite donnant $\tau^{A'}$ contrainte tangentielle aux interfaces, en équilibre avec Q. A chaque interface la condition de frottement impose

$|\,\tau^{A'}\,| \leqslant \mu\sigma$

et $|\,\tau^{A'}\,| \leqslant k$

En appliquant le théorème des travaux virtuels on obtient :

$$Q_i\,\dot{q}_i^{*} = \int_{\text{solides}} \sigma_{ij}^{A'}\,v_{ij}^{*}\,dV + \int_{\text{interfaces}} \vec{\tau}^{A'}\,[\![\,\vec{v}^{*}\,]\!]\,dS \quad \text{où} \quad \vec{\tau}^{A'}\,[\![\,\vec{v}\,]\!] \leqslant k\,|\,[\![\,\vec{v}\,]\!]\,|$$

donc

$\int \sigma_{ij}^{A'}\,v_{ij}^{*}\,dV > \pi(v_{ij}^{*})$ dans les solides, ce qui est impossible car contredit le principe du travail maximal.

Le théorème est ainsi démontré.

5 – Drucker (1954) : Théorème B :

Si un chargement Q est supporté par la structure ou est limite dans le cas ou les interfaces sont lisses, il est supporté par la structure ou est limite dans tous les cas de frottement de Coulomb aux interfaces.

Nous en donnons la démonstration suivante par l'absurde : puisque Q est supporté ou est limite dans le cas des interfaces lisses (conditions cohérentes) il existe un champ de contraintes licite σ_{ij}^{B} qui l'équilibre. On suppose que Q ne soit pas supporté par la structure pour certaines valeurs de μ : soit alors v_{ij}^{*} le champ de vitesses de déformation pour cette structure tel que $Q_i\,\dot{q}_i^{*} > \pi(v_{ij}^{*})$ puissance dissipée dans les solides.

En appliquant le théorème des travaux virtuels on a :

$$Q_i\,\dot{q}_i^{*} = \int_{\text{solides}} \sigma_{ij}^{B}\,v_{ij}^{*}\,dV + \int_{\text{interfaces}} \vec{\tau}^{B}\,[\![\,\vec{v}^{*}\,]\!]\,dS = \int_{\text{solides}} \sigma_{ij}^{B}\,v_{ij}^{*}\,dV \quad \text{car} \quad \tau^{B} = 0$$

donc

$\int \sigma_{ij}^{B}\,v_{ij}^{*}\,dV > \pi(v_{ij}^{*})$ puissance dissipée dans les solides. Ce qui contredit le principe du travail maximal.

Le théorème est donc démontré.

6 – Cas du chargement proportionnel.

La transposition de ces théorèmes dans le cas du chargement proportionnel est aisée. Il en résulte un moyen d'obtenir des minorants et majorants de la zone de charges limites. En particulier, dans le cas où la charge limite est la même dans le cas lisse *(B)* et dans le cas parfaitement rugueux *(A')* cette valeur est aussi la charge limite dans le cas du frottement de Coulomb à l'interface. Et d'une façon plus générale :

la charge limite dans le cas des interfaces parfaitement rugueux est un majorant de la zone de charges limites dans le cas du frottement de Coulomb aux interfaces ;

la charge limite dans le cas des interfaces lisses est un minorant de la zone de charges limites dans le cas du frottement de Coulomb aux interfaces.

7 – Solide constitué de matériau non standard.

Radenkovic (1961) a également proposé une extension des théorèmes limites au cas du matériau de Coulomb non standard dont le tenseur des vitesses de déformation dérive d'un potentiel plastique de Coulomb différent du critère. L'étude est faite à trois dimensions en généralisant le critère de Coulomb en un critère de révolution (surface limite conique dans l'espace σ_1, σ_2, σ_3) selon la méthode indiquée par Drucker et Prager (1952). Deux théorèmes sont énoncés apparentés dans leur esprit à ceux de Drucker (1954) déjà cités. La généralisation est également possible avec la classique représentation du critère de Coulomb à trois dimensions du type courbe intrinsèque (la contrainte principale intermédiaire n'intervient pas et la surface limite est une pyramide hexagonale). Les théorèmes obtenus permettent dans une certaine mesure de préciser le sens de méthodes couramment employées en Mécanique des sols. Une extension au cas d'un critère f et d'un potentiel g quelconques est (surtout en ce qui concerne celui-ci) plus délicate. (Voir à ce sujet les articles de Radenkovic (1962), Palmer (1966), Sacchi (1968).)

Les résultats de Radenkovic, associés à ceux de Drucker et Prager (1952), Drucker (1954) concernant les lignes de discontinuité des vitesses, permettent de préciser la validité des résultats obtenus en mécanique des sols lorsque l'on tente d'appliquer la théorie des charges limites.

III – APPLICATION AUX PROBLEMES DE POINCONNEMENT EN DEFORMATION PLANE.

A titre d'exemple, et pour illustrer les diverses notions présentées précédemment, nous considérons le problème du poinçonnement d'une plaque de largeur $2L$ et d'épaisseur $2h$ par des poinçons symétriques rectangulaires de largeur $2a$, rigides. Le matériau est supposé satisfaire au principe du travail maximal. Il n'y a pas de forces de volume. On étudie le problème en déformation plane ; le critère, supposé indépendant de la pression moyenne, est équivalent à celui de Tresca.

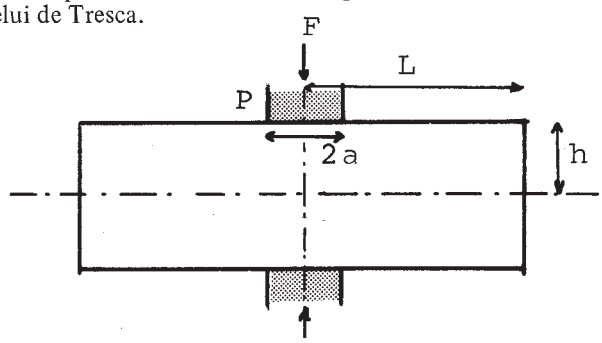


Fig. 1

Par raison de symétrie, il est évident que le problème est équivalent à celui représenté ci-dessous, du poinçonnement d'une plaque d'épaisseur h supposée fixée sans frottement (glissement possible) sur un support rigide, par un poinçon.

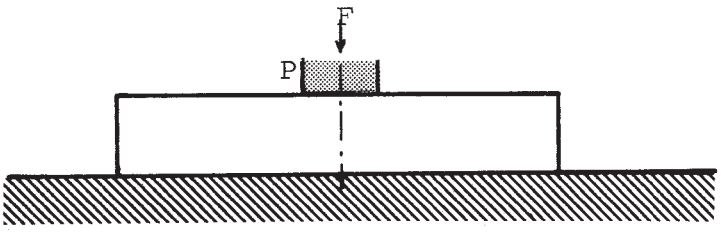


Fig. 2

La structure étudiée est constituée du poinçon P et de la plaque. P est supposé infiniment rigide et aucune condition autre que les équations d'équilibre n'est à vérifier par un tenseur des contraintes licite dans P. La force de poinçonnement F appliquée au poinçon est supposée verticale axiale ([12]) et on se donne la vitesse verticale U au point d'application de cette force. Les autres données aux limites sont des conditions de vitesses de déplacement ou de contraintes nulles. La condition à l'interface entre poinçon et plaque est également précisée : donnée de la vitesse de glissement de la contrainte tangentielle ou d'une condition de frottement du type proposée en I § 1.6. L'application de la théorie des charges limites est possible.

(12) Chargement proportionnel. On pourrait aussi poser le problème en se donnant la vitesse d'enfoncement du poinçon, verticale, et en cherchant la force (deux composantes) à appliquer.

1 – Milieu infini.

Faisant tendre L et H vers l'infini, on obtient le problème classique du poinçonnement du demi-plan.

Différentes solutions incomplètes ont été données à ce problème :

– celle de Prandtl pour le poinçon parfaitement rugueux,

– celle de Hill, de Prandtl, et d'autres pour le poinçon sans frottement.

Elles fournissent un majorant de la charge limite.

Bishop (1953), Shield (1954), Sayir et Ziegler (1968) ont indépendamment et de façons différentes, complété ces solutions, le champ de contraintes licite donné dans la dernière référence vérifie la condition *non nécessaire* que les contraintes s'annulent à l'infini.

2 – Milieu fini et h/a ⩾ 1.

On suppose L fini suffisamment grand pour ne pas influer sur la solution du problème.

Quelle que soit la valeur de m, coefficient de rugosité partielle du poinçon : pour une épaisseur supérieure à $a\sqrt{2}$ et une largeur supérieure à $6a$, la solution incomplète de Prandtl est encore valable fournissant un majorant de la charge limite.

D'autre part il existe un autre type de mode de déformation imaginé par Hill : il ne s'agit plus de refoulement de matériau plastique jusqu'à la surface libre, mais de la formation d'un bulbe plastique sous le poinçon, sur toute l'épaisseur de la plaque, séparant ainsi deux morceaux rigides qui se déplacent horizontalement de chaque côté. Ce type de mode de déformation permet la construction de solutions incomplètes (Hill).

Celles-ci, valables quelle que soit la valeur de m, ne fournissent pas la même valeur de majorant de la charge limite que celle de Prandtl. Hill indique que pour $h/a < 8{,}74$, cette valeur est inférieure à celle donnée par la solution de Prandtl, et que pour $h/a > 8{,}74$ l'ordre est inversé ([13]).

Pour $h/a \geqslant 8{,}74$ Bishop (1953) donne une solution complète associée à la solution de Prandtl. En effet l'utilisation d'une restriction de la solution complète de Shield n'est pas possible dans ce cas car elle ne satisferait pas à la condition de frottement nul sur l'assise rigide.

Dans la deuxième partie de ce travail nous étudierons le cas $h/a \leqslant 8{,}74$.

(13) Les calculs effectués dans la suite de ce travail donnent pour cette valeur critique de h/a le résultat de 8,7127 que nous adoptons dans toute la suite.

DEUXIÈME PARTIE

sur le poinçonnement d'une plaque en déformation plane $h/a \geqslant 1$

I – RAPPELS SUR LA THEORIE DE L'EQUILIBRE LIMITE EN DEFORMATION PLANE.

La théorie de l'équilibre limite en déformation plane pour le matériau parfaitement plastique est exposée dans de nombreux ouvrages (voir par exemple : Geiringer (1937), Mandel (1942), Hill (1950), Prager (1951), Mandel (1962) etc.). Nous rappelons ici les résultats fondamentaux utilisés dans la suite.

Nous désignons par k la cission limite. Les contraintes positives sont les tractions. σ_1 et σ_2 sont les deux contraintes principales dans le plan (x, y), $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$: $\vec{1}$ et $\vec{2}$ sont les axes principaux correspondants.

Nous posons :

$$p = -(\sigma_1 + \sigma_2)/2, \quad \psi = (\vec{0}x, \vec{1}), \qquad \phi = \psi - \pi/4$$

Le critère de plasticité et potentiel plastique est $(\sigma_1 - \sigma_2) = 2k$

Il y a identité de caractéristiques des équations des contraintes et des équations des vitesses. Le réseau des caractéristiques est formé de deux familles de lignes orthogonales α et β définies par $(\vec{1}, \vec{\alpha}) = -\pi/4$ et $(\vec{1}, \vec{\beta}) = \pi/4$

Nous supposons qu'il n'y a pas de forces de masse :

Les relations le long des caractéristiques sont :

en contraintes $\begin{cases} dp + 2kd\,\phi = 0 & \text{le long d'une ligne } \alpha \\ dp - 2kd\,\phi = 0 & \text{le long d'une ligne } \beta \end{cases}$

dont on tire les théorèmes de Hencky pour le réseau des caractéristiques ;

pour les vitesses $\begin{cases} dv_\alpha - v_\beta\, d\,\phi = 0 & \text{le long d'une ligne } \alpha \\ dv_\beta + v_\alpha\, d\,\phi = 0 & \text{le long d'une ligne } \beta \end{cases}$

ce sont les équations de Geiringer dont on déduit la validité des théorèmes de Hencky pour l'hodographe (image dans le plan des vitesses du réseau des caractéristiques).

Du premier théorème de Hencky, on tire la propriété classique : connaissant deux arcs de caractéristiques α et β sécants (et orthogonaux en leur point de rencontre), il est possible sans connaître la valeur de p sur ces lignes, de construire, dans l'hypothèse d'une solution continue, le réseau des caractéristiques s'appuyant sur ces deux là dans tout le domaine où ces caractéristiques sont sécantes. Ensuite il suffit de fixer la valeur de p en un point pour qu'elle soit connue en tous les points du réseau ainsi construit. Ce résultat largement utilisé par la suite, facilite beaucoup la construction de solutions incomplètes. Une méthode analogue s'applique dans le plan des vitesses pour la construction de l'hodographe.

Enfin, le problème étant hyperbolique linéaire en ce qui concerne la vitesse, les lignes de discontinuité de la vitesse sont nécessairement des caractéristiques (et la discontinuité est tangentielle et constante). Pour les contraintes le problème est quasi-linéaire : les lignes de discontinuité de la distribution de contraintes ne sont pas des caractéristiques (cf. Courant-Hilbert (1962)) ; une fois connue la direction d'une telle ligne, une relation existe entre les sauts de p et ϕ. Les problèmes posés par les lignes de discontinuité des contraintes ont été abordés par Winzer et Carrier (1948 et 1949). Il est important de rappeler que, en ce qui concerne les vitesses, une ligne de discontinuité de contraintes doit être considérée comme une bande infiniment mince, parfaitement flexible et inextensible (Prager (1951), Geiringer (1953)).

II – RECHERCHE D'UNE SOLUTION COMPLETE ASSOCIEE A LA SOLUTION INCOMPLETE DE HILL.

1 – La solution incomplète de Hill.

Hill (1950 a) a proposé pour le problème du poinçonnement d'une plaque par un poinçon rigide, tel qu'il a été posé dans le chap. III de la première partie, une solution incomplète qui, pour $h/a < 8{,}713$, doit être préférée à celle de Prandtl. Elle utilise le réseau de lignes de glissement de la figure 1. Nous établissons dans l'annexe 1 une formule relative aux abscisses curvilignes dans ce réseau, utile dans la suite.

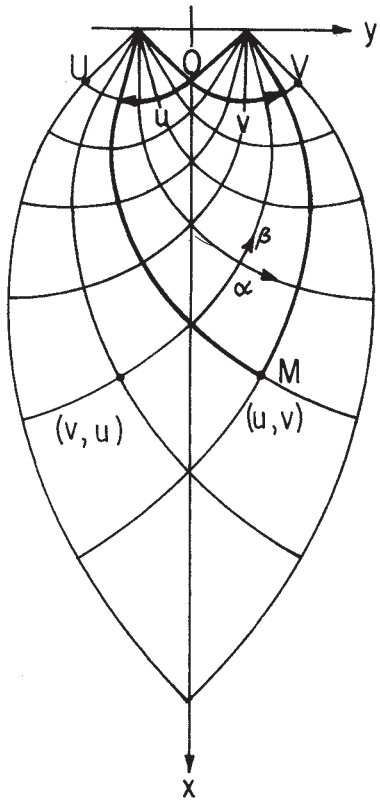


Fig. 1

1.1 – Mode de déformation.

Sous le poinçon de largeur *A'A* on trace la partie de ce réseau limitée au bulbe " d'ouverture " α dont l'extrémité atteint le support rigide de la plaque. La solution incomplète a alors pour zone déformée l'intérieur de ce bulbe et le mode de déformation est (fig 2) :

les deux blocs rigides *(B)* et *(B')* sont animés d'une vitesse horizontale dirigée vers l'extérieur. L'hodographe est un réseau de courbes homothétique du réseau des lignes de glissement : on en déduit la répartition des vitesses dans la zone déformée la vitesse de *(B)* et *(B')* est $U\,a/h$, il n'y a pas de glissement à l'interface sous le poinçon s'il est animé d'un mouvement de translation vertical.

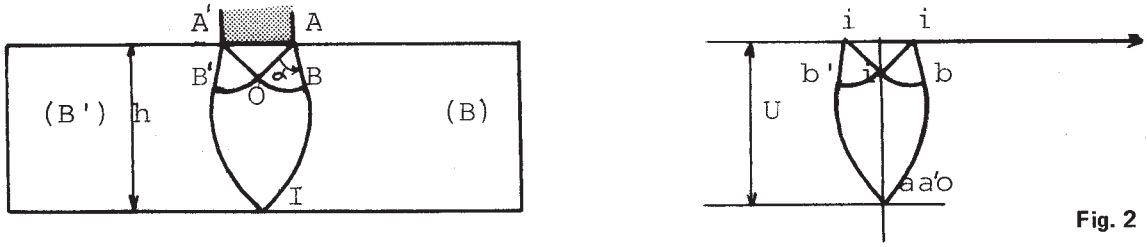


Fig. 2

1.2 – Champ de contraintes associé.

Il existe une infinité simple de champs de contraintes compatibles définis dans la zone déformée ; il suffit en effet de donner la valeur de p en un point du bulbe pour définir un tel champ ainsi qu'il a été dit ([1]). Le champ de contraintes associé doit aussi satisfaire les autres conditions : ainsi, la possibilité d'assurer l'équilibre de chacun des blocs rigides *(B) et (B')* entraîne que la résultante horizontale des contraintes s'exerçant sur chacune des deux parois du bulbe soit nulle. Cette condition qui est la seule introduite par les conditions supplémentaires imposées au champ de contraintes associé, fixe le champ de contrainte compatible que l'on doit considérer. Ce champ satisfait les conditions aux limites sur les contraintes pour une valeur de F qu'il est alors aisé de déterminer, L_1.

Nous définissons $p_h = L_1 \,/\, 2a$.

D'après la formule de l'annexe 1 nous avons :

$$h/a = 1 + \frac{1}{a} \int_0^{\alpha} \sqrt{2}\, \frac{\partial s}{\partial v}\, (t, t)\, dt = 1 + 2 \int_0^{\alpha} [I_0\,(2t) + I_1\,(2t)]\, dt$$

D'où, en posant $A_0\,(x) = \int_0^{x} I_0\,(t)\, dt$:

$$h/a = A_0\,(2\alpha) + I_0\,(2\alpha) \qquad (1), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}351\ (77{,}^{0}4) \text{ pour que } h/a < 8{,}713$$

Pour déterminer p_h nous écrivons que la résultante des contraintes appliquées sur l'axe entre la surface libre et le point I est nulle :

$$(p_h - 2k)\,a + \int_0^{\alpha} \sqrt{2}\, \frac{\partial s}{\partial s}(t, t)\,(p_h - 2k - 4kt)\, dt = 0$$

d'où :

$$p_h = 2k\, \frac{I_0\,(2\alpha) + 2\alpha\,[I_0\,(2\alpha) + I_1\,(2\alpha)]}{A_0\,(2\alpha) + I_0\,(2\alpha)} \qquad (2)$$

2 – Prolongement du champ de contraintes de la solution de Hill. Problème local au voisinage du point A.

Nous nous proposons de prolonger le champ de contraintes ainsi défini, par une méthode analogue à celle de Bishop (1953) pour la solution de Prandtl, construisant ainsi une solution complète. Cette méthode consiste à prolonger de façon entièrement plastique le champ de contraintes au-delà de la zone déformée, jusqu'à une surface libre de contraintes ; au-delà de cette surface et jusqu'à la surface réelle du solide on utilise le champ de contraintes nulles ; pour la vérification des autres conditions aux limites il est nécessaire de tronquer la solution par d'autres lignes de discontinuité de contraintes permettant de poursuivre le prolongement par des champs simples.

Dans toute la suite, par raison de symétrie, nous ne traitons que du prolongement du champ de contraintes à droite de l'axe de symétrie.

Le prolongement entièrement plastique au-delà de la caractéristique *ABI* est indéterminé en l'absence de condition supplémentaire. Le fait que ce prolongement doive admettre une surface libre de contraintes est une condition supplémentaire dont nous allons étudier les conséquences.

Nous considérons d'abord le problème au voisinage du point A. Les résultats de base pour cette étude se trouvent dans un article de Hill (1954).

La question se pose, de savoir si le prolongement entièrement plastique du champ de contraintes au-delà de *ABI* est défini de manière unique par la condition " existence d'une surface libre ".

---

(1) On vérifie aisément en comparant les orientations relatives des caractéristiques et de leurs images sur l'hodographe que le choix des noms des lignes α et β sur la fig. 1 est correct pour que la puissance dissipée soit en tout point non négative.

Nous supposons la surface libre régulière en A et l'assimilons à sa tangente de même que la caractéristique AB. β est l'angle de ces deux droites (fig. 3).

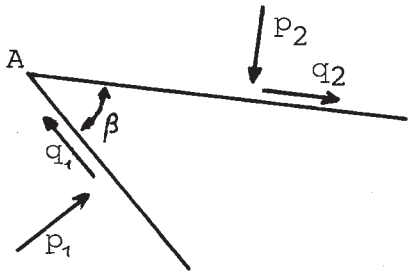


Fig. 3

Avec les notations de Hill, les contraintes appliquées sont :

$p_2 = q_2 = 0.$

$p_1 = p_h - 2k\alpha - k,\ q_1 = -k.$

D'où l'on déduit que β doit nécessairement vérifier :

$1 + 2(\beta - \pi/4) \geqslant p_1/k \geqslant 2\cos(\beta - \pi/4) - 1$ (si $\pi/4 \leqslant \beta \leqslant 3\pi/4$).

Suivant la valeur de p_h nous avons :

· si $p_h \geqslant 2k\ (1+\alpha)$, c'est-à-dire $p_1 \geqslant k$, la deuxième inégalité est toujours vérifiée et la première définit la valeur minimale β_0 de β par : $1 + 2(\beta_0 - \pi/4) = p_1/k$

$\forall\beta : \beta_0 < \beta \leqslant 3\pi/4$, il existe pour le problème local une infinité d'équilibres rigides-plastiques satisfaisant les conditions aux limites et parmi ceux-ci une infinité d'équilibre entièrement plastiques, comportant d'ailleurs des lignes de discontinuité.

Pour $\beta = \beta_0$, il existe un seul équilibre satisfaisant les conditions aux limites ; il est entièrement plastique, et composé d'un éventail de Prandtl et d'un champ homogène ; il n'y a pas de ligne de discontinuité (fig. 4, type a).

En particulier si $p_h = 2k\ (1+\alpha)$, $p_1 = k$, la valeur minimale de β est $\beta_0 = \pi/4$, à laquelle correspond l'équilibre entièrement plastique homogène (fig. 4, b).

si $p_h < 2k\ (1+\alpha)$, $p_1 < k$, la première inégalité est toujours vérifiée et la seconde définit la valeur minimale β_0 de β par : $p_1/k = 2\cos(\beta_0 - \pi/4) - 1$.

$\forall\beta : \beta_0 < \beta \leqslant 3\pi/4$, il existe une infinité d'équilibres rigides plastiques, satisfaisant les conditions aux limites et parmi ceux-ci une infinité d'équilibres entièrement plastiques comportant tous, au moins une ligne de discontinuité.

Pour $\beta = \beta_0$ l'équilibre satisfaisant les conditions aux limites est unique. Entièrement plastique, il est composé de deux champs homogènes séparés par une ligne de discontinuité (fig. 4 c).

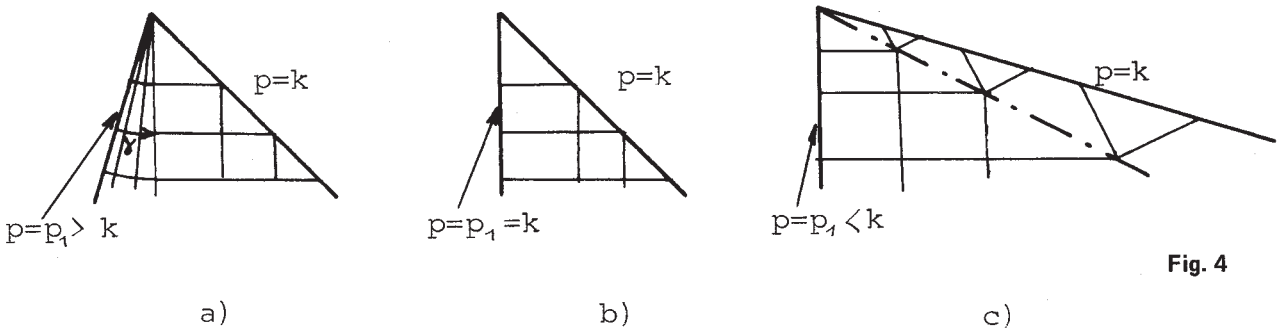


Fig. 4

Nous avons obtenu par la résolution numérique de l'équation $p_h/2k = 1$ les valeurs : $\alpha = 1{,}0302$ (59°, 03) $h/a = 5.298$.

Nous voyons ainsi que la condition d'existence d'une surface libre n'est pas suffisante pour entraîner l'unicité du prolongement entièrement plastique au voisinage du point A.

Dans le but de restreindre l'étendue du prolongement jusqu'à la surface libre nous décidons de prendre pour β la valeur minimale β_0, à laquelle correspond l'unique prolongement entièrement plastique de la fig. 4 (a, b, c suivant le cas).

Nous ne traiterons dans ce chapitre que du cas où cet équilibre est du type a ou b, $\alpha \geqslant 1{,}0302$, c'est-à-dire du cas *où le prolongement local entièrement plastique est continu* jusqu'à la surface libre ($h/a \geqslant 5{,}298$).

Remarquons que pour la solution complète de Bishop, la question du prolongement local au voisinage du point A ne se pose pas puisque le champ de contraintes de la solution incomplète comporte déjà une surface libre en A.

D'autre part, si nous cherchons pour $\alpha = 1{,}3507$, valeur correspondant à la transition entre les solutions incomplètes de Hill et de Prandtl, le prolongement local défini ci-dessus au voisinage de A de la solution incomplète de Hill, nous obtenons une surface libre horizontale pour le prolongement retrouvant ainsi au voisinage de A le champ de la solution incomplète de Prandtl (2). Le choix de β_0 pour β, permet donc d'obtenir un prolongement local situé à l'intérieur de la plaque, jusqu'à la valeur de h/a correspondant à la transition.

3 – Poursuite du prolongement (dans l'hypothèse h/a ⩾ 5,298.

L'abaque de la figure 6 donne $(\alpha + \gamma)$ en fonction de α, obtenu par résolution numérique de l'équation $p_h = 2k\,[1 + (\alpha + \gamma)]$.

Les résultats de l'étude du problème local nous permettent de poursuivre le prolongement.

A partir du prolongement local *continu* en A nous cherchons à construire un prolongement entièrement plastique qui soit continu dans le plus grand voisinage possible du point A. Le théorème de Hencky, alors applicable, montre que le prolongement du champ semi-homogène $AO'B$ est nécessairement un éventail de Prandtl ABO d'ouverture $\gamma = (AB, AD)$ suivi d'un champ homogène ADC aboutissant à une surface libre rectiligne (il est identique au prolongement local en A).

Ensuite, supposant la profondeur et la largeur du solide illimitées, le prolongement à partir des caractéristiques BI et BDC et des conditions de symétrie, est aisé : nous obtenons le bulbe d'ouverture $(\alpha + \gamma)$, $ADJD'A'$, auquel se raccorde un champ semi-homogène $JDCH$, terminé par un champ homogène $JHKH'$ (fig. 5).

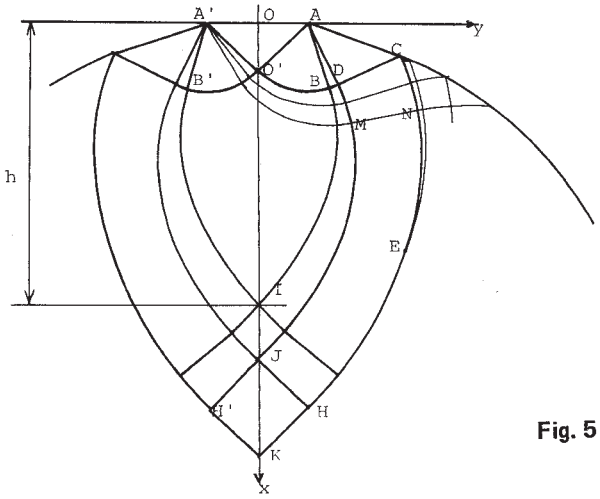


Fig. 5

(2) Pour $h/a = 8{,}713$, la solution de Prandtl complétée par Bishop, constitue une solution complète du problème. D'après le résultat de Hill (1951) sur l'unicité du champ de contraintes dans la réunion des zones déformées de plusieurs solutions complètes d'un même problème, le résultat obtenu ici est nécessaire pour que l'on puisse espérer compléter par cette méthode la solution de Hill.

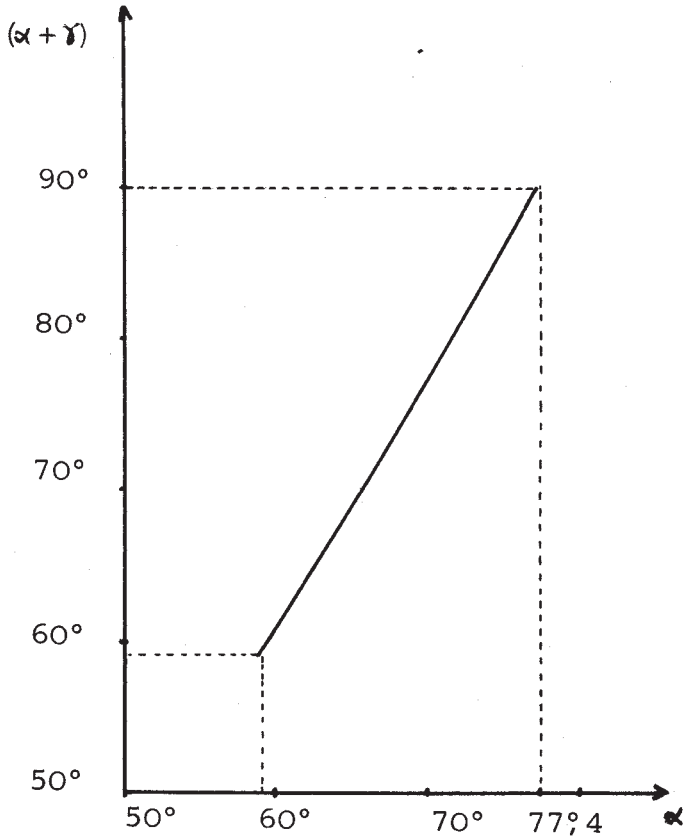

(α + γ)
90°
80°
70°
60°
50°
50°
60°
70°
77°,4
α

Fig. 6

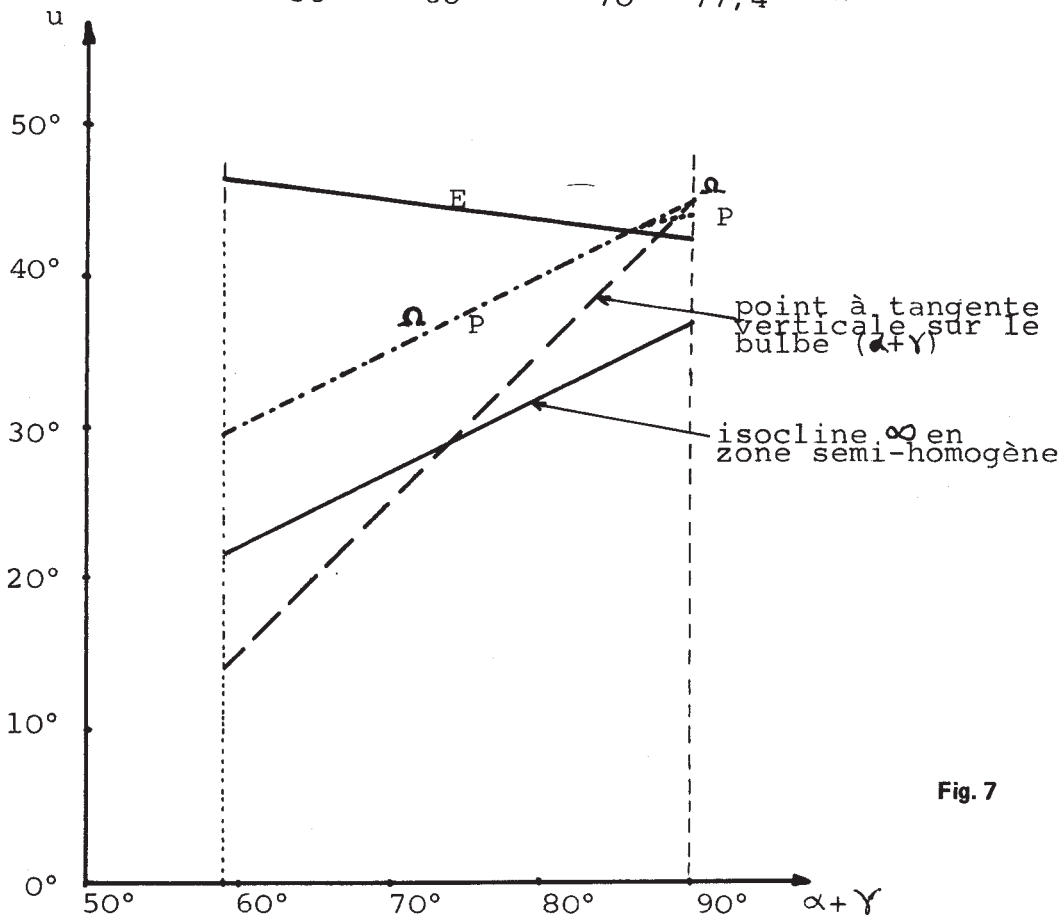

u
50°
40°
30°
20°
10°
0°
E
Ω
P
Ω
P
point à tangente verticale sur le bulbe (α+γ)
isocline ∞ en zone semi-homogène
50°
60°
70°
80°
90°
α+γ

Fig. 7

Pour aller jusqu'à la surface libre et construire celle-ci à partir de C, nous utilisons les méthodes classiques à partir du théorème de Hencky en suivant les caractéristiques α issues de A', sans discontinuité.

Mais le champ ne peut être entièrement continu : considérons la caractéristique CK : c'est une ligne de discontinuité de la courbure des caractéristiques α, dont le rayon de courbure est infini à gauche (champ semi-homogène) et fini à droite, décroissant quand on s'éloigne de C sur CK. Calculons ce rayon de courbure par application des théorèmes de Hencky :

Le premier théorème montre qu'en un point de la surface libre les rayons de courbure R et S des caractéristiques α et β sont égaux, donc en C R_C à droite $= S_C$.

D'après le deuxième théorème :

$$- S_C = AO' + O'D + DC = a\sqrt{2}\,(2 + \alpha + \gamma)$$

et $R_M = R_C + MC$

On calcule MC par application du même théorème il vient : $MC = ND + a\sqrt{2}\,u$ et en explicitant ND :

$$MC = a\sqrt{2}\;[u - 1 + I_0\,(2\sqrt{(\alpha+\gamma)\,u}) + I_1\,(2\sqrt{(\alpha+\gamma)\,u}) \cdot \sqrt{\frac{u}{\alpha+\gamma}}]$$

$$R_M = - a\sqrt{2}\left\{3 + \alpha + \gamma - u - I_0\,[2\sqrt{(\alpha+\gamma)\,u}] - \sqrt{\frac{u}{\alpha+\gamma}} \cdot I_1\,[2\sqrt{(\alpha+\gamma)\,u}\,]\right\}$$

Au point E de CK défini par $R_E = 0$, la caractéristique β, CK, a un point stationnaire à droite où elle est rencontrée par une caractéristique β infiniment voisine issue de la surface libre au-delà de C (Hill). La condition d'existence d'une surface libre apparaît ainsi trop forte pour un prolongement entièrement continu. Une ligne de discontinuité doit être introduite à partir de E déterminée comme indiqué par Bishop (1953) ; nous pouvons ensuite poursuivre la construction du réseau et de la surface libre.

Les résultats de la résolution numérique en u de l'équation $R_M = 0$, sont représentés à la figure 7 en fonction de $(\alpha + \gamma)$: u_E fonction décroissante de $(\alpha + \gamma)$ varie de $46{,}3^0$ pour $(\alpha + \gamma) = 1{,}0302$ à $42{,}6^0$ pour $(\alpha + \gamma) = \pi/2$.

La ligne de discontinuité issue de E ne pénètre jamais dans le bulbe d'ouverture α, puisque cela ne se produit pas dans le cas le plus défavorable, $(\alpha + \gamma) = \pi/2$, comme le montre le schéma construit par Bishop ([3]).

4 – Quelques propriétés du réseau.

Ainsi qu'il apparaîtra par la suite, il est important de déterminer le point de la surface libre où sa tangente est verticale. Ce point P est défini par $p = k, \psi = \pi/2$.

Appliquons le théorème de Hencky et les relations de discontinuité en définissant $[\![\, \psi \,]\!]$ ([4]) par la continuité du sens des lignes α au franchissement de la ligne de discontinuité (les lignes β ont, dans cette hypothèse, un rebroussement) :

le long de AP, avant le franchissement de la ligne de discontinuité, nous avons :

$$p + 2k\,\psi = k + 2k\,(\alpha + \gamma - u) + 2k\,(\pi/2 - u)$$

après franchissement de la ligne de discontinuité :

$$p + 2k\,\psi = k + 2k\,(\alpha + \gamma - u) + 2k\,(\pi/2 - u) + 2k\,[\![\psi]\!] - 2k \sin [\![\psi]\!]$$

Si $[\![\psi]\!] = 0$, cette équation en remplaçant p et ψ par k et $\pi/2$ respectivement, donne $u_P = (\alpha + \gamma)/2$ solution acceptable si $(\alpha + \gamma)/2 \leqslant u_E$ (vérification a posteriori de l'hypothèse).

Si cette solution est inacceptable, c'est-à-dire si $(\alpha + \gamma)/2 > u_E$ la solution doit être recherchée avec l'équation complète, où $[\![\psi]\!] \neq 0$. Comme $[\![\psi]\!] < 0$, on a $u_E < u_P < (\alpha + \gamma)/2$.

(3) Ewing et Hill (1967) ont remarqué que l'intensité de cette discontinuité était pratiquement négligeable.

(4) La notation $[\![\, g \,]\!]$ représente le saut de g, dans le sens indiqué.

Il est également important de connaître la valeur de p sur l'axe. On trouve facilement : $p = p_h - 4ku - k$; en particulier le point de l'axe où $p = k$ correspond à $u = (\alpha + \gamma)/2$ (point Ω).

On peut aussi déterminer le point où le bulbe d'ouverture $(\alpha + \gamma)$ a une tangente verticale. On trouve $u = (\alpha + \gamma) - \pi/4$.

Sur la figure 7 sont représentées les variations de ces différentes grandeurs en fonction de $(\alpha + \gamma)$.

5 – Marche à suivre pour continuer la construction de la solution complète.

Pour continuer la construction de la solution complète et satisfaire les conditions aux limites (contraintes normales pour $x = h$) de la même manière que Bishop, nous devons déterminer la courbe *(L)* possédant les propriétés suivantes :

courbe allant de la surface libre de droite à la surface libre de gauche et sur laquelle la contrainte appliquée donnée par le calcul du réseau entièrement plastique, soit en tout point verticale.

Une fois cette courbe déterminée, pour que la méthode fournisse effectivement une solution complète associée à la solution incomplète de Hill, diverses conditions doivent être vérifiées :

a) Le champ de contraintes intérieur au bulbe d'ouverture α doit être identique à celui de la solution incomplète ; autrement dit on doit vérifier que la ligne de discontinuité qui part de E ne pénètre pas dans le bulbe, ce que nous avons déjà établi au § 3, de même que la courbe *(L)*.

b) Pour que les conditions aux limites soient satisfaites sur l'assise rigide, il faut que la courbe *(L)* soit située au-dessus de celle-ci.

Pour les deux conditions ci-dessus, nous devons donc vérifier que *(L)* passe par I et n'a pas de point d'abscisse verticale supérieure à celle de I.

c) La méthode de Bishop consiste à utiliser au-dessous de *(L)* le champ de contraintes uniaxiales défini par la continuité de la contrainte sur *(L)*. Pour que cette méthode soit applicable, il faut que ce champ ne viole le critère d'écoulement en aucun de ses points. Nous devons donc vérifier qu'en chaque point de *(L)* la contrainte verticale, appliquée à *(L)* calculée dans le prolongement entièrement plastique correspond à un tenseur uniaxial dont la contrainte principale est, en module, non supérieure à $2k$.

Bishop a effectué numériquement la vérification de c) dans le cas du problème qu'il a étudié (compléter la solution de Prandtl ([5]). Nous nous proposons d'effectuer cette vérification dans les cas étudiés ici (et même plus généralement, cf. chapitre III) sans calculs numériques.

6 – Famille des courbes tracées dans le domaine intérieur aux surfaces libres, sur lesquelles la contrainte appliquée soit verticale.

Par l'étude des courbes de cette famille nous voulons montrer l'existence et l'unicité de *(L)* et faciliter les diverses vérifications.

En tout point du domaine intérieur aux surfaces libres, le champ de contraintes est défini par p, ψ et la condition d'écoulement. On a :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p + k \cos 2\psi \\ \sigma_y &= -p - k \cos 2\psi \\ \tau_{xy} &= k \sin 2\psi \end{aligned} \qquad (3)$$

L'axe Ox est vertical descendant. Une facette sur laquelle la contrainte exercée est verticale est définie par : $T_x = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy} \sin\alpha = 0$ en désignant par α l'angle de sa normale avec O_x, d'où :

$$\operatorname{tg}\alpha = (\sin 2\psi) / (p/k + \cos 2\psi) \qquad (4)$$

(4), détermine une seule direction de facette non orientée.

(5) De même Szczepinski (1966) dans une étude du même problème que celui traité ici et Ewing et Hill (1967) pour un problème associé.

Ainsi en tout point du domaine (où $\sin 2\psi$ et $(p/k + \cos 2\psi)$ ne sont pas simultanément nuls) un champ d'éléments de contact est défini. Dans les zones du domaine où le champ de contraintes est semi-homogène, les segments rectilignes de caractéristiques sont des isoclines du champ d'éléments de contact.

Soit V la famille des courbes enveloppes de ces éléments de contact, intégrales de (4), dont nous nous proposons d'étudier les propriétés. (La figure 8 représente les courbes de V dans le cas du réseau de Bishop.)

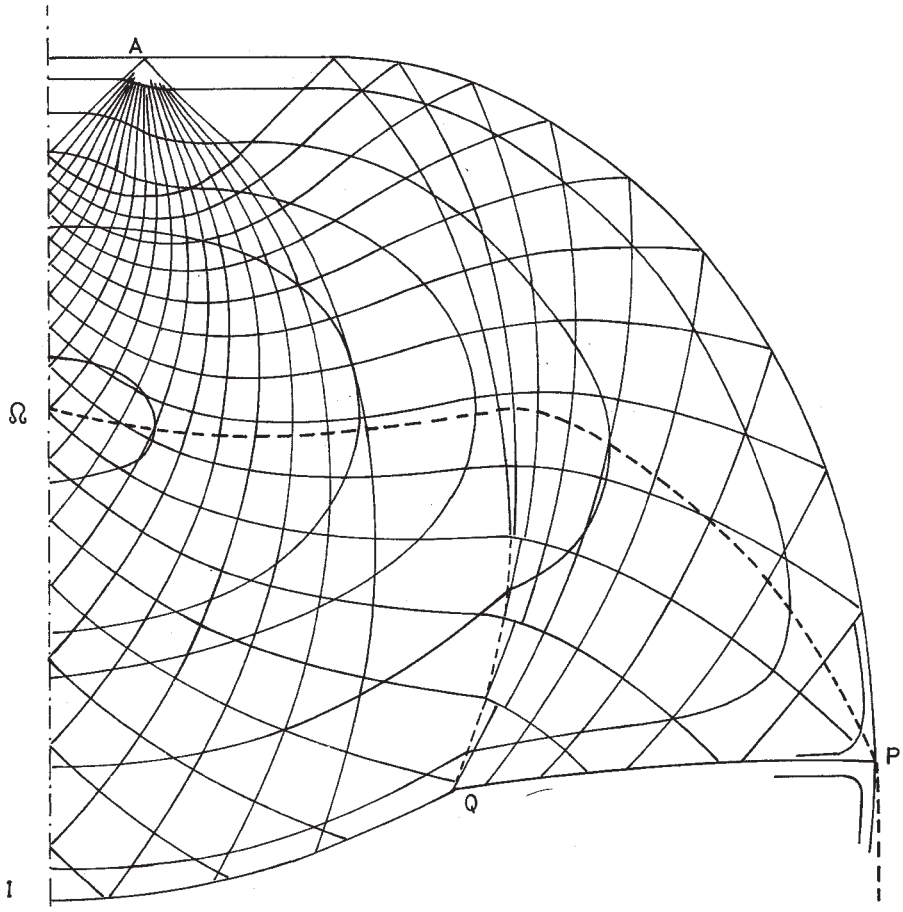


Fig. 8

Sur l'axe on a $\psi = \frac{\pi}{2}$: les éléments de contact y sont à tangente horizontale, sauf au point Ω où $p = k$, en lequel $\operatorname{tg} \alpha$ est indéterminée, qui est une courbe intégrale réduite à un point. On a ainsi une première famille de courbes intégrales, constituée de courbes fermées entourant le point Ω.

Il est utile de tracer l'isocline $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, correspondant à un élément de contact vertical, pour cette famille de courbes. Dans le champ semi-homogène, JDCE, le segment rectiligne de cette isocline est défini par $(p/k + \cos 2\psi) = 0$ d'où par application du premier théorème de Hencky :

$$\cos 2\psi = \pi - 1 + 2(\alpha + \gamma) - 2\psi$$

ou encore :

$$\cos 2(\pi/2 + \alpha + \gamma - u) = 2u - 1$$

On a tracé la courbe représentant la solution de cette équation en u en fonction de $(\alpha + \gamma)$ (fig. 7).

L'Isocline $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ part du point Ω et aboutit au point P à tangente verticale sur la surface libre. Elle est continue, à tangente continue et passe toujours au-dessus du point E sur CE.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Au-dessus de cette courbe} \ldots\ldots : & p/k + \cos 2\psi > 0 \text{ et } \operatorname{tg} \alpha < 0 \\ \text{Au-dessous} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots : & p/k + \cos 2\psi < 0 \text{ et } \operatorname{tg} \alpha > 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{car} \\ \sin 2\psi < 0 \end{array}$$

Cette isocline repart du point P symétriquement.

En les points de la surface libre où $p = k$ et $\psi \neq \pi/2$, la direction de facette indiquée par la formule est, comme cela se voit directement, la direction de la tangente à la surface libre : la surface libre apparaît comme une partie de courbe intégrale (et non une enveloppe). Au point P où $p = k$ et $\psi = \pi/2$, il y a indétermination (comme en Ω). L'étude précise en ce point montre qu'il s'agit d'un point de branchement à $\pi/2$ (fig. 9).

En P l'angle α varie de $\pi/2$ à 0. La courbe intégrale, limite des courbes intégrales entourant Ω, et composée de la surface libre $OACP$ et d'une branche partant en P normalement à la surface libre.

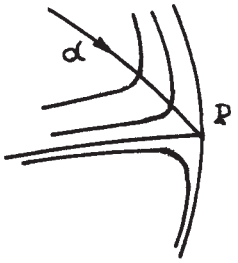


Fig. 9

Une autre famille de courbes intégrales, a pour limite la portion inférieure de la surface libre et la même branche normale en P.

7 – La courbe *(L)*

7.1 – Existence et unicité de *(L)*.

Il est clair que cette branche normale en P est la seule courbe allant d'une surface libre à l'autre et sur laquelle la contrainte appliquée soit en tout point verticale. *C'est la courbe (L) cherchée.*

7.2 – *(L)* passe par *I*.

Soit I' le point où *(L)* coupe l'axe Ox et considérons l'équilibre du volume $OI'QPCAO$. Les forces appliquées à ce volume le long de OA, et de *(L)* sont verticales, le long de ACD, nulles, cela entraîne que la résultante des forces le long de OI' soit verticale (c'est-à-dire nulle ici par raison de symétrie) ; p_h étant connue par la formule (2), la condition de contrainte nulle sur OI' donne $OI' = h$ défini par la formule (1). Nous montrons ainsi que *(L)* passe par *I*.

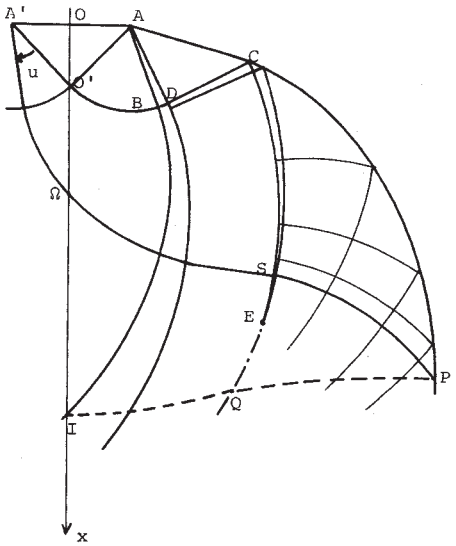


Fig. 10

7.3 – Forme de la courbe.

Au voisinage du point I, (L) est tangente à l'horizontale et à concavité vers le haut ; cette courbe est ascendante jusqu'à son point de rencontre avec la ligne de discontinuité issue de E car elle ne franchit pas l'isocline $\operatorname{tg} \alpha = \infty$. C'est le segment IQ de (L). (figure 10).

En Q il y a discontinuité de α et donc de la tangente à (L). (L) est horizontale en P comme nous l'avons vu, et nous démontrons dans l'annexe 2 que sa concavité est dirigée vers le bas, et qu'elle est descendante jusqu'en Q. L'abscisse du point P calculée par Ewing (1968) est $x_p = 2a\,[A_0\,(\alpha+\gamma) - I_0\,(\alpha+\gamma)\,] < h$.

Le point le plus bas de (L) est donc I. Ceci achève la vérification des deux premières conditions du § 5.

8 – Vérification de la condition sur les contraintes le long de (L).

La dernière vérification à effectuer relativement à (L) a trait aux contraintes appliquées : en un point M de (L) où $\operatorname{tg} \alpha = \sin 2\,\psi / (p/k + \cos 2\psi)$ définit la normale à la courbe, la contrainte T_x verticale, appliquée à une facette tangente à la courbe en ce point, calculée dans le réseau plastique, est égale à :

$$T_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha = (-\,p + k \cos 2\,\psi) \cos \alpha + k \sin 2\,\psi \sin \alpha$$

Le contrainte principale du tenseur uniaxial correspondant est :

$$t = \frac{T_x}{\cos \alpha} = -\,p + k \cos 2\,\psi + k \sin 2\,\psi \operatorname{tg} \alpha = k\,\frac{1 - p^2/k^2}{p/k + \cos 2\,\psi} \qquad (5)$$

qui doit vérifier ([6]) : $|\,t\,| \leqslant 2k$ (6)

La formule (5) est valable en tout point du domaine où elle fournit la contrainte principale du tenseur uniaxial défini par la contrainte verticale appliquée à l'élément de contact de normale donnée par (4).

L'étude de t dans toute la zone plastique va nous permettre de démontrer des théorèmes facilitant la vérification de la condition (6).

8.1 – Variation de t le long des caractéristiques.

La différentiation de (5) donne

$$\frac{dt}{k} = \frac{-\,(p/k + \cos 2\,\psi)\,2\,p dp/k^2 - (1 - p^2/k^2)\,(dp/k - 2 \sin 2\,\psi\, d\,\psi)}{(p/k + \cos 2\,\psi)^2}$$

d'où en tenant compte de la relation $dp = -\,2k d\,\psi$ le long d'une caractéristique α :

$$dt = \frac{2k}{(p/k + \cos 2\,\psi)^2}\,(1 - \sin 2\,\psi)\,\left(\frac{p}{k} + \frac{\cos 2\,\psi}{1 - \sin 2\,\psi}\right)^2 d\,\psi$$

ou encore :

$$dt = -\,dp\,(1 - \sin 2\,\psi)\,\frac{\left(\frac{p}{k} + \frac{\cos 2\,\psi}{1 - \sin 2\,\psi}\right)^2}{\left(\frac{p}{k} + \cos 2\,\psi\right)^2} \qquad (7)$$

le long d'une caractéristique α.

---

(6) Rappelons que tel que nous avons posé le problème, les tractions sont permises pour $x = h$. Voir à ce sujet Hill (1953).

Dans le cas d'une caractéristique β nous trouvons de même :

$$dt = \frac{-2k}{(p/k + \cos 2\psi)^2} (1 + \sin 2\psi) \left(\frac{P}{k} + \frac{\cos 2\psi}{1 + \sin 2\psi}\right)^2$$

ou encore :

$$dt = -dp\,(1 + \sin 2\psi) \frac{\left(\frac{p}{k} + \frac{\cos 2\psi}{1 + \sin 2\psi}\right)^2}{\left(\frac{p}{k} + \cos 2\psi\right)^2} \qquad (8)$$

Nous voyons que dans les deux cas, dt et dp sont de signes opposés.

Les formules différentielles (7) et (8) supposent $(p/k + \cos 2\psi) \neq 0$. Si en suivant une caractéristique (α par exemple) on franchit la séparatrice $(p/k + \cos 2\psi) = 0$ en un point où $|p/k| \neq 1$ (c'est-à-dire : $\sin 2\psi = 0$), il y a une discontinuité infinie de t avec changement de signe. En un point où $\sin 2\psi = 0$ ($\psi = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4}$), $p/k = \pm 1$, t est bien défini pour toutes les facettes sauf la facette verticale, et égal à $\mp 2k$: ainsi au point P, t est défini égal à $-2k$ sauf pour la facette verticale où $t = 0$ par continuité le long de la surface libre, et il y a discontinuité finie.

Nous déduisons de ces résultats, le théorème :

8.2 – Théorème.

En deux points d'un même domaine où est défini un champ de contraintes entièrement plastique, que l'on peut joindre par des segments de caractéristiques α et β ne franchissant pas de ligne de discontinuité de la contrainte (7) ni la séparatrice $p/k + \cos 2\psi = 0$ et tels que les variations de p le long de ces segments soient monotones et de même sens, les valeurs de t se rangent dans l'ordre des valeurs de $-p$.

8.3 – Remarque pour l'utilisation de ce théorème.

L'utilisation de ce théorème présente certaines particularités dans les cas de champs de contraintes discontinus.

Considérons l'exemple suivant d'un cas de conditions aux limites surabondantes :

soit L_1 un arc de courbe dans le plan xy, et les données aux limites p et ψ sur cette courbe (non caractéristiques), permettant de définir un champ 1 entièrement plastique continu dans le domaine D_1 (limité par les arcs de caractéristiques issus des extrémités de L_1):

Fig. 11

Soit L_2 un autre arc de courbe possédant les mêmes propriétés, D_2 et 2 le domaine et le champ correspondants.

Supposons que D_1 et D_2 ne sont pas disjoints et que dans leur intersection 1 et 2 ne coïncident pas, mais qu'il est possible en introduisant des lignes de discontinuité de contraintes dans D_1 et dans D_2 d'obtenir une solution entièrement plastique dans $D = D_1 \cup D_2$ satisfaisant les conditions aux limites et coïncidant avec les champs 1 et 2 dans certaines parties de D_1 et D_2 (fig. 11).

Il est clair que le théorème énoncé plus haut est applicable entre deux points de D_1 (resp. D_2) pour les valeurs de t données en ces points par le champ 1 (resp. 2).

Par contre pour pouvoir comparer les valeurs de t données pour la solution générale en deux points quelconques de D, il est nécessaire d'étudier le point suivant :

(7) Car dans les calculs ci-dessus p et ψ sont supposés continus.

8.4 – Discontinuité de t au franchissement des lignes de discontinuité de contraintes.

Définissant $[\![\psi]\!]$, par exemple, par la continuité du sens des lignes α, nous avons au franchissement de la ligne de discontinuité : $[\![p]\!] = -2k \sin [\![\psi]\!]$.

D'autre part :

$$[\![t]\!] = t' - t = -\frac{(1 - p^2/k^2)(p'/k + \cos 2\psi') - (1 - p'^2/k^2)(p/k + \cos 2\psi)}{(p'/k + \cos 2\psi')(p/k + \cos 2\psi)}$$

ou encore :

$$[\![t]\!] = -[\![p]\!]\frac{\left(\frac{p}{k} + \frac{\cos 2\psi - \sin [\![\psi]\!]}{1 - \sin(\psi + \psi')}\right)^2 [1 - \sin(\psi + \psi')]}{(p'/k + \cos 2\psi')(p/k + \cos 2\psi)} \qquad (9)$$

Ainsi :

$$[\![t]\!] \text{ a même signe que } -[\![p]\!]\frac{1}{(p'/k + \cos 2\psi')(p/k + \cos 2\psi)} \qquad (10)$$

(expression indépendante du mode de définition de $[\![\psi]\!]$).

8.5 – Vérification de la condition (6) le long de *(L)*.

La méthode consiste, en appliquant les résultats ci-dessus, à trouver en chaque point de *IP* un minorant et un majorant de t eux-mêmes compris entre les bornes + $2k$ et - $2k$.

8.5.1 – Le long de IQ.

Cet arc de *(L)* est situé dans le champ continu formé par le bulbe d'ouverture $(\alpha + \gamma)$ et le champ semi-homogène. Utilisant les résultats du § 8.3, nous considérons ce champ prolongé jusqu'en K (fig. 12).

On voit aisément par application du 1er théorème de Hencky que le long de IQ, p est en tout point supérieur à la valeur de p au point K. Le théorème du § 8.2 est applicable puisqu'on ne franchit pas la séparatrice $(p/k + \cos 2\psi) = 0$, de ce champ continu donc $t_{IQ} < t_K$.

Or en K on a : $p_K = p_h - k - 4k(\alpha + \gamma) = k - 2k(\alpha + \gamma)$

$t_K = p_K - k = -2k + 2k(\alpha + \gamma)$

avec $(\alpha + \gamma) \leqslant \pi/2$ d'où :

$t_{IQ} < t_K \leqslant (\pi - 2)k < 2k$

D'autre part le point Q est situé au-dessous de la caractéristique α passant par Ω (8). Le théorème (§ 8.2) est applicable entre tout point de IQ et Ω (9) :

$$p_\Omega = k > p_{IQ} \Rightarrow t_{IQ} > t_\Omega = -2k$$

(8) Q est situé au-dessous de P (§ 7.3). Donc $u_Q > u_p = u_s$ (fig. 13). Pour $(\alpha + \gamma) \leqslant 1{,}51$ on a $u_s = u_\Omega$ (fig. 7), ce qui démontre l'affirmation ; pour $1{,}51 < (\alpha + \gamma) \leqslant (\pi/2)$, l'affirmation est encore vraie car vérifiée dans le cas du schéma de Bishop $(\alpha + \gamma = \pi/2)$, qui est le plus défavorable.

(9) Car la séparatrice $(p/k + \cos 2\psi) = 0$, passe au-dessus de S (cf. fig. 7).

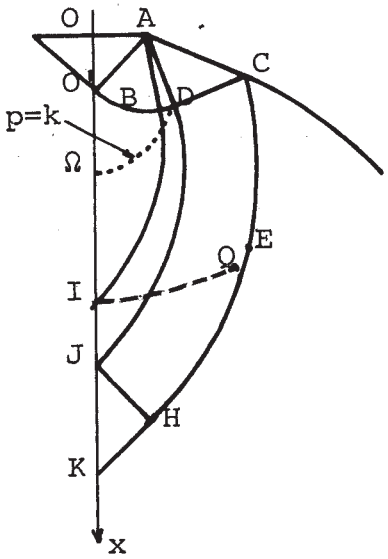


Fig. 12

8.5.2 – Le long de QP.

Les conditions d'application du théorème sont remplies entre tout point de *QP*, et le point *P* considéré comme appartenant à *QP*, c'est-à-dire situé en-deça de la séparatrice :

Nous obtenons ainsi : $-2k \leqslant t_{PQ}$

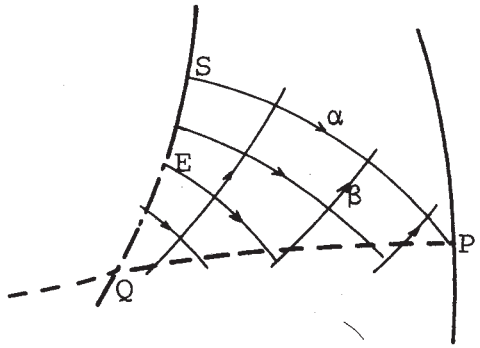


Fig. 13

D'autre part, au franchissement de la ligne de discontinuité en allant vers la surface libre on a $[\![p]\!] > 0$. La séparatrice $(p/k + \cos 2\psi = 0)$ étant située au-dessus de *E*, les deux termes du dénominateur de (10) sont de même signe et donc $[\![t]\!] < 0$.

Considérons alors toutes les caractéristiques α s'appuyant sur *PQ* (fig. 13). *QES* est le segment correspondant sur la frontière du champ semi-homogène : *QE* arc de ligne de discontinuité, *ES* arc de caractéristiques β ([10]). Le long de *QS* dans le champ semi-homogène on a $p > p_k$ dont on déduit $t < t_k < (\pi - 2)k$. Au franchissement de *QS*, *t* a un saut négatif ou nul ; ensuite entre le point de *QS* et le point correspondant de *QP*, *p* croît donc *t* décroît. D'où la majoration :

$$t_{PQ} < (\pi - 2)k$$

(10) Il peut se faire que *S* soit situé au-dessous de *E* $(\alpha + \gamma) > 1{,}51$), alors *QS* est entièrement arc de ligne de discontinuité ; il peut aussi se faire que *Q* soit au-dessus de *E* : *QS* est alors un arc de caractéristique. Ces circonstances ne modifient en rien la démonstration.

Ainsi la condition (6) est vérifiée tout le long de IQ puisque l'on a la majoration.

$$-2k \leqslant t_{IQ} < (\pi - 2)k$$

9 – Conclusion.

Supposant la largeur de la plaque suffisante (pour que le champ de contraintes non nul proposé puisse s'y développer), nous avons mis en évidence une solution complète associée à la solution de Hill, valable pour $5{,}298 \leqslant h/a \leqslant 8{,}713$ ([11]). Nous complétons ainsi le travail de Bishop (1953).

La solution complète donnée est valable quelle que soit la valeur du coefficient de rugosité partielle sous le poinçon. Ainsi dans l'intervalle considéré, quelle que soit la valeur de ce coefficient, et même dans le cas du frottement de Coulomb (1re partie, chapitre II, § 6), $F = 2a\,p_h$ est la charge limite, si la largeur est suffisante.

Cette solution complète a été mise en évidence indépendamment par Szczepinski (1966). La méthode de construction progressive que nous avons adoptée (par exemple la discussion du problème local en A au § 2), prépare les discussions des chapitres IV et V sur la signification des résultats obtenus, sous l'angle de la théorie des charges limites.

III – RECHERCHE D'UNE SOLUTION STATIQUE POUR $1 \leqslant h/a < 5{,}298$.

Dans le chapitre précédent, la méthode utilisée a consisté à essayer de compléter la solution incomplète donnée par Hill. Nous avons obtenu un résultat positif et la charge limite est exactement connue, pour $h/a \geqslant 5{,}298$. Pour $h/a < 5{,}298$, nous disposons de la solution incomplète de Hill qui fournit un majorant de la charge limite, et de minorations statiques banales.

Nous nous proposons d'appliquer une méthode différente de la précédente, construisant d'abord une solution statique à laquelle on tente ensuite d'associer un mécanisme cinématique licite.

1 – Construction d'une solution statique.

La solution statique utilisée est issue dans son principe de celle obtenue en complétant la solution incomplète de Hill. Nous en traçons ici les grandes lignes pour revenir sur certains points au paragraphe suivant.

Considérons (figure 14), le réseau de caractéristiques formé du bulbe plastique $A'ADJD'A'$ d'ouverture δ. sous le poinçon. Nous fixons la valeur des contraintes dans cette zone, par la condition $p = k$ sur AD, d'où sous le poinçon, une pression normale uniforme égale à $p_\delta = 2k\,(1 + \delta)$.

Comme au chapitre précédent nous poursuivons ce réseau de façon entièrement plastique et continue dans le plus grand voisinage possible du point A de façon à obtenir une surface libre ACP.

Nous pouvons déterminer la courbe (L) - comme au chapitre II § 7 - allant de la surface libre de droite à la surface libre de gauche et telle que la contrainte appliquée sur cette ligne soit en tout point verticale. (L) passe par le point I de l'axe Ox tel que la résultante des forces appliquées sur OI soit nulle et y a son point le plus bas. Posons $OI = h_\delta$. Au-dessous de (L) nous considérons le champ de contraintes uniaxial défini par continuité de la contrainte sur (L). Il ne viole en aucun point le critère de plasticité.

Nous obtenons ainsi une solution statique valable $\forall\, h \geqslant h_\delta$. Pour une valeur de h donnée, la meilleure de ces solutions statiques est celle pour laquelle p_δ a la plus grande valeur possible, c'est-à-dire celle qui correspond à δ le plus grand possible.

(11) D'après le résultat du § 7.2, cette valeur est exactement égale à celle au-dessus de laquelle le prolongement de la solution de Prandtl effectué par Bishop est valable.

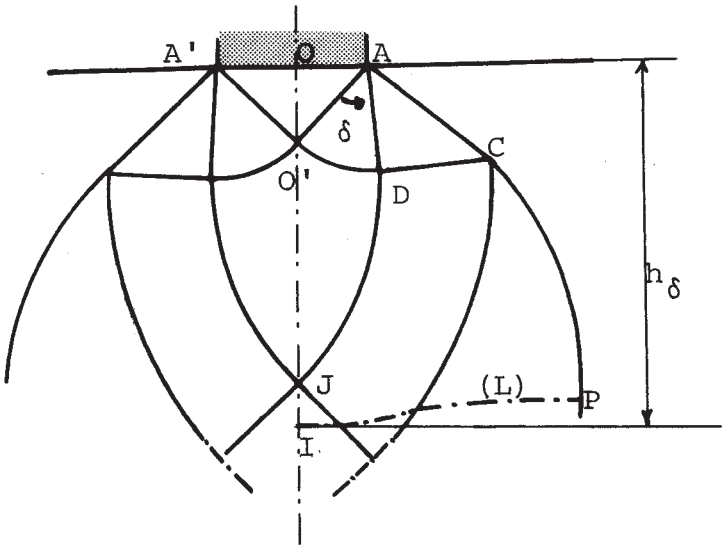


Fig. 14

2 – Etude plus précise de cette solution statique.

Il est nécessaire de préciser certains points de raisonnement du paragraphe précédent.

2.1 – Point I : calcul de OI.

Le point I est défini par la condition que la résultante des contraintes le long de OI soit nulle.

Soit M un point quelconque de Ox. Suivant la position de M par rapport à J, la résultante horizontale R des forces le long de OM est donnée par deux formules différentes :

Si M est au-dessus de J, entre O' et J, il est l'extrémité d'un bulbe d'ouverture α et nous avons :

$$OM = a\,[A_0\ (2\alpha) + I_0\ (2\alpha)] \tag{1}$$

$$R/2ak = \delta\ [A_0\ (2\alpha) + I_0\ (2\alpha)] - 2\alpha\ [I_0\ (2\alpha) + I_1\ (2\alpha)] + A_0\ (2\alpha) \tag{2}$$

Si M est au-dessous de J, dans la partie du champ homogène JHK existant réellement c'est-à-dire située au-dessus de la ligne de discontinuité issue de E, posons $d = \overline{JM}$ nous avons :

$$OM = a\,[A_0\ (2\delta) + I_0\ (2\delta)] + d \tag{3}$$

et

$$R/2ak = \delta\ [A_0\ (2\delta) - I_0\ (2\delta) - 2I_1\ (2\delta)] + A_0\ (2\delta) - \frac{d}{a}\delta \tag{4}$$

Pour $\delta \geqslant 1{,}0302$, le point I est au-dessus de J, déterminé par les formules (1) et (5) :

$$\delta\ [A_0\ (2\alpha) + I_0\ (2\alpha)] - 2\alpha\,[I_0\ (2\alpha) + I_1\ (2\alpha)] + A_0\ (2\alpha) = 0 \tag{5}$$

qui ne sont autres que les formules (1) et (2) du chapitre II : δ est égal à $(\alpha + \gamma)$, $p_\delta = 2k\,(1 + \delta) = p_h = 2k\,[1 + (\alpha + \gamma)]$

Pour $\delta = 1{,}0302$, I est en J.

Pour $\delta \leqslant 1{,}0302$, I est au-dessous de J sous réserve qu'il soit situé au-dessus de la ligne de discontinuité issue de E (ce que nous vérifierons plus bas) ; nous obtenons en annulant R donné par (4) :

$$d/a = A_0\ (2\delta) - I_0\ (2\delta) - 2I_1\ (2\delta) + A_0\ (2\delta)/\delta \tag{6}$$

$$h_\delta/a = 2\,A_0\,(2\delta) - 2\delta\,I_1\,(2\delta) + A_0\,(2\delta)/\delta \qquad (7)$$

d/a varie de 0 pour δ = 1,0302 à 1 pour $\delta = 0$

h/a varie de 5,298 à 2,0.

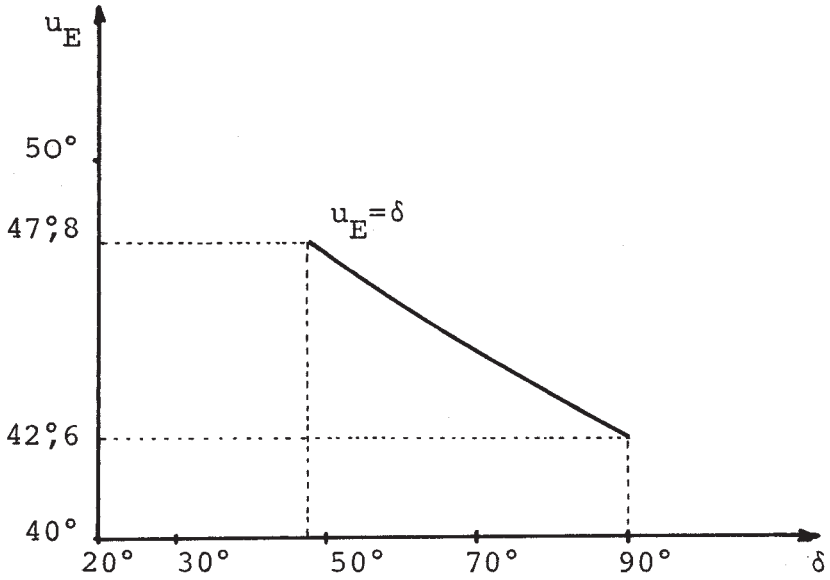


Fig. 15

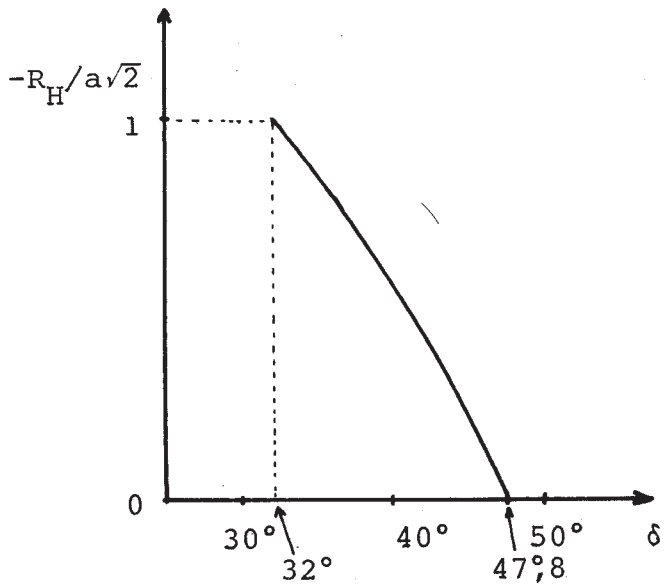


Fig.16

Vérifions que pour $\delta < 1{,}0302$, le point I ainsi obtenu est bien au-dessus de la ligne de discontinuité issue de E.

Pour cela nous avons calculé comme au chapitre précédent la position du point E : d'abord par sa coordonnée angulaire u_E tant que $u_E \leqslant \delta$; puis si $u_E > \delta$ par son abscisse sur HK à partir du point H. La courbe

de u_E en fonction de δ (fig. 15) montre que u_E est une fonction décroissante de δ. On a $u_E = \delta$ pour $\delta = 47°,8$; Au-dessous de cette valeur pour δ, le rayon de courbure R_H est négatif:
$R_H = -a\sqrt{2}[3 - I_0(2\delta) - I_1(2\delta)]$,
E existe et se trouve sur HK tant que $-a\sqrt{2} \leqslant R_H \leqslant 0$ c'est-à-dire pour $32° \leqslant \delta \leqslant 47°,8$ (approx.). Au-dessous de $\delta = 32°$ le champ est continu jusqu'en K (fig. 16). On voit alors que pour $\delta \leqslant 47°,8$ on est certain que I est au-dessus de E puisqu'il est situé au-dessus de K (cas $d/a < 1$); pour $\delta > 47°,8$, la position la plus défavorable pour I est obtenue pour $\delta = 90°$: c'est le prolongement de Bishop pour lequel la propriété est encore vérifiée. I se trouve donc toujours au-dessus de la ligne de discontinuité.

2.2 – Autres vérifications. Particularités.

Les autres vérifications sur la forme de la courbe (L) sont identiques dans ce cas à celles faites au chapitre II. La seule différence est que pour $\delta < 1,0302$, (L) est rectiligne horizontale en I et dans sa traversée du champ homogène ; pour l'encadrement de t sur (L) il n'y a aucun changement : il se fait de la même manière par application du théorème du § 11.8.

3 – Résultats

3.1 – $\delta \geqslant 1,0302$.

La meilleure solution statique est obtenue lorsque I est à la profondeur h (h épaisseur de la plaque). Résolvant alors : $h/a = A_0(2\alpha) + I_0(2\alpha)$ (8) on obtient $\alpha \geqslant 1,0302$ pour $h/a \geqslant 5,298$, puis

$$2k\,\frac{I_0(2\alpha) + 2\alpha\,[I_0(2\alpha) + I_1(2\alpha)]}{A_0(2\alpha) + I_0(2\alpha)} = 2k\,(1+\delta) = p_\delta = p_h \qquad (9)$$

d'où

$$\delta \geqslant \alpha \geqslant 1,0302 \text{ et } p_\delta.$$

Nous retrouvons le cas déjà traité au chapitre précédent et ainsi que nous l'avons vu, un mode de déformation licite peut-être associé à cette solution statique, qui n'est autre que celui de la solution incomplète de Hill.

3.2 – $\delta \leqslant 1,0302$.

L'angle δ correspondant à la meilleure solution statique est obtenu lorsque I est à la profondeur h :

d'où pour $2 \leqslant h/a \leqslant 5,298$:

$$h/a = 2A_0(2\delta) - 2\delta I_1(2\delta) + A_0(2\delta)/\delta \qquad (10)$$

d'où $p_\delta = 2k\,(1+\delta)$

Pour $1 \leqslant h/a < 2$, le champ obtenu pour $\delta = 0$ qui est le champ homogène uniaxial vertical de compression est encore valable et $p_\delta = 2k$ est minorant de la charge limite.

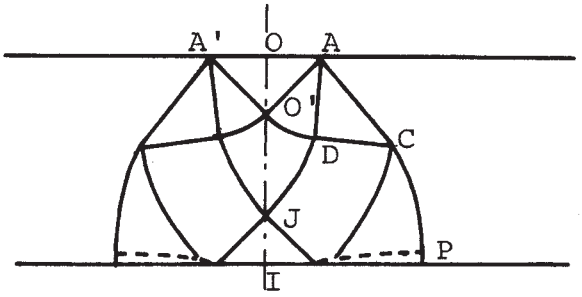


Fig. 17

La figure 17 représente pour $h/a \leqslant 5,298$, le réseau de la solution statique du type ci-dessus, donnant à p_δ la valeur maximale.

La solution statique obtenue est valable quelle que soit la valeur de m, coefficient de rugosité partielle sous le poinçon, puisqu'elle correspond à des contraintes tangentielles nulles.

Ainsi pour $1 \leqslant h/a \leqslant 5{,}298$ nous disposons d'une solution statique, mais il n'est pas possible de lui associer un mécanisme cinématique licite ; p_δ est un minorant de la charge limite.

Sur la figure 18, nous avons tracé les courbes représentatives de $p_h/2k$ majorant de la charge limite et $p_\delta/2k$ minorant, en fonction de h/a. (Voir aussi les tableaux I et II).

Ces deux courbes sont confondues pour $\delta \geqslant 1{,}0302$, comme il résulte du § 3.1 ($h/a \geqslant 5{,}298$).

Montrons qu'elles sont tangentes en $h/a = 5{,}298$ ($\delta = 1{,}0302$) : la courbe $(p_h/2k, h/a)$ est definie pour $1 \leqslant h/a \leqslant 8{,}713$ par les expressions paramétriques (8) et (9) (cf. chap. II) en un point (x, y) de cette courbe on a :

$$dy/dx = (1 + 2\alpha - y)/x \; ;$$

La courbe $(p_\delta/2k, h/a)$ est définie pour $2 \leqslant h/a \leqslant 5{,}298$ par les expressions paramétriques (10) et (11) et en un point de cette courbe on a :

$$dy/dx = (y - 1)/\left\{2[I_0\ (2\delta) + A_0\ (2\delta)] - x\right\}$$

au point d'intersection des deux courbes on a $\delta = \alpha$ et $dy/dx = (y - 1)/x$ pour les deux courbes.

Les courbes sont très voisines pour $4{,}00 \leqslant h/a \leqslant 5{,}298$. L'écart maximal est atteint pour $h/a = 2$ et il est de 20 %.

Cette solution statique a été donnée indépendamment par Szczepinski (1966).

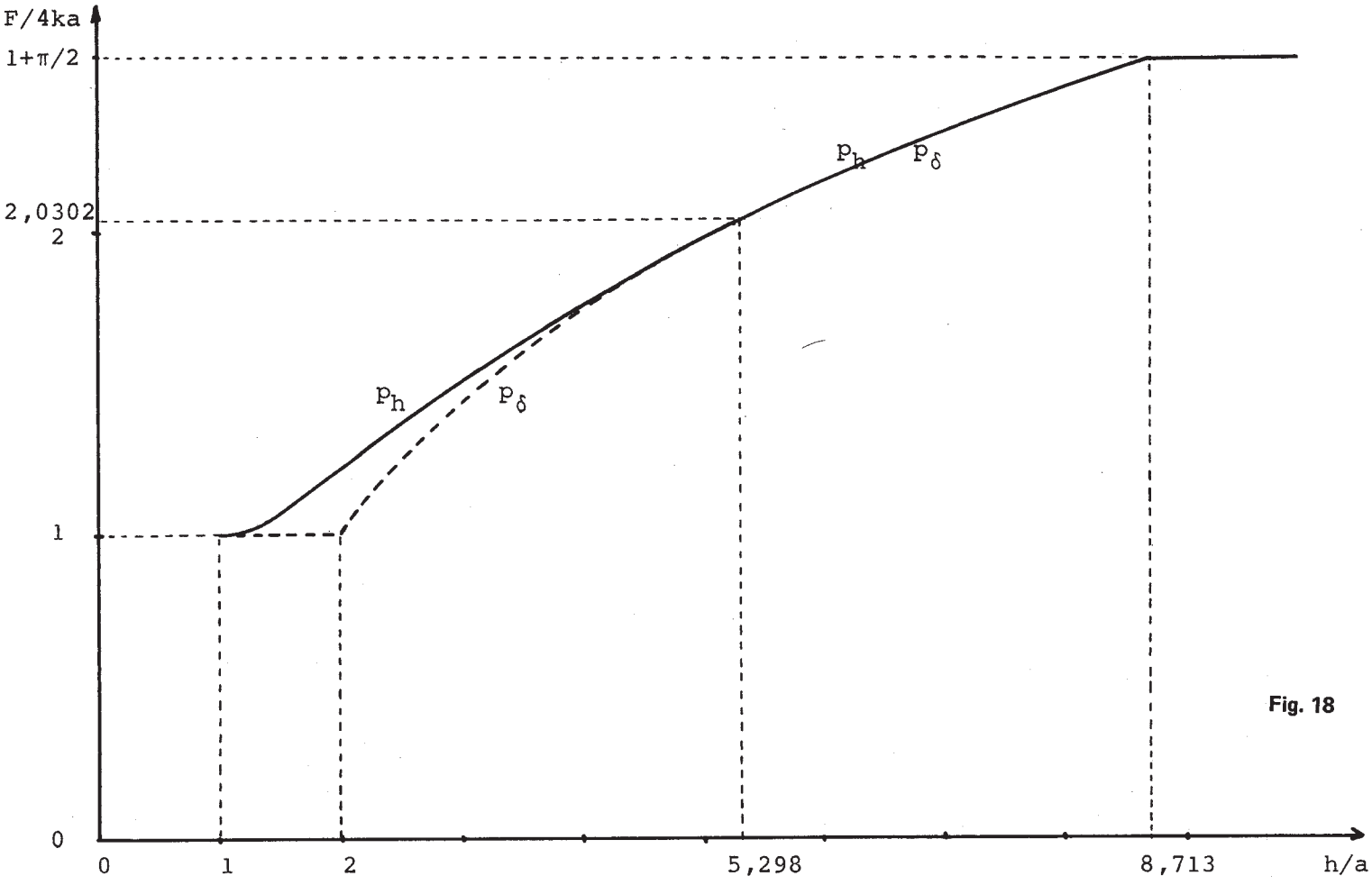


Fig. 18

IV – PROBLEMES VOISINS, SIGNIFICATION DE LA BORNE $h/a = 5{,}298$

1 – La borne $h/a = 5{,}298$

Dans les chapitres II et III qui précèdent, nous avons trouvé la borne $h/a = 5{,}298$ au-dessus de laquelle nous avons complété la solution de Hill, et au-dessous de laquelle nous avons mis en évidence une solution statique permettant avec la solution incomplète de Hill d'encadrer la charge limite pour le problème du poinçonnement d'une plaque. La signification de cette borne doit être précisée car son existence apparaît à ce stade comme directement liée au mode de prolongement choisi et aux résultats que nous avons pu obtenir. Ceux-ci dépassent d'ailleurs le cadre du problème traité et permettent, comme nous allons le voir, la résolution de problèmes voisins.

2 – Quelques problèmes voisins.

Les résultats que nous avons obtenus permettent d'apporter des précisions sur les solutions des problèmes où interviennent des champs de Prandtl. Nous en citerons quelques-uns.

2.1 – Butée d'une paroi lisse sur un talus. ([12])

Ce problème est celui de la butée d'une paroi lisse sur un talus infini non chargé (figure 19), la paroi $A'A$ est animée d'un mouvement de rotation autour d'un point I situé au-dessous de la normale en A' à $A'A$, à distance finie ou infinie.

La solution incomplète classique est composée d'un champ de Prandtl avec écoulement vers la surface libre supérieure et fournit comme majorant de la charge limite, la pression uniforme sous le poinçon $p_\delta = 2\,k\,(1 + \delta)$.

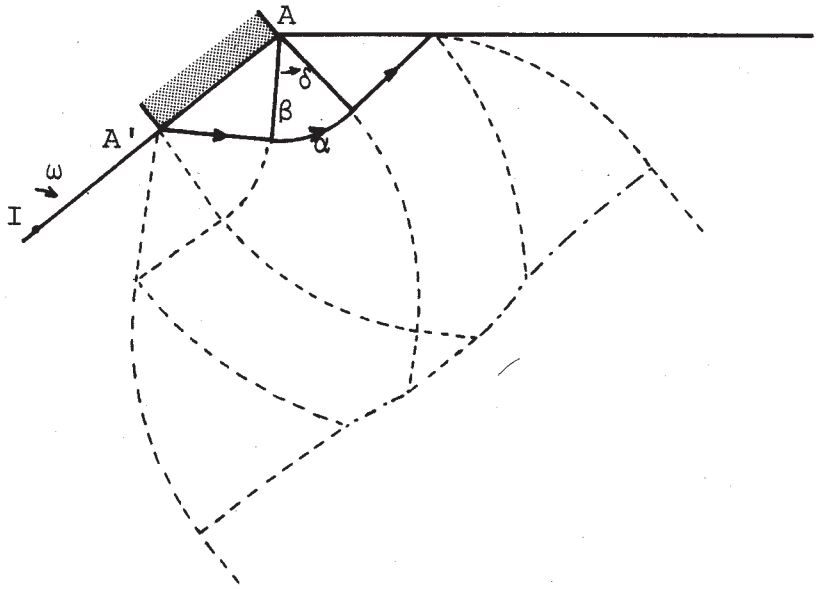


Fig. 19

Il est évident que la solution statique du chapitre III (§ 1 et 2) peut être associée à cette solution incomplète (le tracé en pointillé sur la fig. 19). *La solution est donc complète et* $p_\delta = 2\,k\,(1 + \delta)$ *est la charge limite.*

(12) Pour ce problème, comme pour celui du § 2.2, nous pourrions aussi utiliser le prolongement des solutions incomplètes de Prandtl $\forall\,\delta$, par la méthode de Shield donné à l'annexe 3.

2.2 – Poinçonnement d'un coin trapézoïdal infini.

Pour le problème du poinçonnement d'un coin trapézoïdal infini par un poinçon rigide sous une force verticale axiale, une solution statique avec discontinuité de contraintes a été proposée par Winzer et Carrier (1948) ([13]). Elle fournit comme minorant de la charge limite la pression uniforme sous la paroi $p^0 = 2k\,(1 + \sin\delta)$ La solution incomplète classique (fig. 20) est composée d'un champ de Prandtl avec écoulement vers les deux faces du coin ; le majorant qu'elle fournit est $p_\delta = 2\,k\,(1 + \delta)$.

La solution statique du chapitre III (§ 1 et 2) peut être associée à cette solution incomplète. *La solution est donc complète et* $p_\delta = 2k\,(1 + \delta)$ *est la charge limite.*

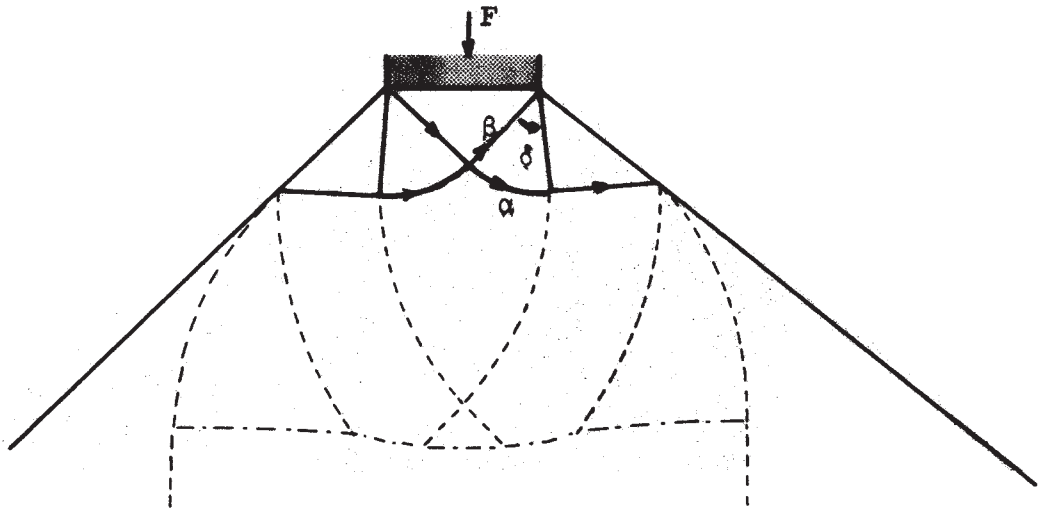


Fig. 20

2.3 – Traction des éprouvettes entaillées en V.

Le problème est analogue au précédent. Le champ de Prandtl fournit une solution incomplète (c'est celle de la figure 20 où les caractéristiques changent de nom). Cette solution peut être complétée comme au § 2.2 Ewing et Hill (1967) ont utilisé la solution ainsi obtenue mais ces auteurs n'ont fait qu'une vérification numérique discrète (pour $\delta = 60°$) de ce que le critère n'est pas violé au-dessous de *(L)*. ([14])

2.4 – Poinçonnement d'un coin trapézoïdal de hauteur finie.

L'étude du poinçonnement d'un coin trapézoïdal de hauteur h finie, dans les mêmes conditions que ci-dessus, en admettant des tractions sous la base du coin (poinçonnement symétrique d'un bloc quasi hexagonal par exemple, figure 21), est également intéressante.
C'est d'ailleurs la généralisation du problème étudié aux chapitres II et III au cas où la surface libre, plane, n'est pas horizontale. L'application des résultats des chapitres II et III est immédiate.

---

(13) Une mauvaise interprétation a conduit ces auteurs à considérer le résultat qu'ils avaient obtenu comme un majorant de la force nécessaire pour produire l'écoulement plastique et à le préférer à la solution de Prandtl.

(14) Voir aussi l'utilisation faite par Sowerby, Johnson et Kamanta (1968) pour les problèmes de filage et d'étirage.

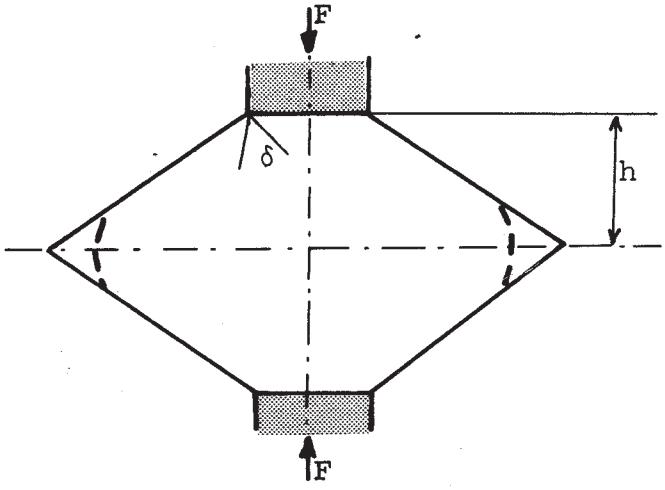


Fig. 21

2.4.1 – Si $h/a \geqslant 5{,}298$

Pour une valeur de h/a supérieure à 5,298, définissons l'angle δ_0 par la relation : $p_h\ (h/a) = 2k\ (1 + \delta_0)$, qui explicitée s'écrit :

$$\delta_0 = \left\{ I_0\ (2u) + 2u\ [I_0\ (2u) + I_1\ (2u)] \right\} \ /\ (h/a) - 1$$

où u est l'unique racine de : $A_0\ (2u) + I_0\ (2u) = h/a$. Cette correspondance est représentée à la figure 22.

Alors :

Si $\delta < \delta_0$ la charge limite est $F/2a = p_\delta = 2k\ (1 + \delta)$: la solution incomplète avec écoulement de Prandtl sur les côtés jusqu'à la surface libre étant complétée du point de vue statique comme ci-dessus.

Si $\delta = \delta_0$ la charge limite est $p_\delta = 2k\ (1 + \delta_0) = p_h\ (h/a)$, plusieurs modes de déformation sont possibles associés à la même solution statique : écoulement de Prandtl jusqu'à la surface libre, écoulement avec bulbe plastique central et blocs rigides glissant sur les côtés, etc.

Si $\delta > \delta_0$ la charge limite est $p = p_h\ (h/a)$. La solution complète utilisée est celle avec bulbe plastique étudiée au chapitre II.

2.4.2 – Si $1 \leqslant h/a \leqslant 5{,}298$.

Pour une valeur de h/a comprise entre 1 et 5,298, définissons l'angle δ_0 par la relation $p_\delta\ (h/a) = 2k\ (1 + \delta_0)$ (15), qui explicitée s'écrit :
δ_0 unique solution de : $2A_0\ (2\delta_0) \quad 2I_1\ (2\delta_0) + A_0\ (2\delta_0)/\delta_0 = h/a$.
Cette correspondance est représentée à la fig. 22.

Alors :

Si $\delta < \delta_0$, la charge limite est $p = 2k\ (1 + \delta)$, comme au § 2.4.1.

Si $\delta = \delta_0$, la charge limite est $p = 2k\ (1 + \delta_0) = p_\delta\ (h/a)$ un seul mode d'écoulement peut être associé à la solution statique correspondante, c'est l'écoulement de Prandtl jusqu'à la surface libre.

Si $\delta > \delta_0$, $p_\delta\ (h/a)$ est minorant de la charge limite (16) (solution statique) et $p_h\ (h/a)$, et $2k\ (1 + \delta)$ sont des majorants (solutions cinématiques). Définissant δ_1 par $p_h\ (h/a) = 2k\ (1 + \delta_1)$ on voit que si $\delta_0 < \delta < \delta_1$ $p = 2k\ (1 + \delta)$ est le meilleur majorant et si $\delta > \delta_1$ $p_h\ (h/a)$ est le meilleur majorant.

(15) $p_\delta\ (h/a)$ représente la valeur de p_δ correspondant à h/a (fig. 18).

(16) Pour une valeur de h fixée, cette solution statique fournit toujours un meilleur minorant que celle de Winzer et Carrier (1948).

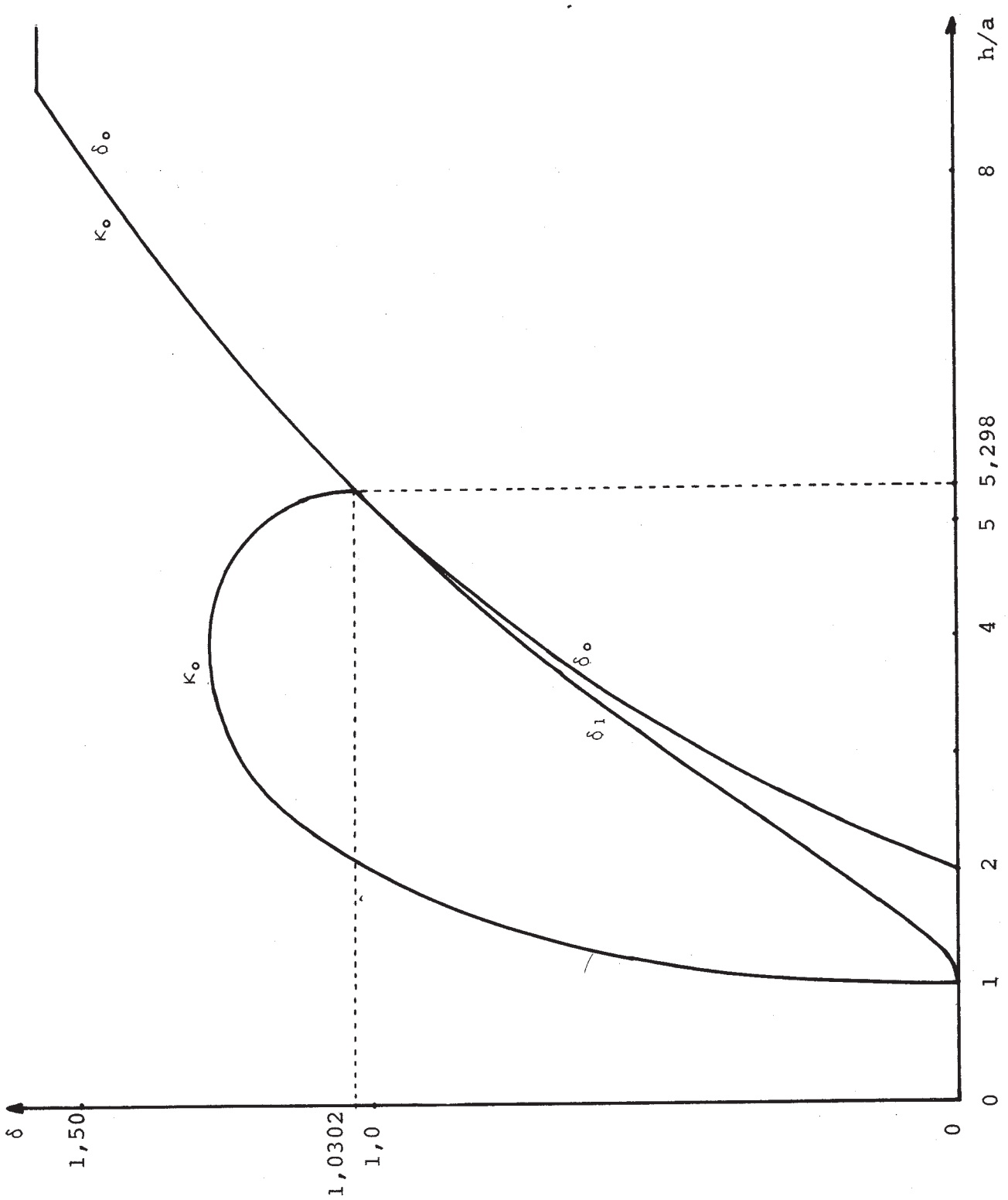


Fig. 22

3 – La borne $h/a = 5{,}298$ et le prolongement de la solution incomplète de Hill.

Pour le même problème qu'au § 2.4 ci-dessus, nous nous intéressons aux conditions de possibilité du prolongement de la solution incomplète de Hill avec bulbe plastique.

Considérons pour une valeur de h/a ($\geqslant 1$) donnée, la solution incomplète de Hill correspondante (fig. 23). Soit δ le demi angle au sommet du coin.

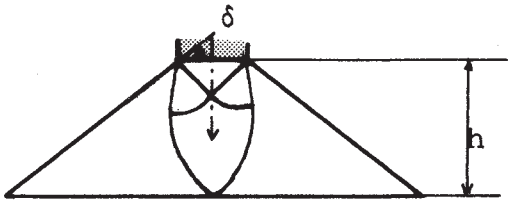


Fig. 23

De l'étude du problème local au voisinage du point A faite au chapitre II, ainsi que des conclusions finales de ce chapitre on tire les résultats suivants :

Pour $h/a \geqslant 5{,}298$, il est nécessaire (II § 2) et suffisant (II § 9) pour que la solution incomplètes avec bulbe puisse être complétée que $\delta \geqslant \kappa_0 \equiv \delta_0$.

Pour $h/a < 5{,}298$, il est nécessaire (II § 2) pour que cette même solution puisse être complétée que $\delta \geqslant \kappa_0$

κ_0 défini par la formule : $\kappa_0 = u + v$

ou u est défini par : $h/a = A_0\,(2\,u) + I_0\,(2\,u)$

et v par : $\cos v = \left\{ I_0\,(2\,u) + 2\,u\,[I_0\,(2\,u) + I_1\,(2\,u)\,] \right\} / (h/a) - u$

Cette correspondance h/a, κ_0 est représentée sur la fig. 22.

Si alors, partant de h/a infini, on fait décroître h/a continûment, l'angle κ_0 nécessaire ($\equiv \delta_0$ suffisant) décroît continûment et, lorsque h/a franchit la valeur 5,298, l'angle κ_0 minimal nécessaire croît brutalement (dérivée discontinue, infinie à gauche).

Relativement à la solution incomplète à " bulbe ", ce phénomène est une propriété intrinsèque de la borne $h/a = 5{,}298$.

Si on supposait que cette solution est prolongeable pour $h/a < 5{,}298$, la valeur de δ minimale suffisante pour $h/a < 5{,}298$ serait représentée par une courbe majorante de la courbe κ_0 tracée, continue en $h/a = 5{,}298$ avec la courbe $\kappa_0 \equiv \delta_0$ pour $h/a \geqslant 5{,}298$. Le même phénomène se reproduirait donc. Il serait tentant, mais osé, de conclure de l'allure peu " physique " de ce phénomène que le prolongement n'est donc certainement pas possible pour $h/a < 5{,}298$, s'agissant du matériau rigide-plastique de telles considérations sont hasardeuses.

Il apparaît ainsi du moins que la valeur $h/a = 5{,}298$ a certainement une signification réelle au point de vue du prolongement de la solution incomplète à bulbe. Il n'est alors pas déraisonnable de penser que pour $h/a < 5{,}298$ le prolongement n'est pas possible et même, allant plus loin comme Szczepinski (1966) ([17]), d'imaginer que dans le problème initial de la plaque, la valeur exacte de la charge limite pour $1 < h/a < 5{,}298$ est strictement intérieure aux deux courbes p_h et p_δ. En toute logique, l'influence de m sur la charge limite ne pouvant d'aucune manière être écartée a priori, c'est un faisceau de courbes paramétré en m ($0 \leqslant m \leqslant 1$) que nous devons imaginer, tangentes à l'horizontale pour $h/a = 1$ et à $p_\delta\,(h/a)$ et $p_h\,(h/a)$ pour $h/a = 5{,}298$.

(17) Ces propriétés ne sont pas équivalentes.

V – INFLUENCE DE LA LARGEUR DE LA PLAQUE

Dans les chapitres II et III où nous avons étudié le poinçonnement d'une plaque, c'est le paramètre sans dimension h/a caractéristique de la hauteur de la plaque qui joue le rôle principal dans l'étude de la charge limite, et il n'est fait mention du paramètre de largeur L/a qu'occasionnellement. Nous avons toujours supposé implicitement la largeur L suffisamment grande pour ne pas avoir d'influence.

Nous étudions maintenant l'incidence de la valeur de L/a sur la validité des résultats que nous avons trouvés. Nous plaçant toujours du point de vue de la théorie des charges limites, nous allons tenter :

pour $h/a \geqslant 5{,}298$, de déterminer la valeur critique L_{cr}, au-dessus de laquelle la largeur n'a plus d'influence sur la valeur de la charge limite, celle-ci étant égale à p_h ;

pour $1 \leqslant h/a < 5{,}298$, où nous ne connaissons pas la valeur de la charge limite, de préciser par exemple la valeur minimale de la largeur pour que la charge limite soit au moins égale à $2ap_\delta$ (problème de force portante).

Ce type de problème a été étudié par Hill (1950 b) pour les mesures de dureté, par Ewing et Hill (1967), Ewing (1968) pour les éprouvettes de traction entaillées.

1 – $h/a \geqslant 5{,}298$

1.1 – Majorant de la largeur critique.

La solution complète que nous avons mise en évidence au chapitre II est valable si la largeur L de la plaque permet son développement, c'est-à-dire $L \geqslant y_p$, distance de P (fig. 10) à l'axe Ox. Ainsi y_p est un majorant de L_{cr}.

Il est à remarquer que c'est la partie " statique " de la solution complète qui impose à L d'être au minimum égale à y_p.

Ewing (1968) a donné l'expression analytique y_p. Avec les notations du chapitre II c'est :

$$y_p = a\,[\,2 \exp(\alpha + \gamma) - 1\,] \quad (^{18})$$

Le majorant de L_{cr} ainsi obtenu est représenté à la figure 24. Il est valable quel que soit m. (Notons que $L/a < h/a$. Connaissant en outre la forme des surfaces libres dans les prolongements, il est possible de déterminer la largeur $2a$ du poinçon pour qu'un essai sur cylindre circulaire du diamètre donné soit interprétable.)

1.2 – Minorants de la largeur critique.

Appliquant les théorèmes limites, c'est au moyen de solutions cinématiques que nous allons mettre en évidence des minorants de L_{cr}.

En effet, si nous disposons pour chaque valeur de h/a d'une solution cinématique fournissant un majorant de la charge limite dont la valeur est une fonction croissante de L/a, nous pouvons déterminer pour chaque valeur de h/a, une largeur L au-dessous de laquelle on peut affirmer que telle valeur de la charge ne peut être supportée par le solide. En particulier pour la charge $F = 2\,ap_h$, d'où un minorant de L_{cr}.

1.2.1 – $h/a \geqslant 8{,}713$.

La valeur de la charge pour laquelle on étudie le problème est celle de Prandtl $F = 2a\,(\pi + 2)k$.

(18) En toute rigueur, cette formule n'est valable que pour $(\alpha + \gamma) \leqslant 1{,}51$, c'est-à-dire lorsque la caractéristique α aboutissant en P ne franchit pas de ligne de discontinuité. Ewing fait toutefois remarquer que la correction à apporter à cette formule pour tenir compte de la discontinuité est très faible.

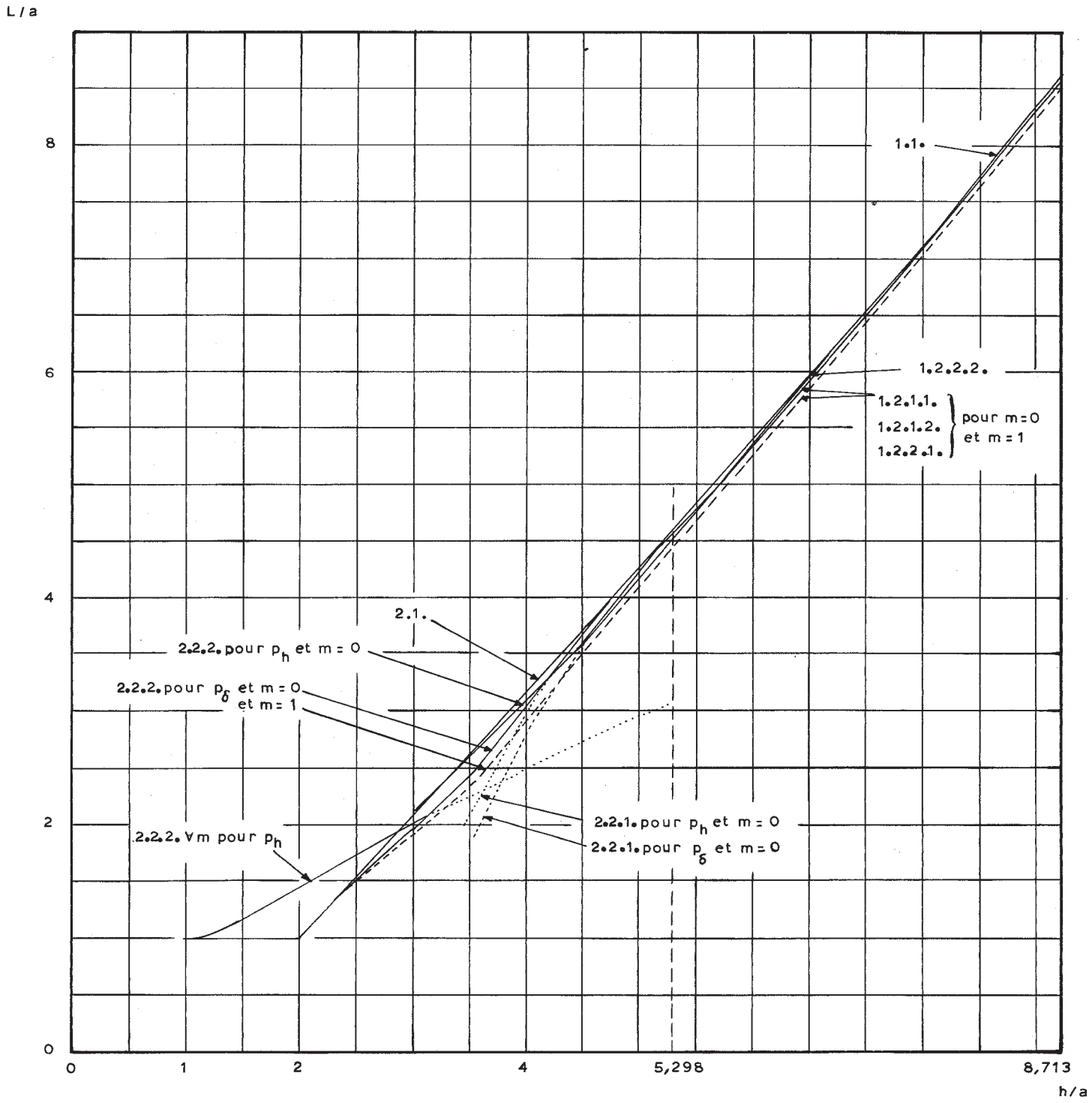


Fig. 24

Les numéros renvoient aux paragraphes du chapitre V où sont présentées les différentes courbes. Pour ne pas trop encombrer la figure, nous n'avons tracé qu'une des courbes correspondant à $m = 1$.

1.2.1.1 – Cas du poinçon lisse ($m = 0$).

C'est le problème qui a été étudié par Hill (1950 b), qui a fourni une solution incomplète possédant la propriété indiquée plus haut. Les calculs précis d'Ewing et Hill (1967) donnent par cette méthode le minorant $L/a = 8.5927$ ([19]).

1.2.1.2 – Poinçon rugueux ($0 < m \leqslant 1$).

La solution de HIll n'est plus une solution incomplète car elle associe une vitesse de glissement non nulle à des cissions nulles sous le poinçon. Il est quand même possible de l'utiliser pour calculer un minorant de L_{cr} pour $m \neq 0$, par la méthode que nous allons indiquer, appliquant directement les théorèmes sur les solutions cinématiques.

Le principe est le suivant :

Cette solution de Hill fournit u minorant L_0^0 de L_{cr} si $m = 0$; si $m \neq 0$, la puissance dissipée totale est augmentée du terme dû au frottement sous le poinçon, on obtiendra donc un minorant de L_{cr}, soit L_m^0, en compensant l'augmentation de puissance dissipée totale due au frottement par une diminution égale due à une diminution $-\Delta L_m^0$ de la largeur de la plaque : $L_m^0 = L_0^0 - \Delta L_m^0$.

L'application pratique de cette méthode nécessite quelques précisions. La figure 25 représente le schéma d'écoulement et la figure 26 l'hodographe. Le mécanisme de déformation est le suivant : le bloc rigide *FEIJLP* glisse le long de l'arc de cercle *IJ* de centre Ω avec la vitesse de rotation ω. Il y a glissement le long du segment rectiligne *JK* avec la vitesse de glissement ωr et cisaillement simple dans le triangle *JKL*. L'hodographe se construit à partir des vitesses connues le long de *GHI* et *EI* (et symétriques) (la figure g_2ie est semblable à *JIE*), et les vitesses sont connues dans *BDEIHG* (et symétrique) et sont toutes proportionnelles à ω ; on vérifie facilement que la puissance dissipée est positive dans ce domaine. Au-dessus des lignes de glissement *BDF* et symétrique, *U* étant fixée et ω convenablement choisi (notion que nous précisons par la suite), le champ de vitesses dépend d'une fonction arbitraire $v(y)$, vitesse de glissement le long de *A'A*. Des conditions sont imposées à $v(y)$ par le caractère non négatif de la puissance dissipée :

(1) dans $ADEE_0$ (et symétrique) ce qui entraîne : v fonction croissante de y ;

(2) dans E_0EF (et symétrique) ce qui entraîne : $v'(y) \geqslant \omega$ pour $y \in A'A'_0$ ou A_0A ;

le long de la ligne de discontinuité de vitesse (caractéristique α) *A'BDEF*

(3) $U\sqrt{2}/2 + v(-a)\sqrt{2}/2 \geqslant u_B\sqrt{2}/2$

et AB'D'E'F'

(4) $U\sqrt{2}/2 - v(a)\sqrt{2}/2 \geqslant u_B\sqrt{2}/2$

où u_B est la vitesse verticale du point *B* au-dessous des deux lignes de discontinuité, donnée sur l'hodographe par g_1b_3.

Il n'y a pas de conditions supplémentaires dues à *A'AB*.

Nous obtenons ainsi une condition de possibilité portant sur ω :

$$\int_{A_0A}^{A'A'_0} \omega\, dy \leqslant 2\,[U - u_B] \tag{5}$$

que nous pouvons satisfaire pour ω positif suffisamment petit car u_B est proportionnelle à ω et positive. $v(y)$ est alors arbitraire sous les conditions (1), (2), (3) et (4), sans que la puissance dissipée dans tout le solide varie.

(19) Ici, comme dans les paragraphes qui suivent, il est nécessaire de vérifier que la hauteur h du bloc permet bien à la solution cinématique de se développer. Cette condition sera toujours remplie dans les cas que nous rencontrerons et nous n'en parlons plus.

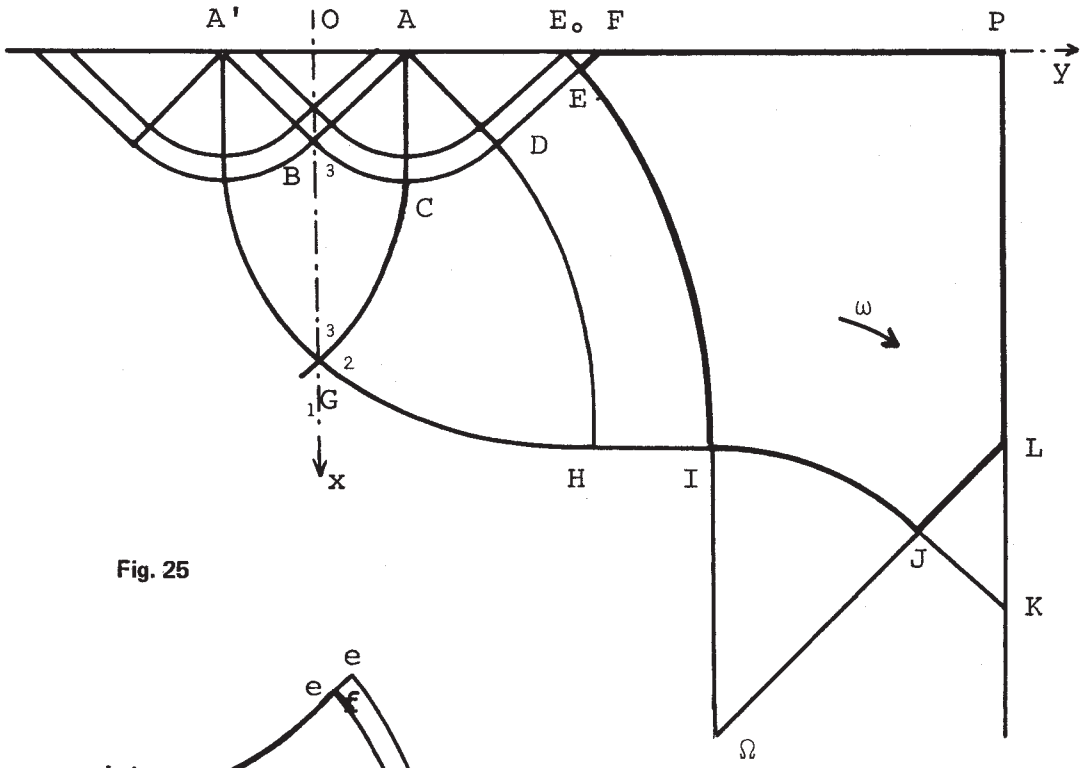


Fig. 25

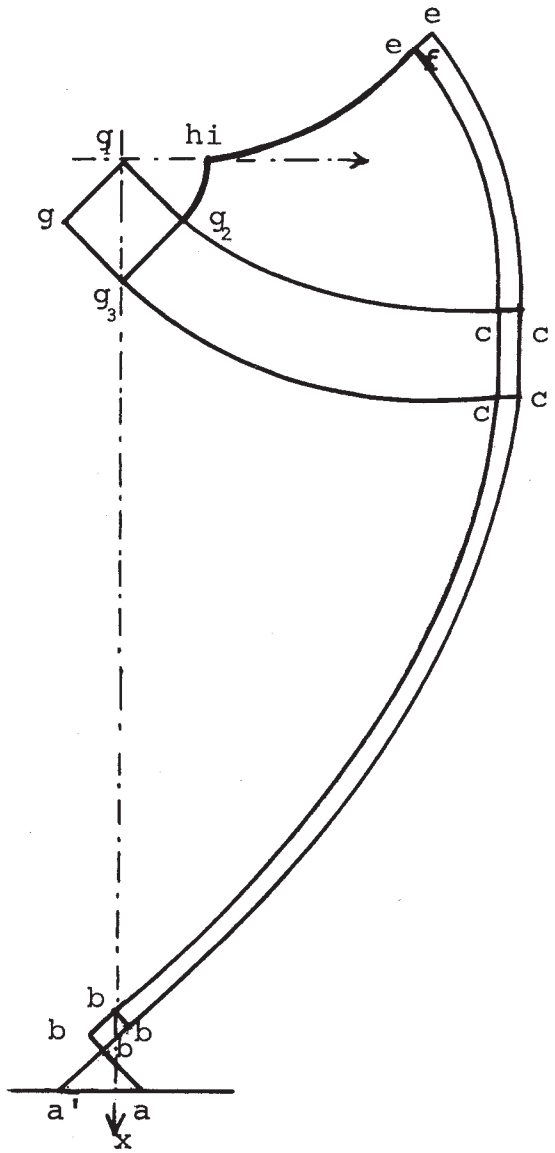


Fig. 26

Pour la recherche du minorant de L_{cr}, il est nécessaire, ω étant fixé vérifiant (5), de choisir $v(y)$ au mieux. Pour obtenir le meilleur minorant, il est nécessaire que la puissance dissipée due au frottement soit minimale afin que ΔL_m^0 soit minimal, cette puissance dissipée vaut :

$$mk \int_{-a}^{a} |v(y)|\, dy \tag{6}$$

et nous voyons que compte tenu de (1), (2), (3) et (4), $v(y)$ optimum correspond au diagramme de la figure 27.

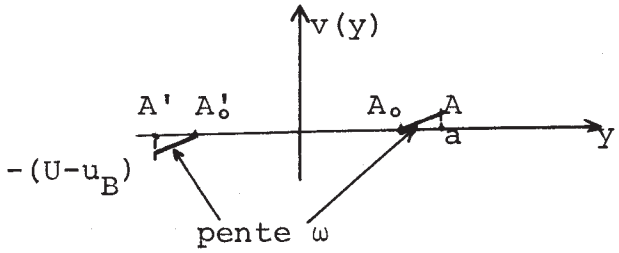


Fig. 27

(6) devient :

$$mk \int_{-a}^{+a} |v(y)|\, dy = mk\, \omega \times \text{Inf} \left\{ \overline{A_0A^2}, a^2 \right\}$$

et ΔL_m^0 est alors défini par :

$$m \times \text{Inf} \left\{ \overline{A_oA^2}, a^2 \right\} = 2 \left\{ \Delta L_m^0 \sqrt{2}\, \overline{\Omega I} + [\overline{JK}^2/2 - (\overline{JK}\sqrt{2}/2 - \Delta L_m^0)^2] \right\} \tag{7}$$

avec $\Delta L_m^0 \leqslant \overline{JK}\ \sqrt{2}/2$

On vérifie a posteriori qu'il existe une racine satisfaisant cette inéquation.

Utilisant pour $\overline{\Omega I}$, $\overline{JK}$, $\overline{A_0A}$, les valeurs numériques de Ewing et Hill (1967) nous obtenons :

$$(\Delta L_m^0/a)^2 - (\Delta L_m^0/a) \times 9{,}3638 + 0{,}5\ m = 0$$

ce qui donne une variation sensiblement linéaire de L_m^0 en fonction de m

entre $L_0^0 = 8{,}5927\ a$ pour $m = 0$
$L_1^0 = 8{,}5659\ a$ pour $m = 1$

1.2.2 – $5{,}298 \leqslant h/a \leqslant 8{,}713$.

Dans cet intervalle, nous allons donner deux méthodes de calcul d'un minorant de L_{cr} qui se relaient pour fournir le meilleur résultat.

1.2.2.1 – Première méthode.

Il n'est pas possible, même dans le cas $m = 0$, de contruire une solution incomplète semblable à celle de Hill (1950 b) citée plus haut, mais nous allons dans un ordre d'idées très voisin construire des solutions cinématiques ayant les propriétés indiquées au § 1.2.

Considérons le schéma d'écoulement de la figure 28 ($1{,}0302 \leqslant \delta \leqslant \pi/2$). C'est celui d'une solution incomplète de Hill (1950 b) pour la traction d'une éprouvette à entaille en V, la droite AE_0 étant la surface de l'entaille, que nous avons dû compléter, pour qu'il soit valable pour le problème de la plaque, avec la déformation du triangle AE_0E_1. Les valeurs des paramètres $\overline{HI}$, $\overline{\Omega I}$, $\overline{JK}$, sont celles correspondant à la solution incomplète pour le barreau entaillé (entaille d'angle 2ϵ). Le bloc E_1E_0EIJLP est rigide et tourne autour du point Ω, glissant le long de IJ. Il y a continuité de la vitesse le long de IEE_1. L'hodographe peut être construit (figure 29) à partir des vitesses connues le long de GHI et IEE_1, et les vitesses sont connues en tous les points. Nous déduisons en particulier que le long de $A'A$ sous le poinçon, la vitesse de glissement est $v(y) = \omega y$.

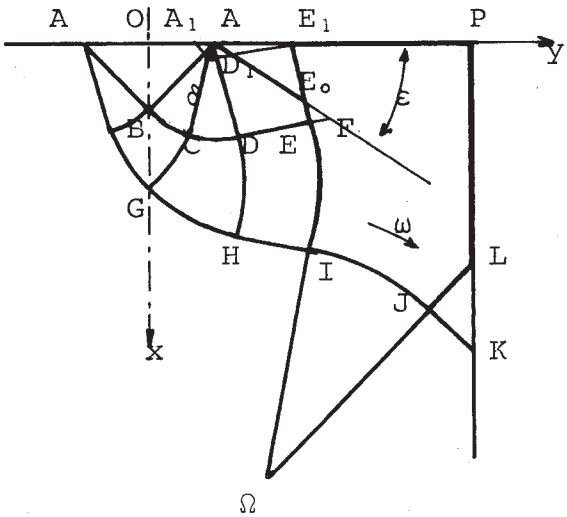


Fig. 28

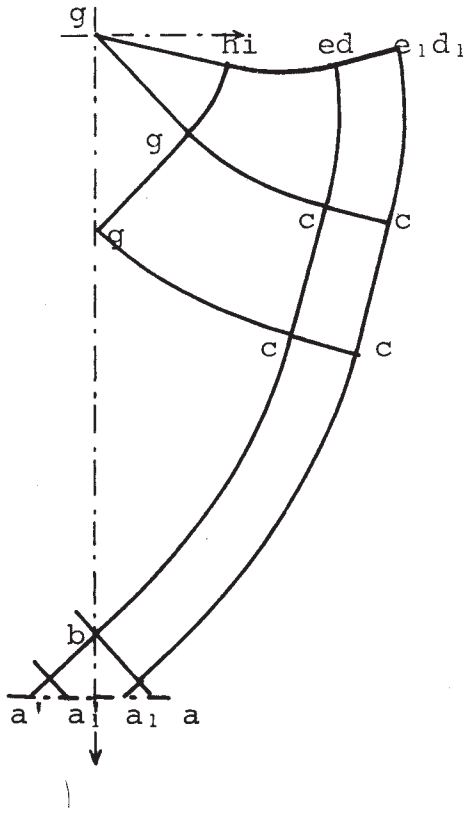


Fig. 29

La puissance dissipée totale est égale à celle dissipée dans les zones déformées de la solution incomplète de Hill soit :

$$2aU \times 2k\,(1+\delta) = 2aUp_h$$

augmentée de celle dissipée dans AE_0E_1 (et symétrique) soit :

$$2\omega k \times \text{Aire}\,(AE_0E_1) = \omega k\,\overline{DE}^2\sqrt{2}\,\sin\epsilon\,/\,\cos(\epsilon - \pi/4)$$

et de celle dissipée par frottement sous le poinçon soit $mk\omega a^2$.

Pour obtenir un minorant de la valeur de L_{cr} correspondant à la valeur de h/a pour laquelle $p_h = 2k\,(1+\delta)$, il faut diminuer la largeur du bloc de ΔL_m^0 à partir de la largeur correspondant au cas du problème de l'entaille ([20]). Les formules sont :

$$\begin{cases} \overline{DE}^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\epsilon\,/\,\cos(\epsilon-\pi/4) - \Delta L_m^0\sqrt{2}\,(\overline{\Omega I} + \overline{JK}) + (\Delta L_m^0)^2 + ma^2/2 = 0 \\ \Delta L_m^0 \leqslant \overline{JK}\,\sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{DE}^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\epsilon\,/\,\cos(\epsilon-\pi/4) - \overline{JK}^2/2 - \overline{\Omega I}\times\overline{JK} + ma^2/2 - \overline{\Omega I}^2 u = 0 \\ \Delta L_m^0 = \overline{JK}\,\sqrt{2}/2 + \overline{\Omega I}\,[\sin(\pi/4) - \sin(\pi/4 - u)] \end{cases}$$

Les résultats obtenus par cette méthode sont représentés à la figure 24 en deux arcs de courbes correspondant aux cas extrêmes $m = 0$ et $m = 1$, qui partant des points trouvés en 1.2.1 pour $h/a = 8{,}713$ sont voisins et suivent assez bien la courbe représentative du majorant.

1.2.2.2 – Deuxième méthode

Nous utilisons, de la même manière que dans les paragraphes précédents une solution incomplète dans le cas $m = 0$, due à Ewing et Hill (1967) dont le schéma d'écoulement est représenté à la figure 30. Nous avons tracé l'hodographe à la figure 31 afin de déterminer la répartition des vitesses de glissement $v(y)$ sous le poinçon. Comme au § 1.2.2.1, nous obtenons $v(y) = \omega.y$.

Pour une valeur donnée du paramètre β, les calculs de Ewing et Hill donnent un majorant de la valeur de L_{cr} correspondant à h tel que $p_h = 2k\,(1+2\beta)$, pour $m = 0$. En diminuant, ce minorant selon la méthode déjà indiquée, nous obtenons les minorants correspondants à $0 < m \leqslant 1$ (figure 24).

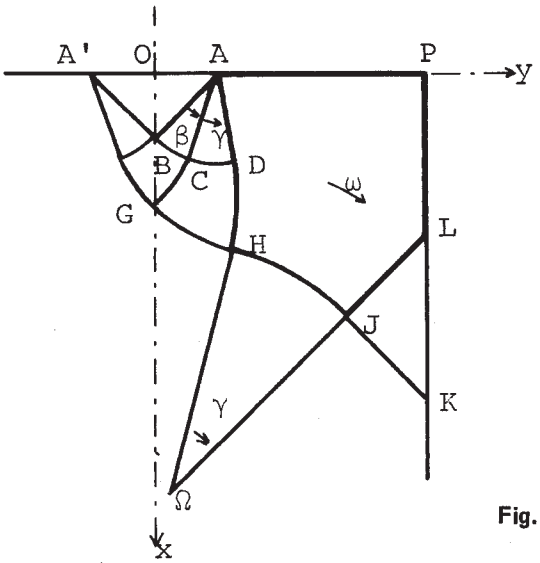


Fig. 30

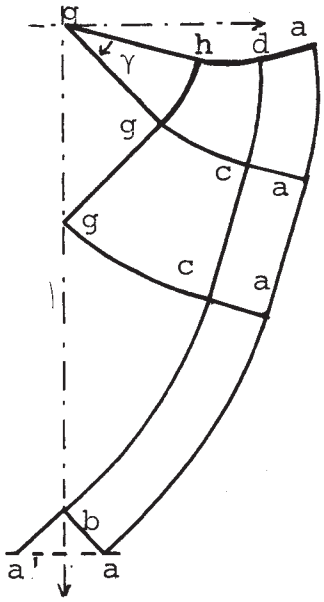


Fig. 31

(20) ΔL_0^0 n'est pas nul.

Remarquons que pour $h/a \geqslant 8{,}713$, le résultat obtenu par cette méthode est un peu moins bon que celui obtenu au § 1.2.2.1 ($\equiv$1.2.1) :

$L_{cr}/a = 8{,}5920$ au lieu de 8,5927 pour $m = 0$,
$L_{cr}/a = 8{,}5388$ au lieu de 8,5659 pour $m = 1$,

l'ordre est inversé pour $h/a = 5{,}298$. Comme nous l'avons dit, chacune des deux solutions donne à son tour le meilleur minorant.

1.3 – Conclusions

L'examen des différentes courbes représentées à la figure 24, amène les remarques suivantes.

1.3.1 – Coïncidence presque parfaite du majorant et du minorant pour $m = 0$.

Les deux bornes trouvées pour L_{cr}, le majorant et le meilleur minorant, sont pour chaque valeur de h/a extrêmement voisines. On a par exemple :

pour $h/a = 8{,}713$: majorant 8,621, meilleurs minorant : 8,593
soit 0,3 % d'écart relatif,

pour $h/a = 6{,}35$: majorant 5,786, meilleur minorant : 5,775
soit 0,2 % d'écart relatif.

Du point de vue pratique, nous pouvons donc dire que la largeur critique est déterminée.

Notons que le majorant et les minorants trouvés (et donc la largeur critique, au moins à la précision de leur écart) ne dépendent pas de la forme exacte des coins supérieurs de la plaque : en effet, les solutions complètes et cinématiquement plastiquement admissibles utilisées sont relativement indépendantes de la forme des coins supérieurs, qui se trouvent dans une zone supposée rigide (et en état de contraintes uniformément nul, dans le cas de la solution complète), comme on le voit sur le schéma correspondant, tant que les modifications de forme n'affectent pas les surfaces libres des zones déformées. Physiquement, ce résultat est satisfaisant.

1.3.2 – Influence du frottement sous le poinçon

L'influence du cœfficient de rugosité partielle sous le poinçon est relativement faible. L'augmentation de ce cœfficient se traduit, toutes choses égales d'ailleurs, par une diminution faible et sensiblement linéaire de la valeur du minorant. Ainsi, la courbe représentative du minorant pour $m = 1$ (poinçon parfaitement rugueux), qui correspond aux valeurs les plus faibles du meilleur minorant, est encore très voisine de la courbe du majorant. On a les résultats :

$h/a = 8{,}713$: majorant : 8,6210, meilleur minorant pour $m = 1$: 8,565
soit 0,6 % d'écart relatif

$h/a = 6{,}35$: majorant : 5,786 , meilleur minorant pour $m = 1$: 5,714
soit 1,2 % d'écart relatif.

Pratiquement l'écart est encore suffisamment faible pour permettre une évaluation souvent acceptable de la largeur critique. A cette précision, la largeur critique apparaît comme une fonction linéaire de h/a et est comme au § 1.3.1 indépendante de la forme exacte des coins supérieurs de la plaque.

$2 - 1 \leqslant h/a < 5{,}298$.

Examinons d'abord quels types de renseignements sur l'influence de la largeur de la plaque nous pouvons chercher à obtenir.

Il n'est pas question d'essayer de préciser une largeur critique, fonction de l'épaisseur, au-dessus de laquelle la charge limite serait $F = 2ap_h$ indépendante de la largeur. En effet, nous n'avons pas trouvé de solution statique correspondant à cette charge.

Nous pouvons, par contre, au moyen de la solution statique mise en évidence au chapitre III, donner pour chaque valeur de h/a, une valeur de la largeur au-dessus de laquelle on pourra affirmer que la charge limite est supérieure ou égale à $2ap_\delta$.

Nous pouvons aussi, au moyen de diverses solutions cinématiques trouver une valeur maximale de la largeur au-dessous de laquelle on pourra affirmer que la charge limite est certainement inférieure à $2ap_\delta$ (et une de même pour $2ap_h$, largeur minimale que nécessiterait un prolongement de la solution incomplète de Hill avec " bulbe " plastique s'il en existait un).

2.1 – Majorant de la largeur correspondant à $2ap_\delta$

La largeur nécessaire à la solution statique du chapitre III pour qu'elle puisse se développer, est un majorant de la largeur au-dessus de laquelle la charge limite est certainement supérieure ou égale à $2ap_\delta$. La formule donnée par Ewing est valable pour $0 \leqslant \delta \leqslant 1{,}0302$ et s'écrit :

$$y_p = a\,[2 \exp(\delta) - 1] \quad \text{correspondant à} \quad 2 \leqslant h/a \leqslant 5{,}298$$
$$y_p = a \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant h/a \leqslant 2.$$

Ce majorant est représenté sur la figure 24 ; la courbe correspondante se raccorde tangentiellement à celle correspondant au majorant du § 1.1.

2.2 – Utilisation des solutions cinématiques.

2.2.1 – Méthode utilisant la solution incomplète de Ewing et Hill (1967).

La solution incomplète de Ewing et Hill (déjà citée) existe pour $\beta \geqslant 28^0, 210$ et peut être utilisée comme au § 1.2.2.2, pour obtenir pour chaque valeur de m, une largeur maximale au-dessous de laquelle on peut affirmer que la charge limite est inférieure à $2ap_\delta$ pour $5{,}070 \leqslant h/a < 5{,}298$ (à $2ap_h$ pour $5{,}066 \leqslant 5{,}298$).

Au-dessous de $h/a = 5{,}070$ (ou 5,066 si on veut situer la charge limite par rapport à $2ap_h$) nous pouvons encore utiliser la solution incomplète ultime de Hill et Ewing (majorant $p/2k = 1{,}9847$). En diminuant la largeur du solide, la restriction du schéma d'écoulement de cette solution incomplète ultime fournit une solution cinématique à laquelle correspond un majorant de la charge limite fonction de L, inférieur à $F = 2a \times 1{,}9847 \times 2k$ d'une quantité proportionnelle à ω/U qui se calcule par les mêmes formules qu'au § 1.2.2.1 et 1.2.2.2 et est égal à $2a\,p_\delta$ (ou $2a\,p_h$) pour une valeur de h convenable. Nous avons trouvé par la construction de l'hodographe de la figure 30, la relation $U = 4{,}078\ \omega\ \overline{\Omega I}/a$ d'où $\omega = U/23{,}29$.

Les résultats ainsi obtenus sont représentés sur la figure 24 : arcs de courbes qui se raccordent aux arcs homologues du § 1.2.2.2.

La méthode n'est commodément applicable que tant que le bulbe d'ouverture $(\beta + \gamma)$ a une demi-largeur inférieure à L.

Nous avons vérifié numériquement que les résultats obtenus à partir de la solution ultime de Ewing et Hill comme indiqué ci-dessus sont meilleurs que ceux que l'on peut obtenir par la même méthode à partir d'une solution d'Ewing et Hill pour une valeur de $\beta > 28, 210^0$.

2.2.2 – Méthode utilisant la solution incomplète de Hill (1950 b).

Nous procédons comme au § 1.2.2.1, l'angle δ variant entre 0 et 1,0302. La discussion, assez longue car différents cas sont à examiner suivant les valeurs de δ, est donnée en annexe 4.

Nous obtenons ainsi le faisceau de courbes $(L/a, h/a)$ représenté à la figure 24, situant la charge limite par rapport à $2ap_\delta$ pour $0 \leqslant m \leqslant 1$. Ces courbes se raccordent à celles du § 1.2.2.1 et aboutissent au point $L/a = 1$, de la courbe du § 2.1. Les courbes sont au voisinage de $h/a = 5{,}298$, situées au-dessous des courbes correspondantes du § 2.2.1, et elles passent ensuite au-dessus de celles-ci.

L'utilisation des résultats pour situer la charge limite par rapport à $2ap_h$, n'est pas possible dans tout l'intervalle $1 \leqslant h/a < 5{,}298$. En effet, pour que la solution cinématique proposée soit valable, il faut que la profondeur qui lui est nécessaire soit inférieure à l'épaisseur h qui lui correspond. Ainsi, on n'obtient une courbe $(L/a, h/a)$ pour $m = 0$, situant la charge limite par rapport à $2ap_h$, que pour $2{,}98 \leqslant h/a \leqslant 5{,}298$, cette courbe se raccorde en $h/a = 5{,}298$ à la courbe correspondante obtenue au § 1.2.2.1... Elle donne des résultats meilleur que ceux du § 2.2.1.

2.2.3 – Autre solution cinématique

Pour situer la charge limite par rapport à $2ap_h$ si $h/a < 2{,}98$ nous utilisons la solution cinématique représentée sur la figure 32.

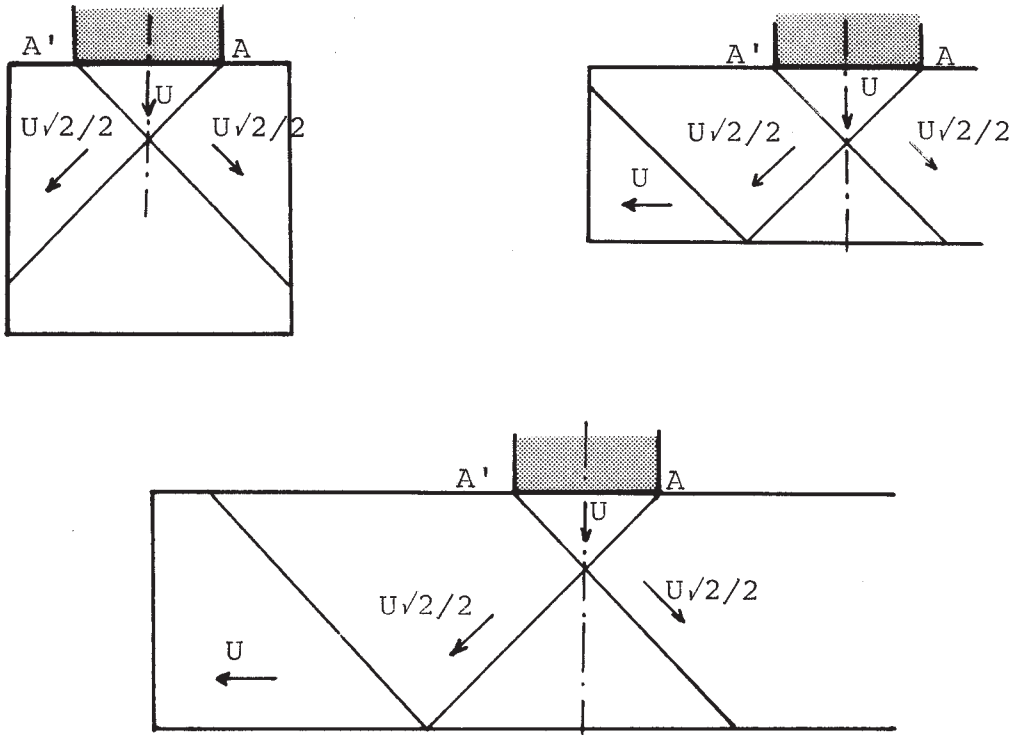


Fig. 32

Il y a trois types principaux de mécanismes d'écoulement.

Il en résulte la courbe représentée sur la figure 24, valable quel que soit m puisqu'il n'y a pas glissement sous le poinçon. Partant du point ($h/a = L/a = 1$) avec une tangente horizontale, elle est croissante. Pour $h/a \geqslant 2{,}98$ elle est située au-dessous de celles trouvées au § 2.2.2, sans en être trop éloignée pour $h/a = 2{,}98$ (pour $m = 0$), valeur au-dessous de laquelle elle est la seule utilisable.

Signalons enfin que $F = 2a \times 2k$ est la valeur de la charge limite quelle que soit la largeur si $h/a = 1$, quelle que soit la profondeur si $L/a = 1$.

2.3 – Conclusions.

Les résultats obtenus pour $1 < h/a < 5{,}298$ sont, on le voit, beaucoup moins précis que dans le cas précédent.

Du point de vue pratique la courbe du § 2.1 est sans doute celle qui présente le plus d'intérêt : si les paramètres d'un échantillon correspondent à un point situé au-dessus de cette courbe, on est certain que celui-là peut supporter la charge $2ap_\delta$.

Diverses autres utilisations sont possibles des résultats des paragraphes précédents représentés à la figure 24 (et tableaux III de valeurs numériques).

Ainsi, l'étude de la charge limite à h fixé et L, variable peut être faite. Si la valeur de h fixée est supérieure à $5{,}298\,a$, on a, suivant les valeurs de L, la valeur exacte de la charge limite correspondante ou un encadrement de celle-ci (un minorant et un majorant). Si la valeur de h fixée est inférieure à $5{,}298\,a$, on dispose toujours d'un encadrement.

De même pour l'étude de la charge limite à L fixée et h variable.

TROISIÈME PARTIE

sur le poinçonnement d'une plaque en déformation plane $h/a < 1$

I – INTRODUCTION

Dans l'étude effectuée dans la deuxième partie nous avons remarqué que la condition de frottement sous le poinçon n'avait qu'une faible influence sur les résultats obtenus.

C'est ainsi que dans le cas $5{,}298 \leqslant h/a \leqslant 8{,}713$ nous avons mis en évidence une solution complète indépendante de m et en conséquence, valable également dans le cas du frottement de Coulomb et montré également que la valeur de m influait peu sur la largeur critique de la plaque. Dans le cas $1 \leqslant h/a < 5{,}298$ nous avons trouvé une solution statique satisfaisante indépendante de m ;quant aux solutions cinématiques utilisées, l'incidence de la valeur de m était soit nulle (§ 2.2), soit faible.

Par contre, pour le problème du poinçonnement pour $h/a < 1$ qui est le " problème de la presse ", la condition de frottement sous le poinçon a une grosse importance [Bishop (1958)]. De nombreuses études ont été faites de ce problème : Prandtl (1923), Hill, Lee et Tupper (1945, 1951), Hill (1950), Sokolovski (1950), A.-P. Green (1951 et 1954), Bishop (1958). Les différents cas de frottement rugueux ou lisse y sont abordés ($0 \leqslant m \leqslant 1$) et même le cas du frottement de Coulomb sous le poinçon chez Bishop (1958) et Szczepinski (1967).

Dans la suite, nous allons étudier ce problème en nous plaçant du point de vue de la théorie des charges limites. Afin de pouvoir en appliquer les résultats précis, nous nous limitons au cas où la condition de frottement sous le poinçon est du type indiqué en première partie, chapitre I § 1.8. Nous aborderons le cas du frottement de Coulomb pour indiquer la généralisation immédiate, dans la recherche de certaines solutions incomplètes, d'un résultat que nous avons obtenu.

II – ETUDE DU CAS DU POINÇON PARFAITEMENT RUGUEUX, m = 1.

1 – Solution incomplète

Une solution incomplète de ce problème a été donnée par Hill (1950 a). Elle présente deux types de schémas d'écoulement suivant les valeurs de h/a.

1.1 – $1 \leqslant a/h < 3{,}646$

Le schéma d'écoulement et l'hodographe (qui lui est homothétique) sont représentés à la figure 1.

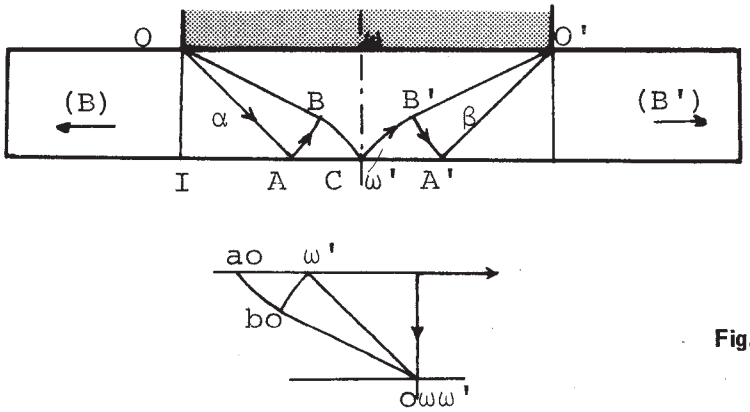


Fig. 1

On y trouve un bulbe plastique d'axe horizontal. L'ouverture α de ce bulbe est telle que l'extrémité C en soit sur l'axe de symétrie $\omega\omega'$ du poinçon.

OBCB'O' est animé de la vitesse verticale U du poinçon. Il y a discontinuité de vitesse le long de *OBC* (ligne α) et *CB'O'* (ligne β), égale à $U\sqrt{2}$. La vitesse dans *OAI* est uniforme, horizontale, égale à $U\,a/h$; les blocs *(B)* et *(B')* sont rigides et glissent horizontalement à cette vitesse.

La solution en contraintes associée dans la zone déformée est obtenue en appliquant le théorème de Hencky. L'équilibre des blocs *(B)* et *(B')* doit être possible, ce qui fixe la valeur de la pression moyenne p sur *OI (O'I')* : $p = k$.

D'où le calcul d'un majorant de la charge limite par intégration de la résultante verticale le long de *OBCB'O'* (ou de *IACA'I'*) : nous avons :

$$a = h\,[A_0\,(2\alpha) + I_0\,(2\alpha)] \qquad h/a = 1/\,[A_0\,(2\alpha) + I_0\,(2\alpha)] \qquad (1)$$

et par intégration le long de *IAC* :

$$F/2 = \int_0^{\alpha} \sqrt{2}\,s_2'\,(t,\,t)\,(2k + 4kt)\,dt + 2kh$$

$$F/2 = 2kh + 2kh\int_0^{\alpha} 2[I_0\,(2t) + I_1\,(2t)]\,(1 + 2t)\,dt$$

et p_1, pression moyenne sous le poinçon est égale à :

$$p_1/2k = F/4ka = \left\{I_0\,(2\alpha) + 2\alpha\,[I_0\,(2\alpha) + I_1\,(2\alpha)]\right\}/\,[A_0\,(2\alpha) + I_0\,(2\alpha)] \qquad (2)$$

Remarquons que les points de la courbe $p_1/2k$ en fonction de h/a et de la courbe $p_h/2k$ en fonction de h/a, ont la même ordonnée pour des valeurs de h/a inverses l'une de l'autre (fig. 2).

α devant être compris entre 0 et $\pi/4$, ce type de solution incomplète n'est valable que pour les valeurs de h/a comprises entre 1 et $1/\,[A_0(\pi/2) + I_0(\pi/2)] = 1/3{,}646$.

A noter que dans l'intervalle $1/3{,}646 < h/a \leqslant 1$, cette solution est valable comme *solution incomplète* quelle que soit la valeur de m.

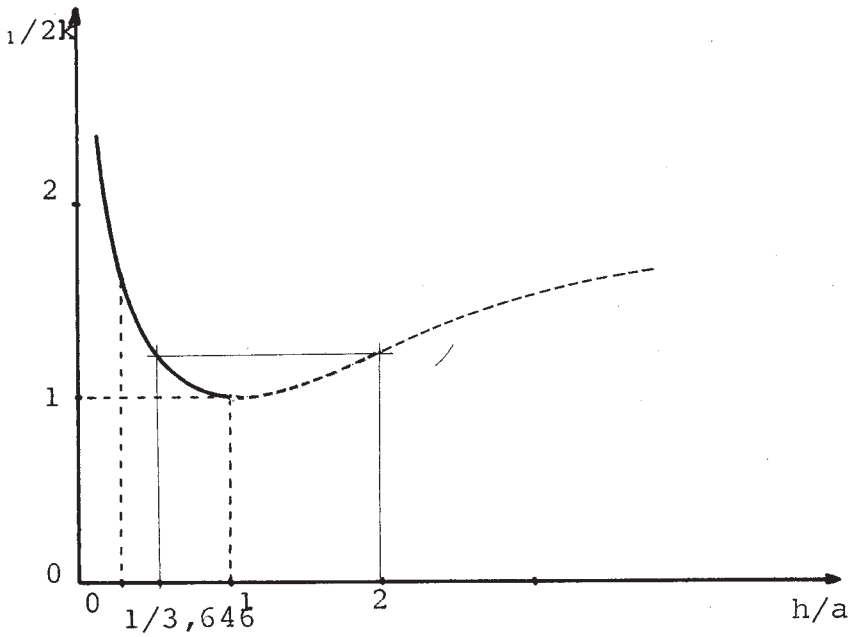


Fig. 2

1.2 – a/h ⩾ 3,646

La figure 3 représente le schéma d'écoulement et l'hodographe (homothétique).

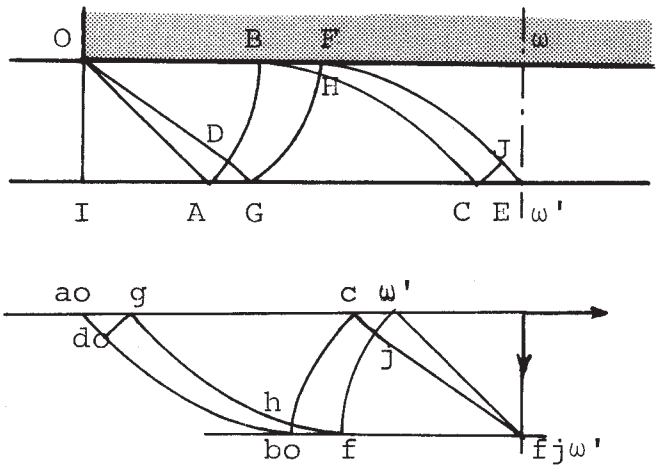


Fig. 3

FEF' se déplace verticalement à la vitesse *U*. Il y a glissement le long de *EF*, la discontinuité de vitesse étant égale à $U\sqrt{2}$; glissement aussi sous le poinçon le long de *OBF* : la vitesse de glissement égale à $U\sqrt{2}$ en *F*, croît linéairement entre *F* et *B* et est constante et égale à $U\sqrt{2}\frac{OF}{OB}$ le long de *OB*, dans *OAI*, la vitesse est horizontale, uniforme, égale à Ua/h et les blocs *B* et *B'*, rigides, glissent horizontalement à cette vitesse.

La solution en contraintes associée dans la zone déformée est déterminée comme dans le cas précédent à partir de $p = k$ le long de *OI (O'I')*.

Le calcul du majorant $2ap_1$ de la charge limite correspondant se fait comme au § 1.1. On trouve que quand $h/a \searrow O$, $p_1 \nearrow \infty$.

A la différence de celle présentée au § 1.1 cette solution n'est valable comme solution incomplète que pour $m = 1$ puisque $|\tau_{xy}| = k$ le long de *OBF*. Par contre, l'utilisation du mécanisme cinématique est toujours possible pour construire une solution cinématique qui fournit pour chaque valeur de *m* un majorant de la charge limite, fonction croissante de *m*.

2 – Solution complète.

Nous pouvons compléter cette solution incomplète de façon relativement simple.

Dans les blocs *(B)* et *(B')*, l'état de contraintes uniformément nul est une solution convenable puisque les contraintes sont nulles sur la surface extérieure et sur *OI*, suivant la valeur de *h/a*, il reste ensuite à prolonger le champ de contraintes soit dans *OBCB'O'* (fig. 1) soit dans *FEF'* (fig. 3). La méthode employée est la suivante [Sokolovski (1950)] :

A partir des deux arcs de caractéristiques *OBC* et *CB'O'* (ou *FE* et *EF*) et des valeurs des contraintes connues sur ces arcs, appliquant les relations de Hencky, on peut construire un champ de contrainte continu, satisfaisant les équations d'équilibre, et entièrement plastique, dans le domaine d'influence de *OBC* et *O'B'C* (ou *FE* et *F'E*) qui contient la zone où le prolongement est à effectuer ; la restriction de ce champ de contraintes au domaine *OBCB'O'* (ou *EFE'*) est une solution du problème, car on a $|\tau| \leqslant k$ sous le poinçon puisque le critère d'écoulement est satisfait (fig. 4 et 5).

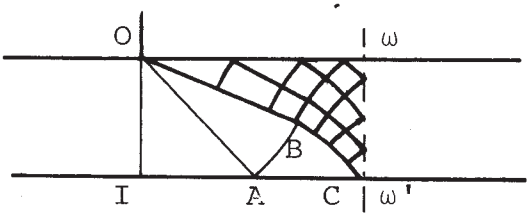


Fig. 4

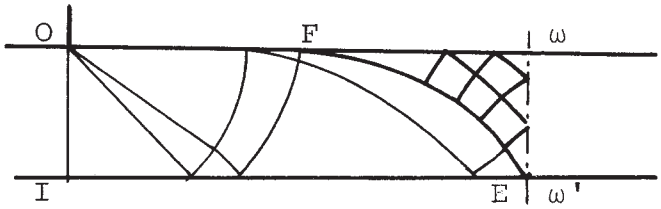


Fig. 5

Ainsi, dans le cas du poinçon parfaitement rugueux ($m = 1$), pour toute valeur de h/a inférieure à 1, la charge limite est connue, $2ap_1$ (fig. 5), indépendante de la largeur L de la plaque (L/a nécessairement $\geqslant 1$).

III – ETUDE DU CAS DU POINÇON PARTIELLEMENT RUGUEUX.

1 – Solution complète pour un voisinage de $h/a = 1$.

On a vu au § 1.1 du chapitre précédent que la solution incomplète représentée à la figure 1 est valable quelle que soit la valeur de m et fournit pour chaque valeur de m le même majorant de la charge limite $2ap_1$ ($1/3{,}646 < h/a \leqslant 1$). Nous nous proposons de déterminer pour chaque valeur de h/a, pour quelles valeurs de m il est possible de compléter cette solution, précisant ainsi, du point de vue théorique, la gamme de conditions de frottement pour laquelle elle est valable et fournit la valeur exacte de la charge limite (cf. Hill, 1950 a, p. 230).

Soit donc une valeur de h/a comprise entre 1 et $1/3{,}646$. α ($0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/4$) est l'angle du bulbe plastique (fig. 1), et étudions le prolongement représenté à la figure 3 : si $m < 1$, le seul point qu'il est nécessaire de vérifier à nouveau concerne la condition de frottement sous le poinçon. L'application du premier théorème de Hencky montre que ψ décroît de 0 à ω où l'on a $\psi = \pi/2$. En O il n'y a pas de singularité dans le champ prolongé et $\psi = \alpha + \pi/2$, $|\tau_{xy}|$ y atteint donc sa valeur maximale égale à $k \sin 2\alpha$.

Ainsi, à h/a donné (α donné), le prolongement est valable si $\sin 2\alpha \leqslant m$.

D'autre part, par application du résultat de Hill (1954) à l'angle $BO\omega$ au voisinage de O nous montrons que si $m < \sin 2\alpha$ il n est pas possible de compléter la solution incomplète (fig. 6) :

$u = \pi/4 - \alpha$

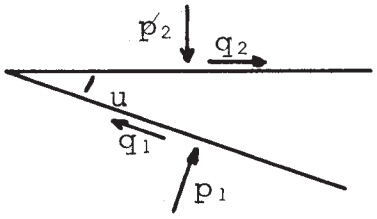


Fig. 6

En effet les contraintes sur l'angle sont :

$q_1 = k = k \sin 2\phi_1$, $\quad \phi_1 = \pi/4$

$q_2 = ak$ avec $|a| \leqslant m$

$q_2 = k \sin 2\phi_2$, $\quad \phi_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} a$

Pour qu'il existe un état d'équilibre au voisinage de O, satisfaisant ces conditions à la limite, sans violer le critère, il faut que

$$u \geqslant |\phi_1 - \phi_2| = |\pi/4 - \frac{1}{2} \text{Arcsin } a| = |\frac{1}{2} \text{Arccos } a| = \frac{1}{2} \text{Arccos } a$$

Or, $|a| \leqslant m$: la valeur minimale que puisse prendre Arccos a est Arccos m.

Donc, pour une valeur donnée de u, on peut affirmer qu'il est impossible de prolonger la solution incomplète si $m < \cos 2u = \sin 2\alpha$.

En résumé, pour une valeur de m donnée, la courbe de la figure 5 donne la valeur de la charge limite pour $1/[A_0(2x) + I_0(2x)] < h/a < 1$ avec $2x =$ Arcsin m ; pour $h/a < 1 / [A_0(2x) + I_0(2x)]$ elle fournit seulement un majorant de la charge limite.

Il apparaît donc nécessaire de rechercher une solution permettant d'utiliser la méthode statique pour obtenir un minorant dans le cas $h/a < 1/[A_0(2x) + I_0(2x)]$.

2 – Solution statique pour $h/a < 1/[A_0(2x) + I_0(2x)]$.

2.1 – Construction d'une solution statique.

Il est clair, à partir de la représentation de Mohr des contraintes, que si on suppose que toute la zone située sous le poinçon est plastique, la condition de frottement $|\tau| \leqslant mk$ est équivalente à la suivante : en chaque point de $O\omega$ l'une des deux caractéristique fait avec $O\omega$ un angle inférieur à $u = \frac{1}{2}$ Arccos m.

$\omega\omega'$ étant l'axe du poinçon et du changement, nous cherchons à construire une solution statique symétrique par rapport à $\omega\omega'$ d'un type analogue à celles, données à la figure 3. Pour cela, partant du champ $OA_1C_1B_1$, bulbe d'ouverture x, nous construisons parmi tous les champs de contraintes en équilibre, entièrement plastiques continus, satisfaisant les conditions $\psi = \pi/2$ sur $C\omega'$ et $\omega\omega'$, $|\tau| \leqslant mk$ le long de $O\omega$, celui dans lequel le long de $O\omega$, $|\tau| = mk$ sur un segment $O\phi$ les caractéristiques α ont leur tangente parallèle à OB_1 (1).

La construction de ce champ est simple. Nous utilisons le réseau représenté à la figure 7, donné par Sokolovski (1950) : réseau infini partant du bulbe d'ouverture x et satisfaisant $\psi = \pi/2$ sur Cy et $\psi = \pi/2 + x$ sur Oy, c'est-à-dire, ($\tau_{xy} = -mk$). h étant fixé et a donné, on place sur la figure 7 l'axe $\omega\omega'$ ($O\omega = a$) et on ne considère du réseau que la partie située à gauche de la caractéristique α, $\rho\omega'$ aboutissant en ω'. Le champ de contraintes en équilibre, continu, entièrement plastique dans $\rho\omega'\omega$, est déterminé de manière unique à partir des données sur $\rho\omega'$ et sur $\omega\omega'$ où $\psi = \pi/2$ (ou de façon équivalente sur $\rho'\omega'$ symétrique de $\rho\omega'$) comme en II § 2 : d'après les relations de Hencky, puisque $\rho\omega'$ est constituée de segments rectilignes et curvilignes à convexité tournée vers ω, nous avons le long de $\rho\omega$: $\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2 + x$ donc $0 \geqslant \tau_{xy} \geqslant -mk$. Prenant $\rho = k$ dans OIA_1, nous pouvons raccorder dans le bloc (B) le champ de contraintes nulles et nous obtenons dans l'ensemble de la plaque un champ de contraintes licite.

En application de la méthode statique, l'intégration de la contrainte le long de $I\omega'$ fournit le minorant de la charge limite F_m^0 et $p_m^0 = F_m^0/2a$.

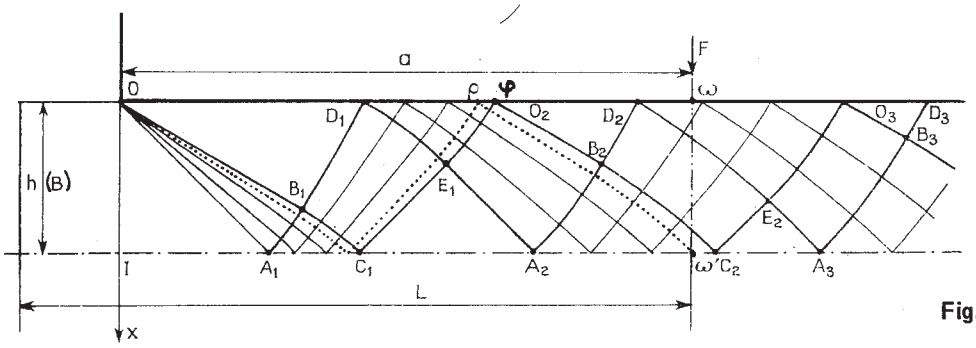


Fig. 7

(1) Cette condition est suggérée par des considérations cinématiques : pour la construction ultérieure d'une solution cinématique associée on a la plus grande possibilité de glissement ininterrompu sous le poinçon.

2.2 – **Résultats obtenus.**

A la figure 8 sont représentés les différents réseaux à l'intérieur de $OI\omega\omega'$ au fur et à mesure que a croît.

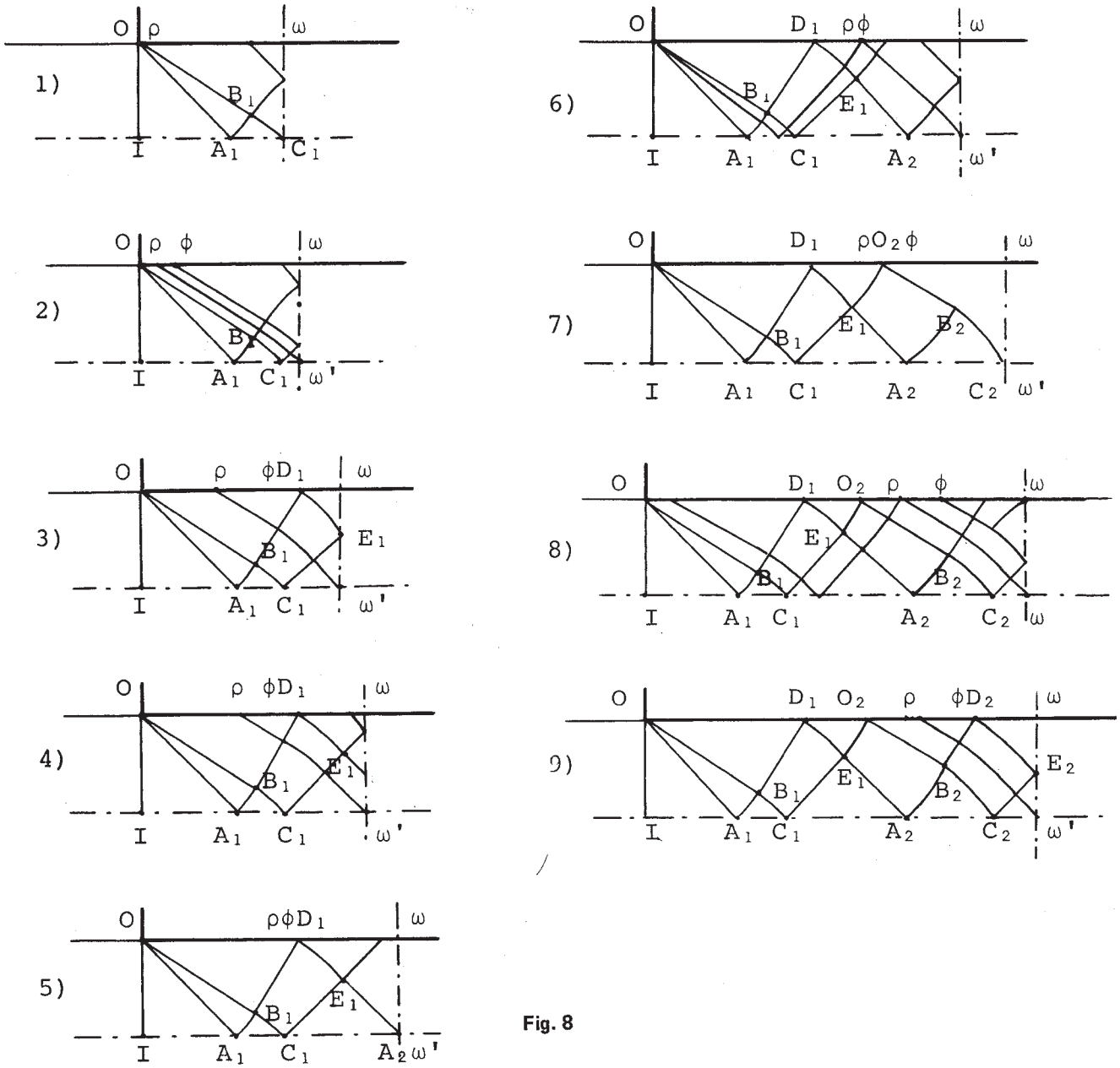


Fig. 8

a) Lorsque ω' est dans un segment A_nC_n le point ρ est le point ϕ de la solution correspondante : sur $\rho\omega$ on a $\tau_{xy} > -mk$.

Par contre, lorsque ω' appartient à un segment C_nA_{n+1}, les points ρ et ϕ sont distincts : $O\phi > O\rho$. Plus précisément si ω' est situé entre C_n et le milieu de C_nA_{n+1} on a $O_n\phi = 2O_np$, et si ω' est situé entre ce milieu et A_{n+1} on a : $\phi = D_n$.

b) Entre le schéma limite 1, $\omega' \equiv C_1$, $h/a = 1/[A_0\ (2x) + I_0\ (2x)]$, et le schéma limite 5 ($\omega' \equiv A_2$), le champ entre C_1 et ω' est homogène. A h donné, F_m^0 est donc une fonction affine de a, et $F_m^0/2a = p_m^0$ une fonction affine de h/a représentée par la droite tangente à la courbe de la figure 5 au point d'abscisse $h/a = 1/[A_0\ (2x) + I_0\ (2x)]$.

La valeur de h/a correspondant au cas limite 5 est :

$$h/a = 1/\ [A_0\ (2x) + I_0\ (2x) + 2tg\ (\pi/4 - x)]$$

c) Entre les schémas 5 et 7 ($\omega' \equiv C_2$), c'est-à-dire pour ω' dans $A_2\ C_2$, le champ n'est pas homogène sur $A_2\ \omega'$: p y est une fonction croissante et la courbe $C_m^0\ (p_m^0,\ h/a)$ a sa concavité tournée vers le haut et est tangente en son point de départ à la droite trouvée en b.

d) Nous retrouvons ensuite un segment de droite tangent à cette courbe, puis un arc de courbe à concavité vers le haut tangent à cette droite et ainsi de suite, obtenant ainsi la courbe représentative $\mathbf{C}_m^0$ du minorant de la charge limite donné par ces schémas qui tend vers ∞ quand $h/a \searrow 0$, sauf lorsque $m = 0$ où cette courbe se réduit à la droite $p_0^0/2k = 1$, correspondant au champ homogène.

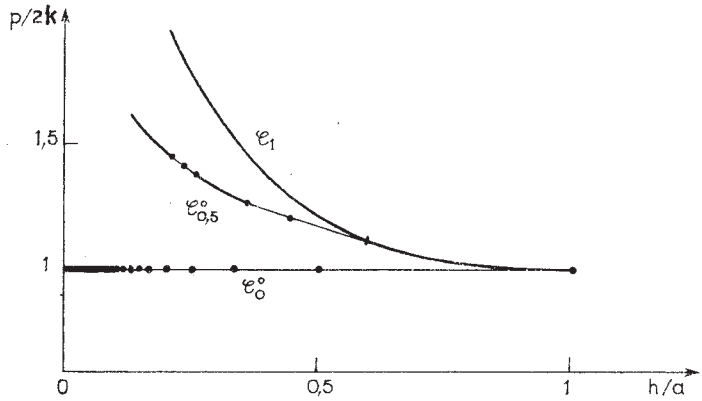


Fig. 9

3 - Solutions complètes pour $h/a < 1/[A_0(2x) + I_0(2x)]$.

Disposant, $\forall\ m$, $\forall\ h/a < 1$, d'une solution statique, nous cherchons maintenant à la compléter en mettant en évidence un mécanisme cinématique associé.

3.1 – Cas où la largeur de la plaque est égale à celle du poinçon.

Dans ce cas où aucune condition supplémentaire n'est imposée à la vitesse le long de OI, il est évident que tous les schémas statiques de la figure 8 peuvent être complétés cinématiquement de multiples façons (ce cas est celui de la presse à plateaux débordants).

Ainsi, quel que soit m, si $L = a$, on possède pour toute valeur de h/a une solution complète et les courbes de la figure 9 représentent la charge limite. (En particulier $p/2k = 1$, $\forall h/a < 1$, si $m = 0$.)

3.2 – Cas où la largeur de la plaque est supérieure à celle du poinçon.

Le bloc (B) [resp. (B')] au-delà de OI (resp. $O'I'$) ne peut subir qu'un déplacement rigide (qui en raison de la symétrie horizontale de la figure, doit être une translation horizontale ; les schémas cinématiques doivent donc pour être valables donner une vitesse horizontale et uniforme le long de OI.

Hill (1950), puis A.-P. Green (1954) et Bishop (1958) ont abordé ce problème en cherchant à construire des solutions incomplètes.

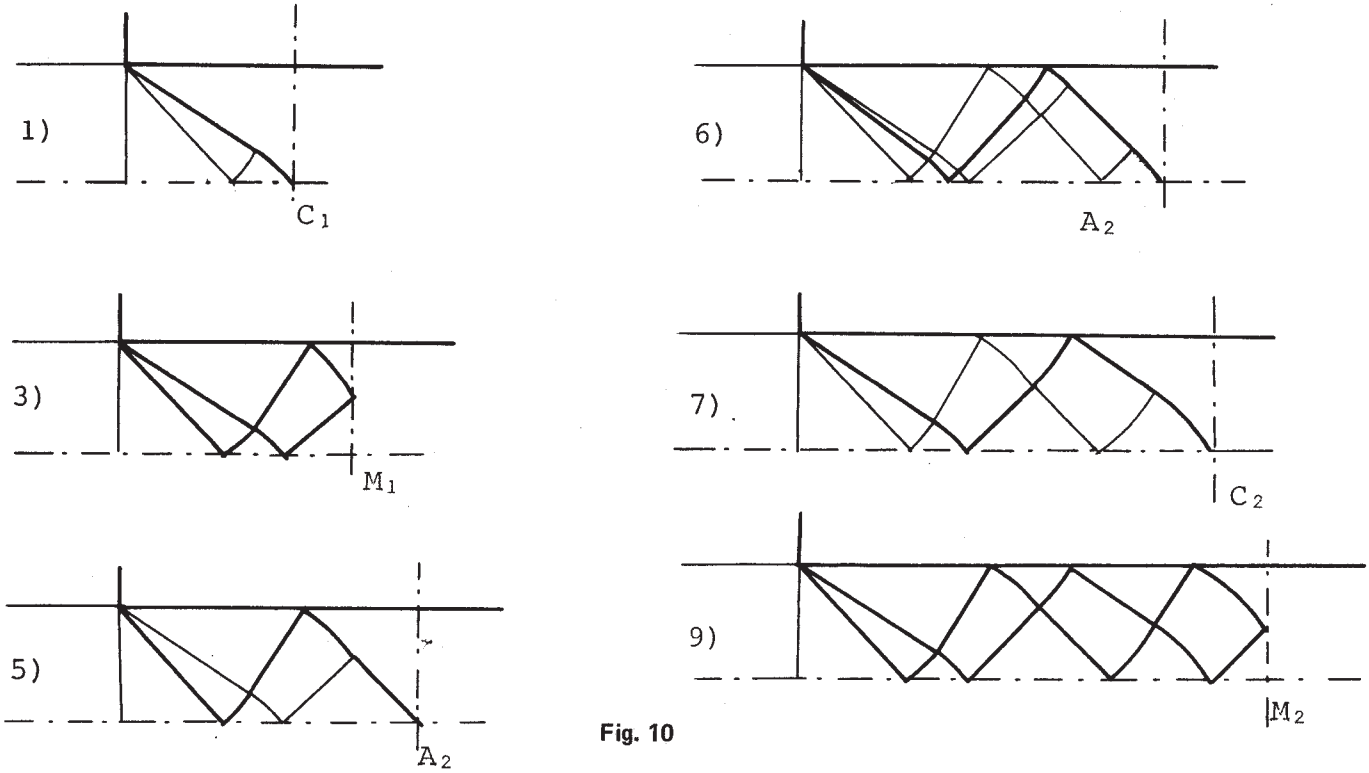


Fig. 10

La méthode que nous employons permet d'obtenir des résultats plus étendus.

A la figure 10, nous avons représenté quand ils existent, les schémas d'écoulement que l'on peut associer aux différents réseaux statiques de la figure 8.

Comme signalé par les auteurs cités ci-dessus, lorsque ω' appartient à un des segments A_nC_n on peut construire une solution cinématique associée à la solution statique du § 2 (schémas 1, 5, 6, 7, etc.) : le bloc $\phi\,\omega'\phi'$ est rigide et s'enfonce à la vitesse U verticale du poinçon, il y a glissement sous le poinçon tout le long de $O\phi$ et discontinuité de vitesse à la traversée de $\phi\,\omega'$ qui se réfléchit jusqu'en O. (Rappelons que $\rho \equiv \phi$ dans ce cas.)

Quand m' appartient à un segment C_nA_{n+1}, puisque $O\phi > O\rho$ nous pouvons avoir des solutions cinématiques avec des lignes de discontinuité de vitesses issues non nécessairement du centre ω' mais de tout point de $\omega\omega'$ situé entre ω' et le pied de la caractéristique α issue de ϕ : une telle solution ne sera acceptable que si après réflexions les lignes de discontinuité de vitesse aboutissent en O. Nous voyons alors que si $\omega' \in C_nA_{n+1}$ il n'est pas possible de construire une solution cinématique associée à la solution statique *sauf si ω' est au milieu du segment* (schémas 3, 9, ...).

Dans ce cas on a $\phi \equiv D_n$ et E_n est sur l'axe $\omega\omega'$: le mode d'écoulement est le suivant : $D_nE_nD'_n$ se déplace verticalement à la vitesse U, $C_nE_nC'_n$ est immobile, les deux caractéristiques passant par E_n sont lignes de discontinuité de vitesse et après réflexion ces lignes aboutissent en O ; il y a glissement sous le poinçon tout le long de $O\phi$ (2).

Ces résultats prouvent que sur la figure 9, certaines portions de la courbe C^0_m représentent non seulement un minorant de la charge limite mais cette charge limite elle-même : ce sont les points de tous les arcs courbes (schéma courant 6 et analogues) et sur chaque segment de droite, outre les deux extrémités, *un point* correspondant à 3, 9 et analogues.

(2) Il est à signaler que dans ce cas, hodographe et réseau des caractéristiques des contraintes dans la zone déformée sont homothétiques, comme dans tous ceux cités auparavant où la solution cinématique associée existe.

Pour une valeur de m donnée, soit Γ_n le nième intervalle de valeurs de a/h dans lequel la solution est complète, et Δ_n le nième intervalle où elle ne l'est pas : $\Gamma_n \equiv A_n C_n, \Delta_n \equiv C_n M_n A_{n+1}$. Nous désignons par solutions complètes d'ordre n de type C, M ou A les solutions complètes correspondant à ω' en C_n, M_n ou A_{n+1}.

La longueur de Δ_n est $\delta_n = 2h\,[\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4} - x)]^n$ fonction décroissante de n, tandis que γ_n (longueur de Γ_n) est une fonction croissante : ainsi, sur la courbe C^0_m l'importance des segments rectilignes décroît et $\searrow 0$ quand $h/a \searrow 0$.

Dans le cas $m = 1, x = \pi/4$ et $\delta_n = 0$, $\forall n$: on retrouve le résultat du chapitre II § 2.

Dans le cas $m = 0$, chaque intervalle Γ_n se réduit aux deux points confondus A_n et C_n. On a $IA_n = IC_n = (2n - 1)\,h$ et $IM_n = 2n\,h$.

Ainsi quand $m \searrow 0$, nous aboutissons de façon continue (3) au résultat de Hill : la solution est complète et la charge limite égale à $p = 2k$, pour les valeurs discrètes de h/a, $h/a = 1/q$ (q entier).

La figure 11 représente les variations de IC_1, IM_1, IA_2 en fonction de m.

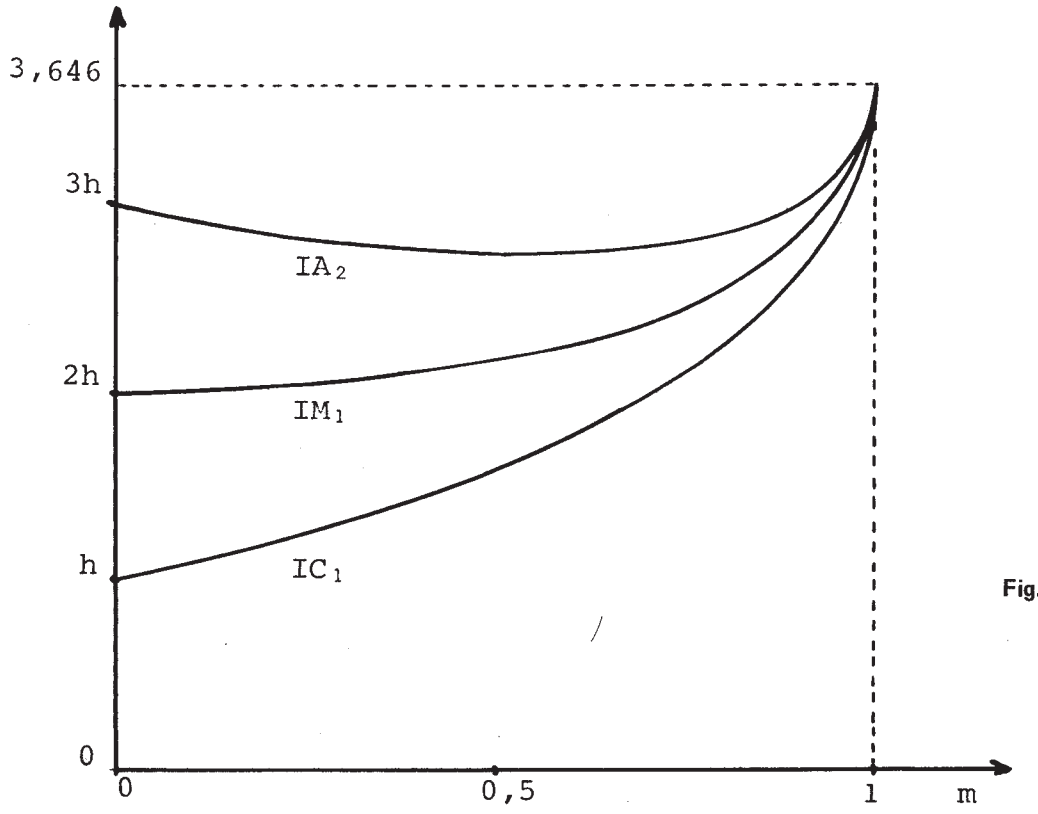


Fig. 11

4 – Majoration de la charge limite dans les intervalles Δ_n.

Nous avons vu que p_1 constitue un majorant de la charge limite pour tout m inférieur à 1. Nous nous proposons de trouver dans chaque zone Δ_n une majoration, meilleure que celle-là, qui coïncide avec la valeur exacte en les points C_n, M_n, A_{n+1} où celle-ci est connue (majorant en "dents de scie"). Ceci fait apparaître un nouvel intérêt du résultat concernant M_n : permettre de réduire la distance entre majorant et minorant de la charge limite.

(3) Le fait que la solution soit complète lorsque ω' est en M_n, est ici essentiel.

La méthode consiste à employer des modes de déformation qui lorsque ω' est en C_n, M_n ou A_{n+1}, coïncident avec les modes de déformation des solutions complètes correspondantes.

4.1 – Variation de IC_n, IM_n, IA_{n+1}, en fonction de m.

Comme on le voit sur la figure 11, pour $n = 1$, les variations de IC_n, IM_n, IA_{n+1} en fonction de m sont les suivantes .

IC_1 croît de 1 à 3,646
IM_1 est stationnaire puis croît de 2 à 3,646
IA_2 décroît, passe par un minimum ($\simeq$ 2,76) puis croît jusqu'à 3,646

Pour $n = 2$

IC_2 croît de 3
IM_2 croît de 4
IA_3 décroît, passe par un minimum, puis croît

} jusqu'à une même valeur

Pour $n \geqslant 3$

Les trois fonctions sont croissantes à partir de $(2n-1)h$, $2nh$, $(2n+1)h$ jusqu'á une même valeur atteinte pour $m = 1$ et leurs pentes croissent avec n.

4.2 – Majoration de la charge limite, pour ω' compris entre C_n et M_n, qui coïncide en C_n avec la charge limite.

Soit m_0 la valeur fixe de m pour laquelle on étudie le problème et posons $x_0 = \frac{1}{2}$ Arcsin m_0.

On suppose h fixé et soit ω' compris entre C_n et M_n : $IC_n < I\omega' < IM_n$. D'après le § 4.1, il existe nécessairement une valeur de m, soit $m_1 > m_0$, pour laquelle IC_n coïncide avec $I\omega' = a$. Soit $x_1 = \frac{1}{2}$ Arcsin m_1. Le mode de déformation de la solution complète de type C pour $m = m_1$ correspondante, peut être utilisé pour une solution cinématique dans le cas $m = m_0$ et donne un majorant de la charge limite qui, évidemment, coïncide avec la charge limite quand $a = IC_n$ pour $m = m_0$ (alors $m_1 \equiv m_0$).

Pour $n = 1$, cette méthode fournit comme majorant p_1.

4.3 – Majoration de la charge limite, pour ω' compris entre M_n et A_{n+1}, qui coïncide en M_n avec la charge limite.

La méthode est exactement la même que celle décrite au § 4.2 ; m_1 est la valeur pour laquelle $IM_n = a$ et on utilise comme solution cinématique la solution de type M correspondante.

Par exemple, dans le cas $n = 1$, on obtient :

x_1 est défini par $a = h\,[A_0\,(2x_1) + I_0\,(2x_1) + \text{tg}\,(\pi/4 - x_1)]$
et p_{m_1}, charge limite pour $I\omega' = a$ et $m = m_1$, est donnée par :

$$(a/h)\,(p_{m_1}/2k) = I_0\,(2x_1) + 2x_1\,[I_0\,(2x_1) + I_1\,(2x_1) + (1 + 2x_1)\,tg\,(\pi/4 - x_1)]$$

Appliquant la méthode cinématique, nous obtenons :

$$\frac{p'_{m_0}}{2k} = \frac{p_{m_1}}{2k} - \frac{m_1 - m_0}{2} \times \frac{h}{a} \times \frac{1}{\cos^2\,(\pi/4 - x_1)}$$

p'_{m_0} majorant de la charge limite pour $I\omega' = a$ et $m = m_0$. (Le deuxième terme du second membre correspond à la différence de coefficient de frottement sous le poinçon.)

4.4 – Majoration de la charge limite, pour ω' compris entre C_n et M_n, qui coïncide en M_n avec la charge limite.

Soit ω' compris entre C_n et M_n : deux cas sont à distinguer :

a) Il existe une valeur m_1 de m (unique et inférieure à m puisque IM_n est une fonction croissante), telle que l'on ait $a = IM_n$ pour $m = m_1$. Alors, au moyen de la solution de type M correspondante nous appliquons la méthode cinématique comme au § 4.3 et les formules sont les mêmes.

b) Il n'existe pas de valeur de m_1 de m telle que $a = IM_n$: autrement dit $a < IM_n$ pour $m = 0$, c'est-à-dire $a < 2nh$.

On a donc $(2n - 1)h \leqslant IC_n < a < 2nh$.

Nous utilisons alors une solution cinématique, dont le mode de déformation est celui de la solution complète de type M d'ordre n pour $m = 0$ (fig. 12). Le calcul ci-dessous est fait dans l'hypothèse où la plaque a une demi-largeur supérieure ou égale à $2nh$: $L \geqslant 2nh$; (la modification à apporter est simple s'il n'en est pas ainsi).

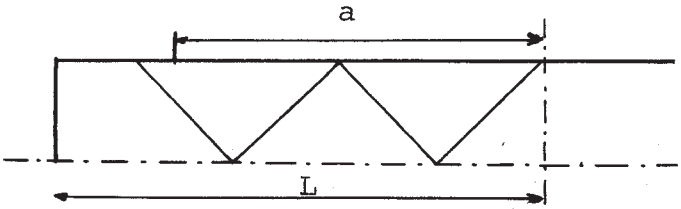


Fig. 12

La puissance dissipée dans toute la plaque est $P_1 = 2k \times U \times 2 \times 2nh$;
La puissance des forces extérieures est :

$P_2 = p'_{m_0} \times U \times 2a - m_0 k\, \Sigma V g_i \cdot lg_i$ (terme de frottement sous le poinçon)

soit $P_2 = p'_{m_0} \times U \times 2a - 2m_0 k\, U \left\{2h\,[1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 3] + [a - 2\,(n - 1)\,h] \times (2n - 1)\right\}$

d'où :

$$p'_{m_0}/2k = 2n\,h/a + m_0 \left\{(n - 1)^2 h/a + \frac{2n - 1}{2}\,[1 - 2\,(n - 1)\,h/a]\right\}$$

qui est linéaire en h/a (4).

4.5 – Majoration de la charge limite, pour ω' compris entre M_n et A_{n+1}, qui coïncide en A_{n+1} avec la charge limite.

Soit ω' compris entre M_n et A_{n+1}. Dans le cas général où IA_{n+1} est une fonction croissante de n, $n > 2$, la méthode est la même que celle exposée au § 4.4 en faisant jouer à A_{n+1} le rôle de M_n :

a) Il existe une valeur m_1 de m unique, telle que l'on ait $a = IA_{n+1}$ pour $m = m_1$: nous appliquons la méthode cinématique en utilisant la solution de type A correspondante.

b) Il n'existe pas de valeur de m telle que $a = IA_{n+1}$ c'est-à-dire que l'on a : $2nh \leqslant a < (2n + 1)\,h$. Nous utilisons la solution cinématique dont le mode de déformation est celui de la solution de type A d'ordre n pour $m = 0$. Dans l'hypothèse où la demi-largeur de la plaque est supérieure à $(2n + 1)\,h$ nous obtenons :

$$(p'_{m_0}/2k) = (2n + 1)h/a + m_0 \left\{n(n - 1)\,h/a + n\,[1 - (2n - 1)\,\frac{h}{a}]\right\} \text{ linéaire en } h/a \text{ (4)}$$

Dans les cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$, où IA_{n+1} est une fonction décroissante puis croissante de n, la méthode est la même avec quelques précisions supplémentaires : le domaine des valeurs de IA_{n+1} pour lesquelles il existe m_1 est limité par la valeur minimale de IA_{n+1} et celle pour $m = m_0$; m_1 doit être choisi entre m_0 et la valeur donnant le minimum ; lorsque IA_{n+1} est inférieure à la valeur minimale, nous utilisons la solution cinématique dont le mode de déformation est celui de la solution de type A minimum.

(4) Pour $m_0 \neq 0$, la pente de cette droite décroît quand n croît, s'annule et devient même négative. Dans le même temps, quand n croît le domaine des valeurs de a/h dans lequel on doit utiliser la solution b) décroît et disparaît.

4.6 – Autres majorations.

Les majorations présentées aux § 4.2, 4.3, 4.4 et 4.5 ne sont évidemment pas les seules de ce type possibles. Ce sont celles qui viennent, semble-t-il, le plus directement à l'esprit, elles sont relativement faciles à calculer ne nécessitant pas de nouvelles constructions de réseaux.

Nous donnons le principe de deux majorations susceptibles de remplacer celles proposées aux § 4.2 et 4.3, et dont l'utilisation assez longue dans le cas général devient très simple dans le cas $m = 0$ du poinçon lisse.

4.6.1 – Majoration pouvant se substituer à celle présentée au § 4.2.

ω' étant situé entre C_n et M_n considérons le réseau de caractéristique représenté à la figure 13 (dans le cas $n = 2$; les notations sont les mêmes qu'au § 4.2).

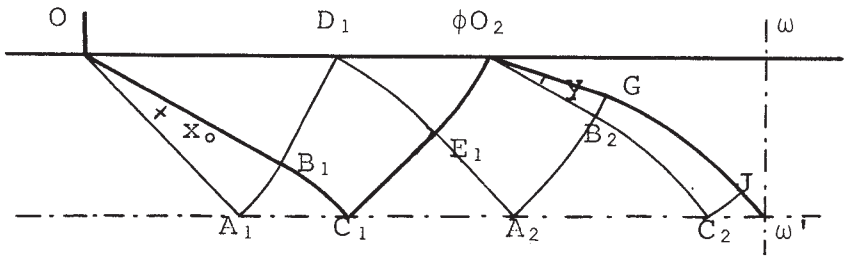


Fig. 13

Le réseau est constitué de celui correspondant à la zone déformée de la solution complète dans le cas $a = I\omega' = IC_n$, prolongé avec un point singulier (caractéristique β dégénérée) en ϕ jusqu'à la caractéristique α, $\phi\, GJ$, qui, poursuivie au-delà de J avec la condition de couper $I\omega'$ à $\pi/4$, aboutit en ω'.

Ce réseau fournit un mode de déformation licite dont l'hodographe est représenté à la figure 14.

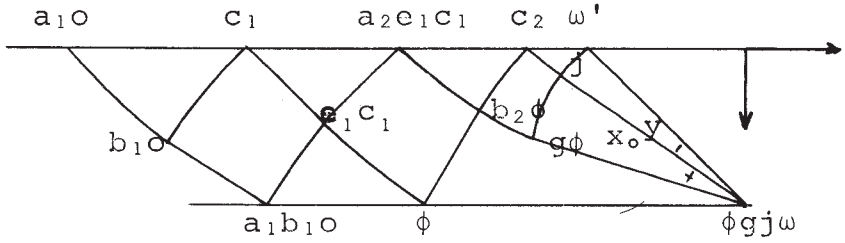


Fig. 14

Il y a enfoncement uniforme du poinçon à la vitesse verticale U et glissement le long de $O\phi$; la ligne $OB_1C_1E_1\phi\, GJ\,\omega'$ est une ligne de discontinuité de vitesse.

Bien qu'il ne s'agisse pas là d'une solution incomplète, nous pouvons commodément appliquer le théorème des travaux virtuels pour le calcul de la puissance dissipée. Nous obtenons ainsi pour le majorant F de la charge limite la relation : $F/2 =$ intégrale des contraintes normales à $I\omega'$ calculées dans le réseau de la figure 14 à partir de la condition $p = k$ dans OIA_1.

4.6.2 – Majoration pouvant se substituer à celle présentée au § 4.3.

La méthode est sensiblement la même que ci-dessus : ω' étant situé entre M_n et A_{n+1}, le réseau des caractéristiques (fig. 15) pour $n = 1$ est constitué de celui correspondant à la zone déformée de la solution complète dans le cas $a = I\omega' = IM_n$, prolongé avec points singuliers en ϕ (caractéristique β dégénérée) et en C_1 (caractéristique α), jusqu'aux caractéristiques α issue de ϕ, $\phi\, FH$, β issue de C_1, C_1GH, qui coupent l'axe $\omega\omega'$ à $\pi/4$.

L'hodographe du mode de déformation licite correspondant est représenté à la figure 16.

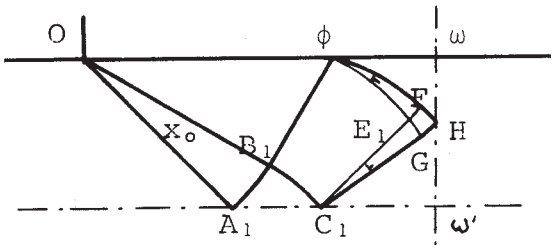


Fig. 15

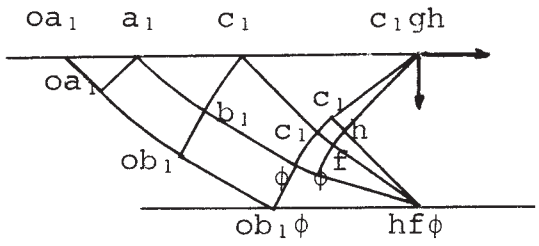


Fig. 16

Il y a glissement sous $O\,\phi$; les lignes OA_1B_1FH et OB_1C_1GH sont des lignes de discontinuité de vitesse.

Le majorant de la charge limite s'obtient par intégration de la composante normale de la contrainte le long de IA_1C_1GH calculée à partir de $p = k$ dans OIA_1.

4.6.3 – Résultats particuliers dans le cas m = O.

Dans le cas $m = O$, les schémas des figures 13 et 15 se simplifient et nous obtenons les formules suivantes :

$a/h = 2n - 2 + I_0\ (2y) + A_0\ (2y)$

$(p_0'/2k) \times (a/h) = 2\,n - 2 + I_0\ (2y) + 2y\ [I_0\ (2y) + I_1\ (2y)]$ majorant

entre M_n et $A_n + 1$:

$a/h = 2n - 1 + I_0\ (2y) + A_0\ (2y)$

$(p_0'/2k) \times (a/h) = 2n - 1 + I_0\ (2y) + 2y\ [I_0\ (2y) + I_1\ (2y)]$ majorant

auxquelles correspondent des courbes majorantes à tangentes horizontales aux points d'ordonnées $p/2k = 1$.

5 – Compléments sur le cas du poinçon lisse.

Quelques développements supplémentaires peuvent être donnés à propos du problème du poinçon lisse.

Parmi les majorations proposées au chapitre précédent, ce sont celles présentées aux § 4.4, 4.5, 4.6.1, et 4.6.2, qui donnent les meilleurs résultats (5). Dans son article, Green (1951) utilise une majoration due à Hill :

$$p/2k = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{h} \times \frac{1}{q} + q\,\frac{h}{a}\right] \quad \text{pour} \quad q\,(q-1) \leqslant (a/h)^2 \leqslant q\,(q+1),\ q \text{ entier} \geqslant 1$$

Nous avons trouvé que cette majoration est la meilleure sauf pour $0{,}75 \leqslant h/a \leqslant 1{,}0$ où on doit lui préférer la majoration $p_1/2k$.

D'autre part, Green (1951) a construit une solution incomplète (6) pour ce problème, valable dans l'intervalle $1/2 < h/a < 1$. Celle-ci fournit un majorant de la charge limite meilleur que ceux donnés par les majorations ci-dessus, dans cet intervalle.

Nous avons essayé d'utiliser la même méthode que celle employée à la deuxième partie pour prolonger les solutions incomplètes de Green. Les résultats obtenus ne doivent être considérés que comme des présomptions. En effet, les valeurs numériques données par Green ne permettent qu'une construction assez sommaire des réseaux utilisés sur lesquels on doit encore effectuer ensuite des calculs.

(5) Le majorant du § 4.6.1 se réduit, dans l'intervalle $1/2 < h/a < 1$ à $p_1/2k$.

(6) Collins (1968 a, c) a récemment repris cette solution et démontré certaines relations trouvées numériquement par Green.

Nous avons trouvé que dans le cas du schéma d'écoulement (de type I chez Green) qui correspond à l'intervalle $\sqrt{2}/2 \leqslant h/a \leqslant 1$, le prolongement par cette méthode paraît possible et nous avons obtenu une valeur minimale de la largeur du bloc, supérieure à celle du poinçon (cf. § 3.1) pour qu'il en soit ainsi.

Par exemple, pour $h/a = 1/1{,}386 = 0{,}722$ où $p/2k = 1{,}0376$, on a $L/a = 1{,}1$.

Dans le cas du schéma d'écoulement (de type II) correspondant à h/a compris entre 0,500 et 0,707, il n'a pas paru possible d'utiliser la méthode, les difficultés rencontrées étant du même ordre que dans la deuxième partie pour $h/a < 5{,}298$.

IV – FROTTEMENT DE COULOMB SOUS LE POINÇON

La recherche de solutions incomplètes dans l'étude du problème de la presse, avec frottement de Coulomb aux interfaces a été abordée par Bishop (1958) et traitée par Szczepinski (1967).

τ désignant la contrainte tangentielle et σ la *pression* normale, la condition de frottement sous le poinçon est :

$|\tau| \leqslant \text{Inf}\,[\mu\sigma, k]$ si $[\![\vec{V}]\!] = 0$,
$|\tau| = \text{Inf}\,[\mu\sigma, k]$ si $[\![\vec{V}]\!] \neq 0$, $\vec{\tau}$, $[\![\vec{V}]\!]$ colinéaires et puissance dissipée positive.

Le réseau de lignes de glissement utilisé est celui de la figure 17 où l'angle des caractéristiques α sous le poinçon varie au fur et à mesure que $p \nearrow$ dans chaque champ non homogène $D_nE_nO_n + 1$.

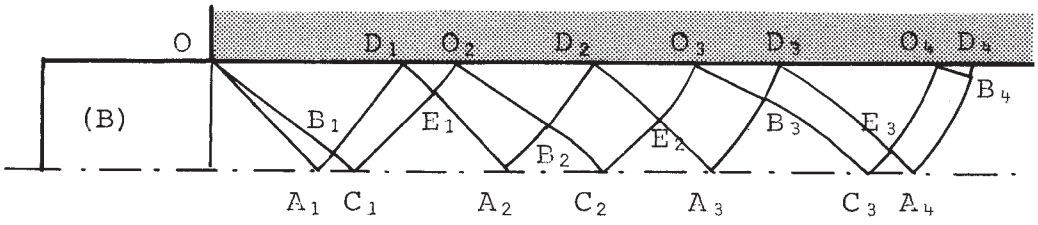


Fig. 17

La méthode employée par ces auteurs, semblable à celle du chapitre III § 2.1, consiste à placer $\omega\omega'$ sur le réseau, et à ne conserver de celui-ci que la partie située à gauche de la caractéristique α, $\rho\omega'$ aboutissant en ω'. On recherche ensuite s'il existe un mode de déformation cinématiquement admissible dans lequel $\rho\omega'\rho'$ soit rigide, et $OI\omega'\rho$ la zone déformée de gauche. Un tel mode de déformation n'existe que si ω' n'appartient pas à un segment C_nA_{n+1} et Szczepinski signale que si ω' appartient à un tel segment on ne connaît pas de solution complète.

Le résultat que nous avons obtenu au § 3.2 du chapitre précédent est également valable ici, c'est-à-dire que, en fait, le réseau de la figure 17 permet encore la construction d'une solution incomplète lorsque ω' est au milieu d'un segment C_nA_{n+1}. Deux lignes de discontinuité de vitesses (les deux caractéristiques) partent de E_n et *non du centre du bloc,* et après réflexion aboutissent en O. Ce résultat est essentiel, ici encore, pour retrouver lorsque $\mu \searrow 0$, le résultat de Hill (1950) relatif aux solutions incomplètes quand le poiçon est lisse.

Nous n'irons pas plus avant dans l'étude du problème de la presse avec frottement de Coulomb. En particulier, on pourrait se poser la question de savoir si la méthode utilisée en III § 2.2 permet la construction de solutions statiques : vérification de la condition de frottement sur $\rho\omega\rho'$.

QUATRIÈME PARTIE

sur le poinçonnement d'un demi-plan non homogène en déformation plane

I – INTRODUCTION.

Nous allons maintenant étudier le poinçonnement d'un demi-plan en matériau non homogène, rigide, parfaitement plastique, isotrope, vérifiant en chaque point le principe du travail maximal, et dont le critère d'écoulement est celui de Tresca. La cission limite, $k\ (M)$, varie d'un point à un autre, le coefficient de rugosité partielle sous le poinçon, $m\ (M)$, est aussi variable.

Les conditions aux limites sont les mêmes que dans le cas classique, et la théorie des charges limites est évidemment applicable.

Un cas particulier, des plus importants, est celui où le matériau constitutif du demi-plan est isotrope stratifié : sa cission limite est alors fonction uniquement de la profondeur $k\ (M) = k(x),\ (x \geqslant O)$ et m constant.

Nous allons d'abord traiter de façon assez détaillée la problème du bicouche où une couche supérieure d'épaisseur h et de cission limite constante k, repose sur une couche semi-infinie de cission limite constante K.

Les résultats obtenus nous conduiront ensuite à aborder le cas du demi-plan stratifié quelconque, auxquels ils sont directement applicables.

D'autres cas de non homogénéité avec sauts ont été étudiés par Rychlewski (1966 b) qui fournit pour ces problèmes des solutions incomplètes.

II – PROBLEME DU BICOUCHE

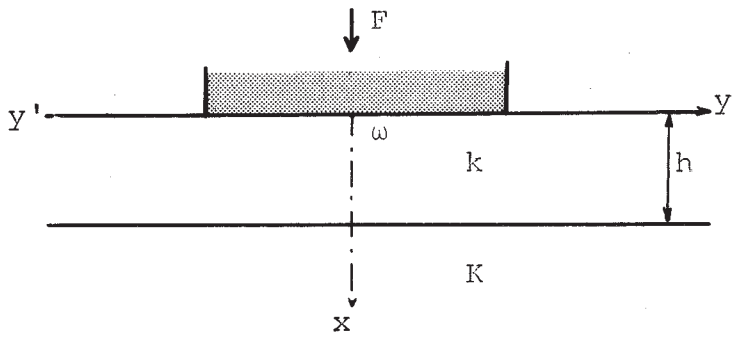


Fig. 1

Le problème est analogue au cas du matériau homogène précédemment étudié. Le poinçon rectangulaire rigide de largeur $2a$ agissant sur la couche supérieure est soumis à la force F verticale axiale dont on cherche la valeur limite. U désigne la composante verticale, donnée, de la vitesse du point d'application de cette force. Le coefficient de rugosité partielle m est constant sous le poinçon. Les conditions aux limites sont : déplacements nuls à l'infini, contraintes appliquées nulles sur $y'y$ hors du segment $(-a, a)$.

Sur la ligne de contact entre les deux couches, on suppose qu'il y a adhérence parfaite : la cission limite au glissement entre les deux couches est $\tau = \text{Inf.}\ (k, K)$; si cela est nécessaire, nous supposons de plus que la liaison est bilatérale (tractions permises).

Ces conditions de contact reviennent à considérer le demi-plan comme formé d'un matériau continu de cission limite $k\ (x) = k + (K - k) \times Y\ (x - h)$, (1), comme dans le cas où $k\ (x)$ est une fonction continue.

Nous verrons dans la suite que pour la plupart des résultats que nous allons obtenir, cette hypothèse que la liaison est bilatérale est superflue.

(1) Y : fonction d'Heaviside.

Si on suppose $K = \infty$ on obtient le cas particulier correspondant au poinçonnement d'une bande rigide, plastique infinie, reposant avec adhérence parfaite sur un support rigide.

C'est d'abord ce problème que nous allons étudier.

III – BICOUCHE DONT LA COUCHE INFERIEURE EST INFINIMENT RIGIDE.

1 – Solutions incomplètes.

1.1 – Schéma d'écoulement.

Il est clair que $\forall m$, $\forall h/a \geqslant \sqrt{2}$, le schéma d'écoulement de Prandtl fournit un mode de déformation permettant la construction d'une solution incomplète à laquelle correspond le majorant de la charge limite $p^1 = F^1/2a = (\pi + 2)k$.

Pour $m = 1$ et $h/a < \sqrt{2}$, un schéma d'écoulement a été proposé par Mandel, permettant la construction d'une solution incomplète [voir aussi Collins (1968 b), Johnson et Kudo (1960).]

En généralisant ce schéma de façon analogue à ce qui a été fait dans la troisième partie (chapitre III), nous pouvons construire des solutions incomplètes $\forall m$, $O \leqslant m \leqslant 1$, et $\forall h/a < \sqrt{2}$ (fig. 2).

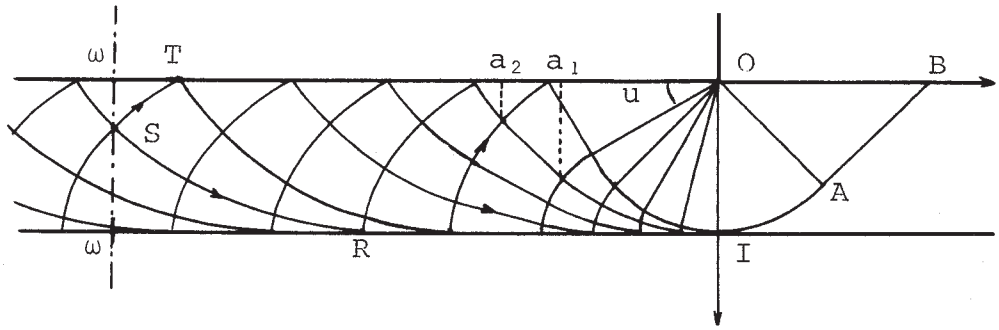


Fig. 2

1.2 – Majorant de la charge limite : comportement pour $a/h \nearrow \infty$.

Les contraintes sont connues dans toute la zone déformée, à partir de la condition $p = k$ dans OAB. Pour calculer F^1_m, majorant de la charge limite correspondant, il suffit par exemple d'intégrer les contraintes normales le long de OTS.

Soit p^1_m la valeur moyenne de la pression sous le poinçon $p^1_m = F^1_m/2a$. Quand $a/h \nearrow \infty$, $p^1_m \nearrow \infty$.

Si, supposant h fixé, nous faisons croître a vers l'infini ($a/h \nearrow \infty$), le réseau de lignes de glissement sous le poinçon tend vers le réseau limite de Prandtl (cf. Hill 1950) où les caractéristiques β, dans la moitié droite de l'écoulement sont des cycloïdes dont le rayon du cercle générateur est $r = h/(m + 1)$ et les points de rebroussement situés sur la droite $x = h$ (figure 3).

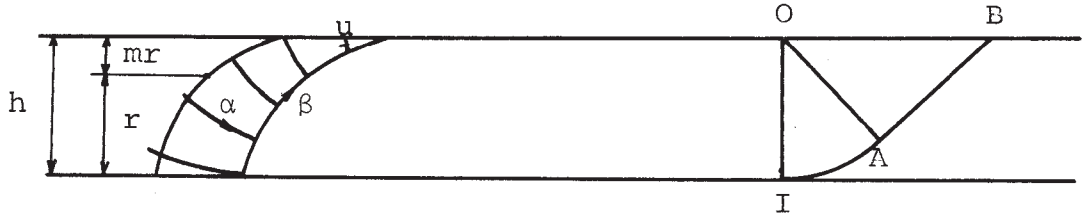


Fig. 3

Pour l'étude du comportement asymptotique de p_m^1, on peut considérer que pour a/h suffisamment grand, tout le réseau de lignes de glissement sous le poinçon est un réseau limite de Prandtl ; les contraintes y sont connues à une constante près que l'on détermine en écrivant l'égalité des forces horizontales exercées sur OI par le réseau à gauche et par le réseau $OIAB$ supposé inchangé à droite.

Par intégration nous obtenons pour p_m^1 la formule asymptotique :

$$p_m^1 \sim k\left(1 + \frac{\pi}{2} + \frac{m\sqrt{1-m^2} + \operatorname{Arcsin} m + \pi/2}{m+1} + \frac{m+1}{2}\,\frac{a}{h}\right)$$

La courbe de p_m^1 en fonction de a/h a donc une asymptote rectiligne.

Pour les cas $m = 0$ et $m = 1$ nous avons :

$$p_0^1 \sim k\,(1 + \pi + a/2h) \qquad , \qquad p_1^1 \sim k\,(1 + \pi + a/h)$$

1.3 – Courbes représentatives des majorants.

Nous désignons par $\mathbf{C}_m^1$ la courbe représentative de p_m^1 en fonction de h/a.

Pour $h\sqrt{2}/2 < a < a_1$, il est clair d'après la figure 2 que $p_m^1 = p_1^1$, puisque les réseaux de lignes de glissement utilisés dans les deux cas ($m = 1$ et $m < 1$) sont les mêmes.

Pour $a_1 < a < a_2$, comme dans la troisième partie (chapitre III), p_m^1 est une fonction affine de h/a.

Ainsi $\mathbf{C}_m^1$ est confondue avec $\mathbf{C}_1^1$ pour $h/a_1 \leqslant h/a \leqslant \sqrt{2}$ puis est formée d'un segment de droite tangent à $\mathbf{C}_1^1$ au point $h/a = h/a_1$, pour $h/a_2 \leqslant h/a \leqslant h/a_1$; ensuite $\mathbf{C}_m^1$ est une courbe tangente au segment de droite en $h/a = h/a_2$ et à concavité tournée vers les p positifs (figure 4).

En particulier, dans le cas $m = 0$, le segment rectiligne de $\mathbf{C}_0^1$ est l'horizontale $p = (\pi + 2)k$ pour $\sqrt{2}/2 \leqslant h/a \leqslant \sqrt{2}$.

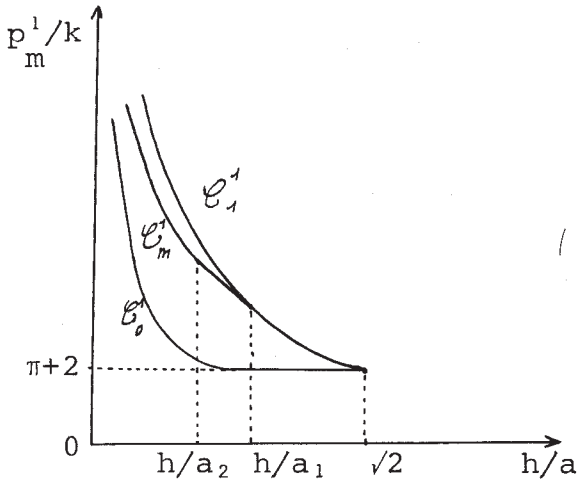


Fig. 4

Pour les valeurs de h/a voisines de zéro, la représentation de la figure 5, en fonction de a/h est plus intéressante :

Les courbes sont en effet asymptotes aux *droites* trouvées au § 1.2 (figure 5).

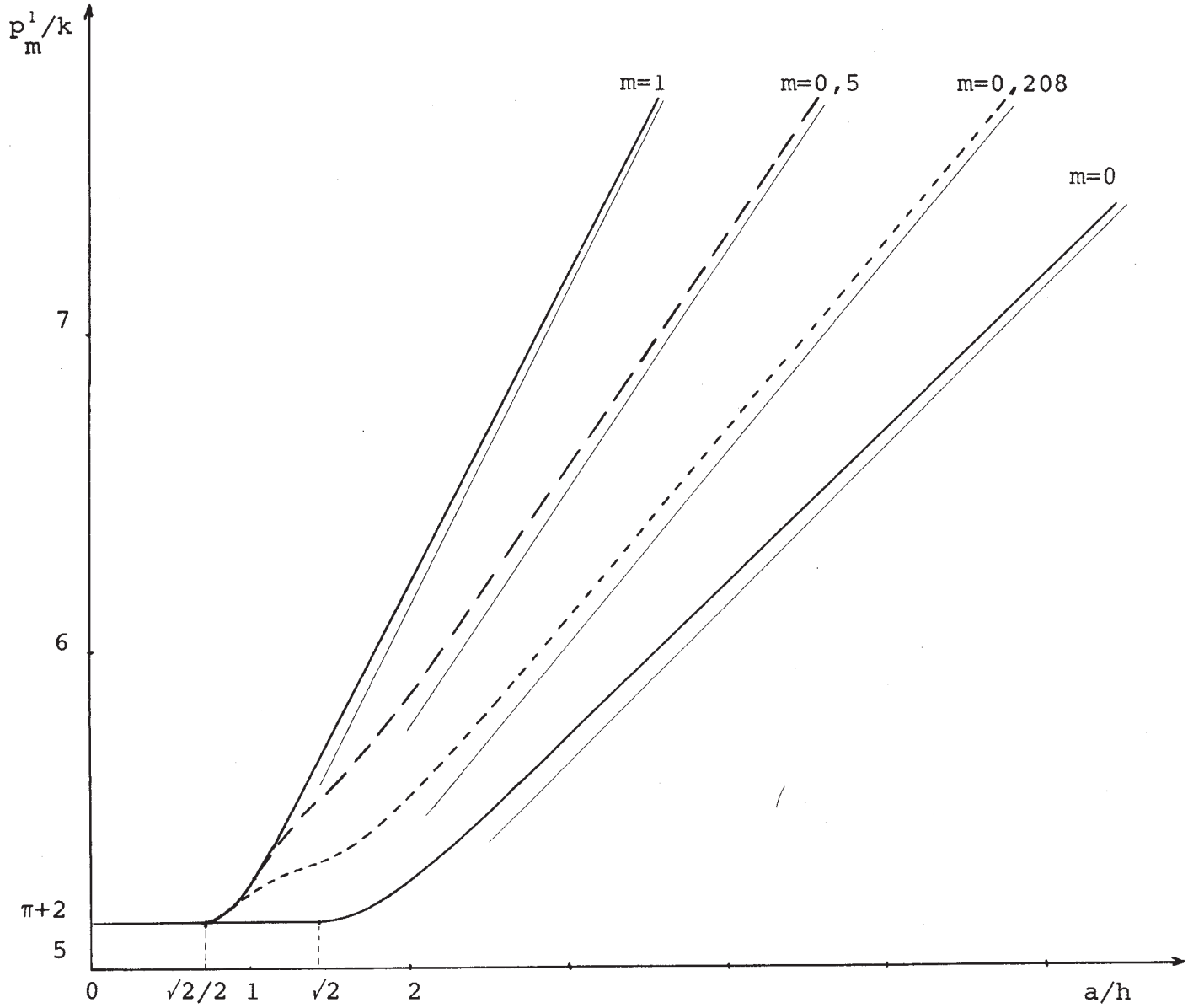


Fig. 5

1.4 – Relation entre p_0^1 et p_1^1.

La figure 6 représente pour une même valeur de la largeur a du poinçon et des épaisseurs h_1 et h_0 dans les rapports 1 et 2 (on suppose $h_1 < a\sqrt{2}$), les réseaux de lignes de glissement et les hodographes pour $m = 1$ et $m = 0$.

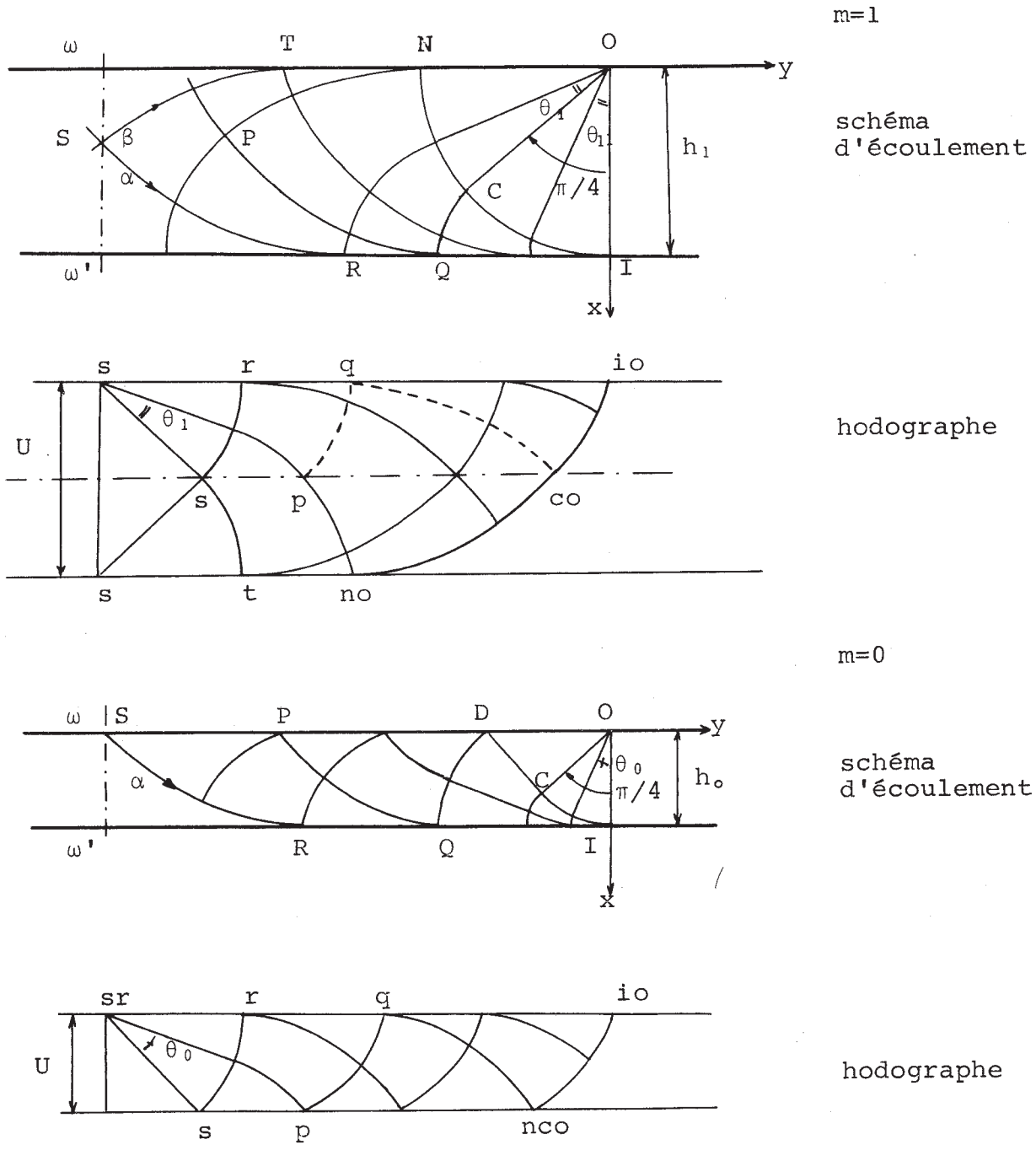


schéma d'écoulement

hodographe

schéma d'écoulement

hodographe

Fig. 6

Considérons d'abord le cas m = 1.

Soit S le sommet du réseau : point du réseau situé sur l'axe du poinçon, en lequel $\phi = \pi/4$ [$\phi = (Ox, \vec{\alpha})$]. D'après le premier théorème de Hencky les angles rétrogrades, inférieurs à $\pi/4$, faits en O, après réflexions, par les caractéristiques α et β issues de S, avec Ox et la seconde bissectrice des axes sont égaux (angles marqués sur la figure). Soit θ_1 leur valeur absolue commune, $O \leqslant \theta_1 < \pi/4$. Posant $\Theta_1 = \frac{\theta_1 + n_\alpha + n_\beta - 1}{2} \times \frac{\pi}{4}$ où n_α et n_β sont les nombres de réflexions des caractéristiques α et β issues de S entre O et S, nous avons $p_S = k(1 + \pi + 4\,\Theta_1)$.

Soit (C) la courbe lieu des points S pour les différentes valeurs de a (h fixé). Pour le calcul du majorant de la charge limite, on peut effectuer l'intégration de la contrainte normale le long de (C) de O à S; nous obtenons ainsi :

$$F_1^1/2 = k\ [(\pi + 2)\ h_1\ \sqrt{2}/2 + \int_C^S (p_S/k + 1)\ (-\ dy_S)]$$

ou $$F_1^1/2 = k\ [(\pi + 2)\ h_1\ \sqrt{2}/2 + \int_{\Theta = 0}^{\Theta = \Theta_1} (\pi + 2 + 4\,\Theta) \times \frac{-dy_S}{d\Theta}\, d\,\Theta] \qquad (1)$$

Sur l'hodographe : la vitesse le long de OI est horizontale uniforme ; puisque la déformation plastique a lieu sans variation de volume, on a $U/v_I = h/a$. On en déduit que si on choisit les unités de telle sorte que U sur l'hodographe soit représenté par la même longueur que h_1 sur le schéma d'écoulement, l'hodographe et le réseau de lignes de glissement ont même longueur $a = y_S = si$. (si désigne la distance horizontale de s à i.)

L'hodographe est un réseau de Hencky simple (déjà rencontré dans la troisième partie). Il est intéressant de considérer le réseau limité à la profondeur $U/2$ et dans lequel on trace les lignes symétriques de celles de la moitié inférieure. L'angle θ_1 apparaît comme l'angle tel que la longueur de ce réseau réduit soit $si = a$, le nombre de réflexions de la ligne du réseau entre i et s est alors égal à $n_\alpha + n_\beta$.

Dans le cas $m = 0$.

Désignons par S le sommet du réseau. La courbe (C) lieu des points S est l'horizontale $x = 0$, $y \leqslant 0$. θ_0 est l'angle marqué sur la figure $0 \leqslant \theta_0 < \pi/4$, et soit $\Theta_0 = \theta_0 + \frac{n - 1}{2} \times \frac{\pi}{4}$ où n est le nombre de réflexions de la caractéristique α aboutissant en S entre S et O. On a $p_S = k\ (1 + \pi + 4\ \Theta_0)$ et le calcul du majorant de la charge limite conduit à :

$$F_0^1/2 = k\ [(\pi + 2)h_0\ \sqrt{2} + \int_O^S (p_S/k + 1)\ (-\ dy_S)]$$

ou $$F_0^1/2 = k\ [(\pi + 2)\ h_0\ \sqrt{2} + \int_{\Theta = 0}^{\Theta = \Theta_0} (\pi + 2 + 4\ \Theta)\ \frac{-dy_S}{d\Theta}\ d\,\Theta\ ] \qquad (2)$$

Sur l'hodographe : comme dans le cas précédent, l'hodographe a même longueur que le réseau de lignes de glissement. On voit que ce réseau de Hencky est identique à celui considéré plus haut limité à la profondeur $U/2$. θ_0 est l'angle tel que la longueur de ce réseau soit $si = a$, le nombre de réflexions de la ligne du réseau entre i et s étant alors égal à n.

On voit ainsi que pour des valeurs h_1 et $h_0 = h_1/2$ de la profondeur, les valeurs de θ correspondant à une même valeur y_S sont égales pour $m = 1$ et $m = 0$ $\theta_1 = \theta_0$, ainsi que les valeurs de Θ_1 et Θ_0 car $n_\alpha + n_\beta = n$. Les fonctions y_S, Θ, sont donc les mêmes dans les deux cas et en comparant (1) et (2) on voit que :

$$F_1^1\ (h_1/a) = F_0^1\ (h_0/a) \text{ et } p_1^1\ (h_1/a) = p_0^1\ (h_0/a) \text{ pour } h_1 = 2h_0.$$

$$\text{ou encore } p_0^1\ (\frac{2a}{h}) = p_1^1\ (\frac{a}{h}) \qquad (3)$$

On vérifie que les formules données pour les asymptotes au § 1.2, satisfont bien (3).

En anticipant sur les résultats du paragraphe suivant, nous énonçons la propriété (3) sous la forme :

L'épaisseur h de la couche supérieure étant fixée, la force portante F d'un poinçon parfaitement rugueux de largeur a quelconque (2) est la moitié de celle d'un poinçon lisse de largeur double.

---

(2) En effet (3) est vérifiée pour $a/h < \sqrt{2}/2$ par la solution de Prandtl.

Ou encore

La force portante F d'un poinçon parfaitement rugueux agissant sur une bande plastique d'épaisseur h est égale à celle d'un poinçon lisse de même largeur agissant sur une bande d'épaisseur moitié.

2 – Solutions complètes associées.

Pour compléter les solutions incomplètes du § 1 il faut et il suffit que nous mettions en évidence un champ de contraintes licite prolongeant ces solutions dans la couche supérieure.

2.1 – $h/a \geqslant \sqrt{2}$.

La solution incomplète à prolonger est celle de Prandtl. On peut utiliser pour cela les solutions complètes de Bishop (1953), de Shield (1954) ou de Sayir et Ziegler (1968), qu'il suffit de tronçonner à la profondeur h.

Remarquons que le prolongement de Bishop fournit des contraintes nulles à l'infini, mais que pour h suffisamment grand des tractions apparaissent à l'interface entre la bande et son appui rigide. La solution complète ainsi obtenue ne sera donc valable que si ces tractions sont acceptables.

Par contre, dans le prolongement de Shield, les contraintes normales à l'interface avec le support rigide sont toutes des compressions, mais les contraintes à l'infini ne sont pas nulles (pression horizontale égale à $2k$). La nullité des contraintes à l'infini n'étant pas nécessaire, cette solution complète paraît devoir être préférée à la précédente.

2.2 – $h/a < \sqrt{2}$.

Pour compléter la solution incomplète de la figure 2, nous utilisons le prolongement suivant (figure 7) :

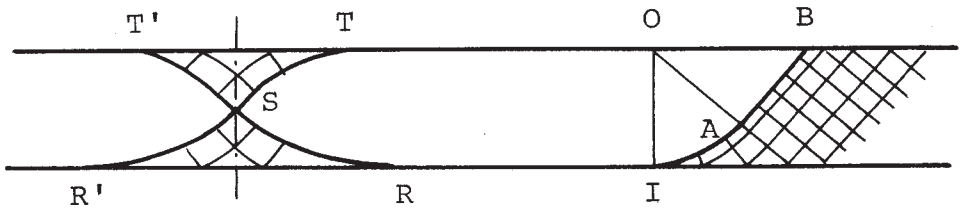


Fig. 7

Dans le triangle rigide, lié au poinçon $T'ST$, nous considérons la restriction du champ continu, en équilibre, entièrement plastique défini à partir des caractéristiques symétriques TS et ST' ; on vérifie par application au théorème de Hencky que le long de TT' on a $|\tau| \leqslant mk$.

Dans le triangle rigide immobile SRR', même méthode ; on y vérifie par application du théorème de Hencky que le long de RR' on a $p > k$ et que la contrainte normale sur RR' est donc toujours une compression.

A droite de la ligne de glissement α, IAB : nous utilisons le champ de contraintes continu, en équilibre, entièrement plastique dont les lignes caractéristiques sont représentées sur la figure : poursuite du champ radial et du champ homogène ; on voit aisément que les contraintes normales à l'interface sont des compressions de I à E et sont nulles au delà.

3 – Conclusions.

Dans ce problème, une solution complète est connue $\forall\, h/a$, $\forall m$, fournissant ainsi la valeur exacte de la charge limite. Celle-ci est représentée sur les courbes des figures 4 et 5.

IV – BICOUCHE DANS LE CAS OU $k \leqslant K < +\infty$.

1 – Solution statique.

Considérons les champs de contraintes correspondant aux solutions complètes de Bishop et de Shield pour le problème du poinçonnement d'un demi plan supposé homogène de cission limite k par un poinçon rigide de largeur $2a$. Ces champs de contraintes, à propos desquels les mêmes remarques sont à faire qu'au chapitre précédent § 2.1, sont licites pour le problème du bicouche étudié ici. Ils fournissent la valeur $p^0 = (\pi + 2)k$ comme minorant de la charge limite $\forall m$, $\forall h/a$.

p^0 est le meilleur minorant possible de la charge limite ne dépendant pas de K. En effet, un minorant ne dépendant pas de K doit être inférieur ou égal à la charge limite $\forall K \geqslant k$, or pour $K = k$, $(\pi + 2)\,k$ est la charge limite $\forall h/a$.

2 – Solutions incomplètes.

Les solutions incomplètes que nous avons proposées au chapitre précédent § 1, $\forall\, h/a \geqslant O$, sont encore valables dans le cas présent. Les courbes des figures 4 et 5 représentent donc encore des majorants de la charge limite.

3 – Solutions complètes associées.

Les solutions complètes (si $K = \infty$) du § 2 du chapitre III, peuvent encore être utilisées mais elles ne sont pas complètes si $K < \infty$. Il est nécessaire pour obtenir des solutions complètes du problème actuel de les poursuivre par des champs de contraintes licites dans le milieu rigide plastique inférieur dont la cission limite n'est plus infinie.

3.1 – $h/a \geqslant \sqrt{2}$.

On peut comme au chapitre précédent, utiliser les prolongements de Bishop ou de Shield dans le matériau de la couche supérieure supposé maintenant constituer tout le demi-espace. Nous retrouvons les champs de contraintes licites du § 1.

3.2 – $h/a < \sqrt{2}$.

3.2.1 – Position du problème.

Dans la couche supérieure, nous utilisons le champ de contraintes licite exposé en III § 2.1 (fig. 7). Ce champ peut-il être prolongé dans la couche inférieure ?

Nous allons montrer que, supposant k fixé, il existe une valeur finie $K_0(h/a, m)$ fonction de h/a et de m, telle que si $K \geqslant K_0$, $p_m^1(h/a)$ est la valeur exacte de la charge limite.

Cela signifie pratiquement que *la force portante du poinçon agissant sur le bicouche atteint celle du même poinçon agissant sur une couche plastique reposant sur une assise rigide, dès que la cission limite du demi-plan inférieur atteint une valeur suffisante mais* **finie** ([3]).

Nous donnerons une méthode permettant de construire un majorant de $K_0\,(h/a, m)$, soit $K_0'\,(h/a, m)$, et ensuite une méthode sera développée fournissant, entre autres, un minorant K_0'' de K_0.

3.2.2 – Existence de K_0 fini, calcul de K_0'.

Pour prouver l'existence de K_0 fini, il suffit, h/a et m étant fixés, de mettre en évidence une solution complète associée à la solution incomplète du § 1 et valable pour $K = K_0'$ fini. Cette solution est alors certainement valable $\forall K \geqslant K_0'$ et fournit comme valeur exacte de la charge limite $p_m^1(h/a)$: K_0 existe donc, et il est inférieur ou égal à K_0'.

---

(3) En fait, c'est évidemment le rapport K/k des cissions limites des deux matériaux qui intervient.

Considérons dans la couche supérieure le champ de contraintes licite au chapitre III § 2.2. La distribution des contraintes normales et tangentielles produites à l'interface entre les deux couches par ce champ de contraintes est représentée à la figure 8.

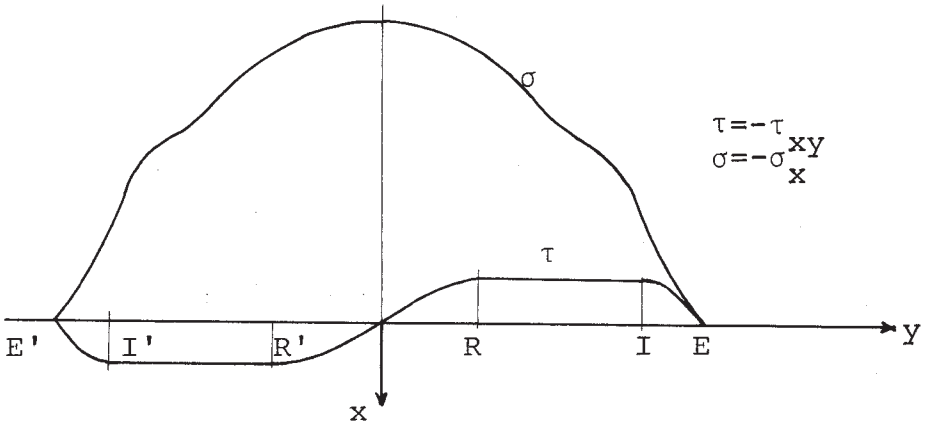


Fig. 8

$\sigma(y)$ et $\tau(y)$ sont continues sur $-\infty, +\infty$, de support $E'E$. $\sigma(y) = \sigma(-y)$ et $\tau(y) = -\tau(-y)$; $\sigma'(y)$ et $\tau'(y)$, dérivées premières, sont continues et bornées sur $E'E$, discontinues en E' et E.

Nous cherchons à mettre en évidence, dans le demi-plan chargé à sa surface libre par $\sigma(y)$ et $\tau(y)$, un champ de contraintes licite :

Nous utilisons pour cela la classique solution élastique, du problème de Flamant [cf. par ex. Courbon (1954)]. L'intégration de ces formules avec les distributions $\sigma(y)$ et $\tau(y)$ fournit en chaque point σ_x, σ_y, τ_{xy}. Les contraintes ainsi obtenues sont bornées dans tout le demi-plan $x \geqslant h$ (la démonstration de cette propriété, assez longue, est donnée en l'annexe 5).

$J_2 = \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}^2 \}$ est donc aussi borné. Soit $(K_0')^2$ la valeur de la borne supérieure de J_2. Il est clair que K_0', fini, remplit bien les conditions requises et est bien en majorant de K_0.

L'existence de K_0 fini est donc démontrée.

La methode donnée ci-dessus fournit même un moyen de calcul numérique d'un majorant de K_0.

Il importe de remarquer que l'utilisation d'une solution élastique pour le champ de contraintes, dans la zone non déformée, n'est absolument pas une nécessité ; c'est ici un moyen commode pour mettre en évidence une solution et établir le résultat annoncé.

Nous ne trouvons par cette méthode qu'un majorant de K_0. Il est clair qu'on en obtiendrait un meilleur si on connaissait la charge limite d'un demi-plan homogène chargé par des distributions $\sigma(y)$ et $\tau(y)$ croissant proportionnellement à celles de la figure 8.

3.2.3 – Minorant de $K_0(h/a, m)$.

La détermination d'un minorant de $K_0(h/a, m)$ se fait au moyen de solutions cinématiques.

Nous savons (§ 3.2.2) qu'il n'existe pas de majorant de la charge limite fonction uniquement de k, m et h/a meilleur que $p_m^1(h/a)$, puisque pour K suffisamment grand, $p_m^1(h/a)$ est la valeur exacte de la charge limite.

Soit un majorant de la charge limite dépendant de m, h/a, k et K : on peut l'écrire, k étant fixé, $p_m^{(2)}(K, h/a)$. On peut supposer $p_m^{(2)}(K, h/a)$ fonction non décroissante de K (4).

Soit alors $K_0''(h/a, m)$ la solution de $p_m^{(2)}(K, h/a) = p_m(h/a)$: $K_0''(h/a, m)$ est un minorant de K_0 (h/a, m). En effet, pour $K < K_0''(h/a, m)$ on a $p_m^{(2)}(K, h/a) < p_m^1(h/a)$ et il est donc impossible que $p_m^1(h/a)$ soit la valeur exacte de la charge limite.

On a alors du point de vue pratique :

$k \leqslant K \leqslant K_0''$	: $p_m^{(2)}(K, h/a)$	meilleur majorant ;
$K_0'' \leqslant K < K_0'$	: $p_m^1(h/a)$	meilleur majorant ;
$K_0' \leqslant K$	: $p_m^1(h/a)$	valeur exacte de la charge limite.

Le chapitre suivant est consacré à l'étude d'une solution cinématique simple permettant de calculer un $K_0''(h/a, m)$.

4 - Remarque.

Dans l'étude de ce problème, nous ne considérons pas de solution dont la zone déformée s'étend dans les deux matériaux. De telles solutions ont été utilisées par Rychlewski (1966 b) pour un problème voisin et les relations de " réfraction " des caractéristiques, au franchissement de la ligne de contact entre les deux matériaux sont connues (ibid.).

Ici, la construction d'une telle solution, en partant des données sur la surface libre, nécessite la présence d'au moins une ligne de discontinuité pour les contraintes dans la couche inférieure, ce qui entraîne de grosses difficultés pour cette construction, les méthodes usuelles " de proche en proche " n'étant plus applicables.

Une telle solution une fois construite ne fournirait qu'un majorant de la charge limite, le problème du prolongement restant posé.

V – ETUDE D'UNE SOLUTION CINEMATIQUE DU PROBLEME DU BICOUCHE.

1 – Calcul de la puissance dissipée.

Nous rappelons d'abord la formule générale pour le calcul de la puissance dissipée en déformation plane, dans le cas de milieu isotrope non homogène.

Soit un champ de vitesse licite en déformation plane. Dans un tel champ, la vitesse de dilatation volumique étant nulle, il existe en chaque point M deux directions orthogonales $\vec{M\alpha}$ et $\vec{M\beta}$ telles que la vitesse de déformation soit nulle dans chacune de ces deux directions. Les lignes enveloppes des éléments de contact ainsi définis peuvent être prises comme bases d'un système de coordonnées curvilignes orthogonales, lignes α et lignes β, que l'on oriente de telle sorte qu'en chaque point $(M\alpha, M\beta) = \pi/2$. On désigne par ϕ l'angle fait en M par la ligne α avec une direction de référence Ox, et on définit les rayons de courbure algébriques des lignes en M par :

$$R = \frac{ds_\alpha}{d\phi} \qquad S = -\frac{ds_\beta}{d\phi}$$

La formule générale de la puissance dissipée dans un élément de matière centré en M est :

$$d\,\mathbf{P}\,(M) = k\,(M)\,\left|\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + \frac{v_\alpha}{R} + \frac{v_\beta}{S}\right| \times |ds_\alpha\, ds_\beta| \qquad (1)$$

en désignant par v_α et v_β les coordonnées de la vitesse de M sur $\vec{M\alpha}$ et $\vec{M\beta}$.

(4) Sans restreindre la généralité, car les théorèmes limites permettent toujours la construction d'un majorant possédant cette propriété à partir d'un qui ne la vérifie pas.

La puissance dissipée totale est $\mathbf{P} = \int \mathrm{d}\mathbf{P}\,(\mathrm{M})$.

La formule (1) et l'intégrale sont valables au sens des distributions (ici intégrales de Stieltjes) dans le cas où les vitesses ont des discontinuités.

2 – Position du problème.

2.1 – Buts de l'étude.

Pour appliquer la méthode cinématique de détermination de la charge limite dans les meilleures conditions, nous cherchons à trouver un mode de déformation licite qui corresponde à une puissance dissipée totale aussi faible que possible et à calculer cette puissance. Comme il est exclu, sauf dans certains cas très particuliers, que l'on puisse chercher le minimum sur l'ensemble de tous les modes de déformation licites, on se restreint à chercher le minimum sur une classe plus ou moins vaste de modes de déformation licites.

2.2 – Classe de modes de déformation licites choisie.

Les modes de déformation licites que nous considérons utilisent le réseau de lignes de glissement de la solution de Prandtl dans le cas homogène (fig. 9).

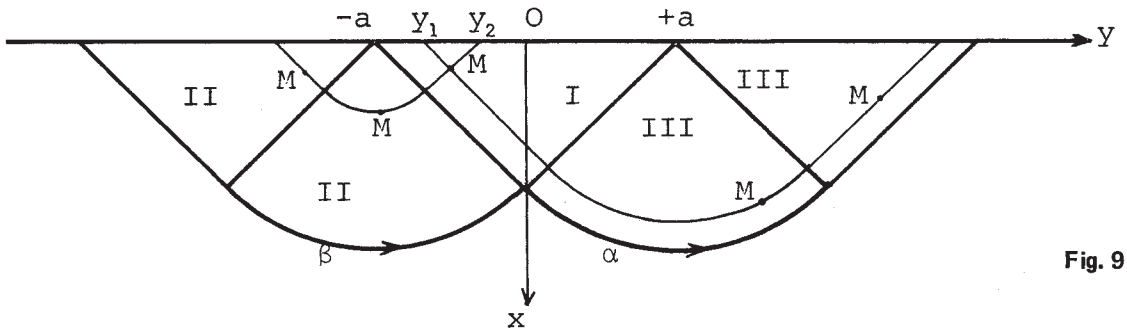


Fig. 9

$v(y)$ désignant la vitesse de glissement sous le poinçon et y_1 et y_2 étant définis comme indiqué sur la figure, le champ de vitesse a pour expression dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales α, β :

$$\left.\begin{aligned} v_\alpha\,(M) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,[U + v\,(y_1)]\,(1_{\mathrm{I}} + 1_{\mathrm{III}}) \\ v_\beta\,(M) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,[-\,U + v\,(y_2)]\,(1_{\mathrm{I}} + 1_{\mathrm{II}}) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

en désignant par 1_A la fonction caractéristique de l'ensemble A.

$v(y)$ est supposée être à variation bornée pour que la puissance dissipée soit calculable [formule (1)].

Ces modes de déformation sont licites.

D'après (1) on a pour expression de la puissance dissipée totale P dans un tel mode de déformation :

$$P = \int k\,(M)\,\left|\frac{\partial\,v_\alpha}{\partial\,s_\beta} + \frac{\partial\,v_\beta}{\partial\,s_\alpha} + \frac{v_\alpha}{R} + \frac{v_\beta}{S}\right|\,|\,ds_\alpha\,ds_\beta\,| + \int_{\mathrm{D'C'BA}} k\,(M)\,|\,v\,(a) - U\,|\,ds$$

$$+ \int_{A'BCD} k\,(M)\,|\,U + v\,(-\,a)\,|\,ds + \int_{-a}^{+a} m\,(M)\,k\,(M)\,|\,v\,(y)\,|\,dy \qquad (3)$$

[intégrales de Stieltjes comme dans (1)].

En posant $v(-a^-) = -U$ et $v(a^+) = U$, les trois premiers termes de (3) peuvent être regroupés et l'on a :

$$P = \int k\ (M) \left| \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + \frac{v_\alpha}{R} + \frac{v_\beta}{S} \right| \left| ds_\alpha\ ds_\beta \right| + \int_{-a}^{+a} m\ (y)\ k\ (o,\ y)\ |\ v\ (y)\ |\ dy \qquad (4)$$

soit $P = \mathbf{P} + \int_{-a}^{+a} m\ (y)\ k\ (o,\ y)\ |\ v\ (y)\ |\ dy$

On voit sur ces formules que P est sous-linéaire en $(v(y),\ U)$, si $v(y)$ est seulement à variation bornée.

Si $v(y)$ est à variation bornée et non décroissante sur $(-a^-,\ a^+)$, le terme sous le signe | | dans l'expression de **P** est toujours positif et **P** est linéaire en $(v(y),\ U)$.

Cette propriété de **P** étant très intéressante et permettant l'établissement de résultats commodes, nous nous limiterons à la recherche du minimum de la puissance dissipée sur l'ensemble des *modes de déformation définis par la figure 7 et les équations (2) où $v(y)$ est à variation bornée, non décroissante, et vérifie $v(-a^-) = -U$, $v(a^+) = U$.* On peut même espérer que cette limitation n'aura pas de conséquence trop importante sur la qualité du minimum de la puissance dissipée ainsi obtenu, puisque dans le cas du milieu homogène, la valeur exacte de la charge limite est obtenue par un tel mécanisme.

3 – Résultats généraux (5)

Les modes de déformation considérés désormais sont tous du type que nous venons de définir : ce sont tous les modes de déformation qui peuvent être associés à la classique solution incomplète de Prandtl dans le cas du poinçon lisse agissant sur un demi-plan homogène.

3.1 – Théorème de symétrie.

Proposition :

si $k(M)$ et $m(M)$ sont des fonctions symétriques par rapport à Ox $[k(x, y) = k(x, -y),\ m(y) = m(-y)]$, la puissance dissipée minimale est atteinte pour un mode déformation symétrique.

Démonstration :

Si l'on considère un mode de déformation quelconque il existe toujours un mode déformation symétrique correspondant à une puissance dissipée non supérieure :

Soit, en effet, un mode de déformation correspondant à la fonction $v(y)$ et à la puissance dissipée totale.

$$P\ [v\ (y)] = \mathbf{P}\ [v\ (y)] + \int_{-a}^{+a} m\ (y)\ k\ (o,\ y)\ |\ v\ (y)\ |\ dy$$

Et soit le mode de déformation symétrique du précédent, qui correspond à la fonction $w(y) = -v(-y)$. La puissance dissipée correspond à ce mode de déformation est, par suite de la symétrie de m et de k égale à la précédente :

$$P\ [w\ (y)] = \mathbf{P}\ [w\ (y)] + \int_{-a}^{+a} m\ (y)\ k\ (o, y)\ \left|\ w(y)\ \right| dy = P\ [v\ (y)]$$

Si nous considérons alors le mode d'écoulement symétrique correspondant à $V(y) = \frac{1}{2}\ [v(y) + w(y)]$, nous avons par suite de la linéarité de **P** :

$$P\ [V\ (y)] = \frac{\mathbf{P}\ [v\ (y)] + \mathbf{P}\ [w\ (y)]}{2} + \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} m\ (y)\ k\ (o,\ y)\ \left|\ v\ (y) + w\ (y)\ \right| dy$$

d'où :

$$P\ [V\ (y)] \leqslant \mathbf{P}\ [v\ (y)] + \int_{-a}^{+a} m\ (y)\ k\ (o,\ y)\ |\ v\ (y)\ |\ dy = P\ [v\ (y)]$$

(5) Ces résultats sont valables dans d'autres cas que celui du bicouche.

Si $k(M)$ et $m(M)$ sont symétriques et si on ne considère que les modes de déformation symétriques, $P[v(y)]$ est linéaire en $(v(y), U)$.

En effet **P** $[v\ (y)]$ est linéaire et, $v\ (y)$ étant nécessairement positive sur $(o,\ a)$ on a :

$$\int_{-a}^{a} k\ (o, y)\, m\ (y)\ |v\ (y)\ |dy = 2 \int_{o}^{a} k\ (o, y)\, m\ (y)\ |v\ (y)\ |dy = 2 \int_{o}^{a} k\ (o, y)\, m\ (y)\, v\ (y)\, dy$$ qui est linéaire.

3.2 – Théorème général.

3.2.1 – Notations.

Nous faisons l'hypothèse de la symétrie et considérons des modes de déformation symétriques.

Soit E_U l'ensemble des fonctions $v(y)$ satisfaisant les hypothèses (A) :

$$(A)\begin{cases} \text{définies sur } -a^- \ +a^+ & A_1 \\ \text{à variations bornées} & A_2 \\ \text{non décroissantes} & A_3 \\ \text{symétriques} & A_4 \\ v(-a^-) = -U,\ v(a^+) = U & A_5 \end{cases}$$

$P[v(y)]$, puissance dissipée totale, est une fonctionnelle sur E_U dans laquelle U intervient explicitement. Soit **G**$[v(y)]$ l'expression de cette fonctionnelle en remplaçant U par $v(a^+)$.

G$[v(y)]$ est une fonctionnelle linéaire de $v(y)$, pour les $v(y)$ satisfaisant les hypothèses A_1 à A_4.

α désignant une constante positive quelconque nous définissons l'ensemble E_α des fonctions $v(y)$ satisfaisant les hypothèses *(B)* :

$$(B)\begin{cases} B_1 \text{ à } B_4 \text{ identiques à } A_1 \text{ à } A_4 \\ v(-a^-) = -\alpha,\ v(a^+) = \alpha \end{cases} \qquad (B_5)$$

Nous définissons enfin E'_α, sous ensemble de E_α formé des fonctions $v(y)$ satisfaisant les hypothèses *(B)* et comportant deux sauts symétriques d'amplitude α :

$v_y\ (y) = -\alpha + \alpha Y\ (y + z) + \alpha\ Y\ (y - z)$, $y \in [-a^-, a^+)$, z abscisse du saut de droite, paramètre de la fonction, $z \in (o, a)$.

3.2.2 – Lemme 1.

Proposition :

Si pour une valeur de α donnée, **G** *a un minimum sur E'_α atteint pour $v_{z_0}\ (y)$,* **G** *a un minimum sur chaque E'_α quel que soit α positif, et ce minimum correspond à la même valeur z_0 de z qui est donc indépendante de α. (Il peut y avoir plusieurs valeurs de z correspondant au minimum de* **G** *sur E'_α et le résultat est encore valable).*

La démonstration est évidente car **G** est linéaire et les fonctions de $E'_{\alpha 1}$ et $E'_{\alpha 2}$ sont homothétiques dans le rapport $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ positif.

3.2.3 – Lemme 2.

Proposition :

Si le minimum de **G** *sur* E'_α *est atteint pour les fonctions* $v_{z_1}(y)$ *et* $v_{z_2}(y)$, $z_1 \neq z_2$, *toute fonction* $v(y)$ *de* E_α *de la forme :*

$$v(y) = \lambda v_{z_1}(y) + (1-\lambda)\, v_{z_2}(y) \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

est telle que $\mathbf{G}\,[v(y)] = \left\{ \underset{E'_\alpha}{\mathrm{Min}} \quad \mathbf{G}\,[v(y)] \right\}$

Ce résultat découle de la linéarité de **G**, et est généralisable à plus de deux fonctions.

3.2.4 – Théorème.

Proposition :

a) Si **G** *a un minimum dans* E'_U *atteint pour une seule fonction* $v_z(y)$, *cette fonction réalise aussi le minimum strict de* **G** *dans* E_U.

b) Si **G** *a un minimum dans* E'_U *atteint pour les deux fonctions* $v_{z_1}(y)$ *est* v_{z_2}, *le minimum de* **G** *dans* E_U *lui est égal et est atteint pour les seules fonctions :*

$$v(y) = \lambda\, v_{z_1}(y) + (1-\lambda)\, v_{z_2}(y) \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

c) Si **G** *est constante sur* E'_U, *elle est constante sur* E_U.

Démonstration :

a) Soit $v(y) \in E_U$. Pour z sur (O, a) on désigne par $dv(z)$ la différentielle de v à l'abscisse z, c'est-à-dire $dv(z) = \frac{dv}{dy}(z)\, dy$ où $\frac{dv}{dy}(z)$ est pris au sens des distributions : $dv(z)$ peut donc être une quantité finie (dans le cas où $v(y)$ a un saut à l'abscisse (z), $dv(z)$ est positive.

Considérons la fonction de E' $dv(z)$:

$$d\tilde{v}_z(y) = -\,dv(z) + dv(z)\, Y(y+z) + dv(z)\, Y(y-z)$$

On vérifie aisément que l'on a :

$$v(y) = \int_{z=0}^{z=a^+} d\,\tilde{v}_z(y) \quad , \quad \forall\, y \in (-a, a)$$

donc :

$$\mathbf{G}\,[v(y)] = \mathbf{G}\,\left[\int_{z=0}^{z=a^+} d\,\tilde{v}_z(y)\right]$$

et d'après la linéarité de **G** :

$$\mathbf{G}\,[v(y)] = \int_{z=0}^{z=a^+} \mathbf{G}\,[d\,\tilde{v}_z(y)] \tag{5}$$

Soit z_0 l'abscisse correspondant au minimum de **G** dans E'_α $(\forall \alpha > 0)$, on a :

$$\mathbf{G}\,[d\,\tilde{v}_z(y)] \geqslant \frac{d\,\tilde{v}_z(z)}{\mathrm{U}} \times \left\{ \mathrm{Min}\ \mathbf{G}\ \mathrm{sur}\ E'_U \right\} \tag{6}$$

l'égalité n'étant réalisée que pour $z = z_0$.

De (5) et (6) on tire que :

$\mathbf{G}\ [v\ (y)] > \text{Min}\ \mathbf{G}$ sur E'_U

sauf si $v(y) \equiv -\ U + U.Y(y + z_0) + U.Y(y - z_0)$ c'est-à-dire la fonction qui réalise le minimum de $\mathbf{G}$ dans E'_U.

Pour b) et c) les démonstrations sont analogues.

Remarque : Si l'on étudie le problème du § 3.2 en le discrétisant, c'est-à-dire en se restreignant à des fonctions $v(y)$ en escalier, de sauts v_i aux abscisses y_i fixées, satisfaisant les hypothèses (A), on est ramené à un problème de programmation linéaire et le théorème fondamental de la programmation linéaire indique que le minimum de $\mathbf{G}[\ v(y)]$ est atteint pour une fonction $v(y)$ possédant deux sauts symétriques.

Le théorème général trouvé ici étend ce résultat au cas où l'on considère toutes les fonctions $v(y)$ satisfaisant les hypothèses (A).

3.2.5 – Conséquences.

Pour la recherche du minimum de la puissance dissipée sur la classe de modes de déformations définie au § 2.2 in fine dans l'hypothèse de la symétrie, nous pouvons d'après le § 3.1 nous restreindre aux modes de déformations symétriques.

D'après le § 3.2.4, nous pouvons nous limiter aux modes de déformation pour lesquels $v(y)$ est composée de deux sauts symétriques d'amplitude U. la recherche du minimum de la puissance dissipée est donc ramenée à la recherche du minimum de $\mathbf{G}[v(y)]$ sur E'_U.

Sur E'_U, $\mathbf{G}[v_z(y)]$ est une fonction de z : $U.G(z)$, $z \in (O, a)$. L'étude d'une telle fonction (existence et calcul du minimum) est donc beaucoup plus simple que le problème initial.

En particulier, nous démontrerons dans la suite (chapitre VI § 3.3) que dans le cas général du milieu stratifié (k fonction de x uniquement) $G(z)$ est une fonction continue et donc que G a un minimum sur E'_U.

4 – Application de ces résultats au cas du bicouche.

Nous cherchons le meilleur majorant de la charge limite obtenu dans la classe des solutions cinématiques dont les modes de déformation sont ceux qui peuvent être associés à la solution incomplète de Prandtl.

Toutes les hypothèses du § 3 sont satisfaites et les résultats finaux applicables.

4.1 – Calcul de la puissance dissipée.

L'expression de la puissance dissipée varie avec la valeur de h/a :

4.1.1 – $h \geqslant a\sqrt{2}$.

$$\frac{\mathbf{P}\ [v(y)]}{2} = k\ (\pi + 2)\ aU$$

$$\frac{P\ [v(y)]}{2} = \frac{\mathbf{P}\ [v(y)]}{2} + mk \int_0^a v(y)\ dy$$

4.1.2 – $a \leqslant h \leqslant a\sqrt{2}$.

$$\frac{\mathbf{P}\ [v(y)]}{2} = k\ (\pi + 2)\ aU + (K - k) \left\{ \int_h^{a\sqrt{2}} 2r\ \text{Arccos}\frac{h}{r}\ \frac{dv}{dy}\ dr + \int_h^{a\sqrt{2}} \sqrt{2}\ \text{Arccos}\frac{h}{r}\ [U - v(y)]dr \right\}$$

où $r = (a + y)\sqrt{2}/2$

$$\frac{P\ [v(y)]}{2} = \frac{\mathbf{P}\ [v(y)]}{2} + mk \int_0^a v(y)dy$$

4.1.3 – $0 \leqslant h \leqslant a$.

$$\frac{\mathbf{P}\,[v(y)]}{2} = k\,(\pi + 2)\,aU + (K - k)\left\{ \int_h^{h\sqrt{2}} 2r \text{ Arccos } \frac{h}{r}\,\frac{dv}{dy}\,dr + \int_h^{h\sqrt{2}} \sqrt{2} \text{ Arccos} \frac{h}{r}\,[U - v(y)]\,\mathrm{dr} \right.$$

$$\left. + \int_{h\sqrt{2}}^{a^+\sqrt{2}} [r\frac{\pi}{2} + 2\,(r - h\sqrt{2})]\,\frac{dv}{dy}\,dr + \int_{h\sqrt{2}}^{a^+\sqrt{2}} \frac{\pi}{4}\sqrt{2}\,[U - v(y)]\,dr \right\}$$

où $r = (a + y)\sqrt{2}/2$

$$\frac{P\,[v(y)]}{2} = \frac{\mathbf{P}\,[v(y)]}{2} + mk \int_0^a v(y)\,dy$$

4.2 – Fonctionnelles G et F.

Nous définissons la fonctionnelle **F** $[v\,(y)]$ construite comme **G** au § 3.2.1., à partir de : $\left\{\frac{1}{2}\,\mathbf{P}\,[v\,(y)] - k\,(\pi + 2)\,\mathrm{aU}\right\} /(K - k)$ sur E_U. Elle a les expressions suivantes :

$$h \geqslant a\sqrt{2} : \mathbf{F}\,[v(y)] = 0 \tag{7}$$

$a \leqslant h \leqslant a\sqrt{2}$

$$\mathbf{F}\,[v(y)] = \left\{ \int_h^{a^+\sqrt{2}} 2r \text{ Arccos } \frac{h}{r}\,\frac{dv}{dy}\,dr + \int_h^{a^+\sqrt{2}} \sqrt{2} \text{ Arccos} \frac{h}{r}\,[v(a^+) - v(y)]\,dr \right\} \tag{8}$$

$o \leqslant h \leqslant a$:

$$\mathbf{F}\,[v(y)] = \left\{ \int_h^{h\sqrt{2}} 2r \text{ Arccos } \frac{h}{r}\,\frac{dv}{dy}\,dr + \int_h^{h\sqrt{2}} \sqrt{2} \text{ Arccos } \frac{h}{r}\,[v(a^+) - v(y)]\,dr \right.$$

$$\left. + \int_{h\sqrt{2}}^{a^+\sqrt{2}} [\frac{\pi}{2}r + 2\,(r - h\sqrt{2})]\,\frac{dv}{dy}\,dr + \int_{h\sqrt{2}}^{a^+\sqrt{2}} \frac{\pi}{4}\sqrt{2}\,[v(a^+) - v(y)]\,dr \right\} \tag{9}$$

La fonctionnelle **G** $[v(y)]$, corresponsant à $P\,[v(y)]$, est :

$$\mathbf{G}\,[v(y)]/2 = k\,(\pi + 2)\,av(a^+) + mk \int_0^a v(y)dy + (K - k)\,\mathbf{F}\,[v(y)] \tag{10}$$

4.3 – Fonctions *F(z)* **et** *G(z)*.

Si l'on prend pour $v(y)$ les fonctions $v_z(y)$ de E_U', **F** et **G** deviennent des fonctions de z, soient : $UF(z)$ et $UG(z)$.

D'après la formule (10), on a entre $F(z)$ et $G(z)$ la relation :

$$G\,(z)/2 = k\,(\pi + 2)\,a + mk\,(a - z) + (K - k)\,F(z) \tag{11}$$

Ces fonctions ont, suivant les valeurs du paramètre h/a, et de la variable z, des expressions analytiques différentes. Nous donnons en annexe 6 les diverses expressions de $F(z)$, ainsi que son comportement.

5 – Résultats obtenus dans le cas du poinçon lisse et $k < K < \infty$.

Dans le cas du poinçon lisse $G(z)$ se réduit à :

$$G(z)/2 = (\pi + 2)\,ak + (K - k)\,F(z) \tag{12}$$

Puisque $k < K$, la minimisation de $G(z)$ revient à la minimisation de $F(z)$ d'après (12).

D'après les expressions de $F(z)$ et l'étude de son comportement, données en annexe 6, le minimum de $F(z)$ est atteint, $\forall h$, pour $z = |h\sqrt{2} - a|$ et a pour valeur :

si $h \geqslant a\sqrt{2}/2$.

$$F(|h\sqrt{2} - a|) = 0$$

si $(2 - \sqrt{2})\,a \leqslant h \leqslant a\sqrt{2}/2$

$$F(|h\sqrt{2} - a|) = 2\,(2a - h\sqrt{2})\,\mathrm{Arccos}\,\frac{h\sqrt{2}}{2a - h\sqrt{2}} - h\sqrt{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{2a - h\sqrt{2} + 2\sqrt{a^2 - ah\sqrt{2}}}{h}$$

si $0 \leqslant h \leqslant (2 - \sqrt{2})a$

$$F(|h\sqrt{2} - a|) = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)(2a - h\sqrt{2}) - 2h - h\sqrt{2}\,\mathrm{Log}\,(1 + \sqrt{2})$$

La valeur minimale de la puissance dissipée dans les écoulements considérés est donc :

$$P = 2U\ \{(\pi + 2)ak + (K - k)F(|h\sqrt{2} - a|)\}$$

qui conduit au majorant de la charge limite

$$p_0^{(2)} = (\pi + 2)k + (K - k)\,\frac{F(|h\sqrt{2} - a|)}{a} \tag{13}$$

La fonction $F(|h\sqrt{2} - a|)/a$ est représentée en fonction de h/a à la figure 10. On remarque que pour $h/a \geqslant \sqrt{2}/2$, la formule (13) fournit : $p_0^{(2)} = (\pi + 2)k$ qui est la valeur exacte de la charge limite, et pour $h/a = 0$, $p_0^{(2)} = (\pi + 2)K$ qui est aussi la valeur exacte de la charge limite.

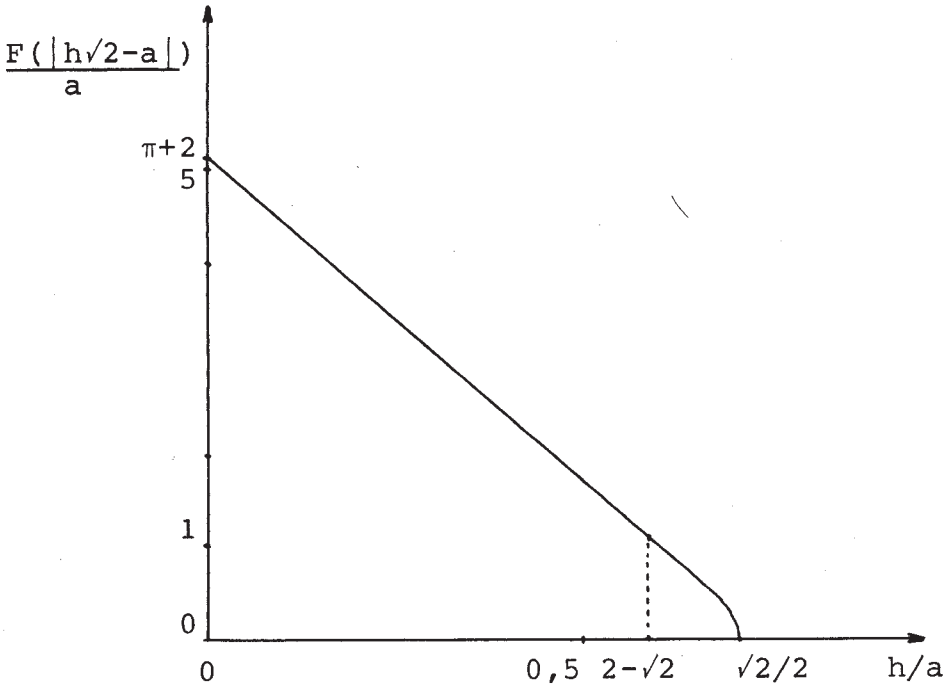


Fig. 10

A partir de cette valeur de $p_0^{(2)}$ $(K, h/a)$ on peut calculer un minorant $K_0''(h/a, 0)$ de K_0 $(h/a, 0)$ qui possède les propriétés énoncées au chapitre IV § 3.2.3, en résolvant en K :

$p_0^{(2)}$ $(K, h/a) = p_0^1$ (h/a).

Les résultats sont représentés à la figure 11.

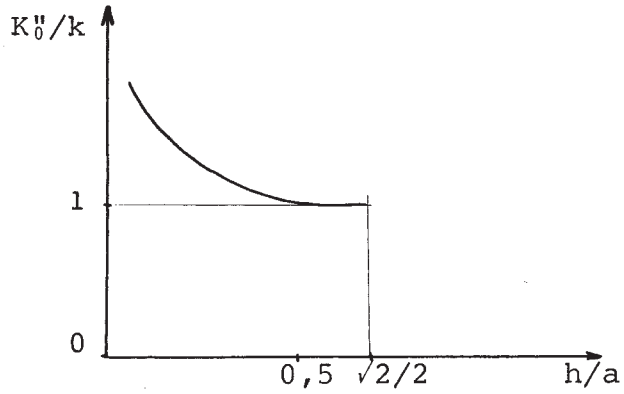


Fig. 11

On remarque en particulier que $K_0'' \nearrow$ quand $h/a \searrow$. Partant de la valeur $K_0'' = k$ pour $h/a \geqslant \sqrt{2}/2$, valeur exacte de K_0, K_0'' (et donc aussi K_0) tend vers $+\infty$ quand $h/a \searrow 0$. Ce résultat est logique puisque pour $h/a = 0$, $p_0^{(2)} = (\pi + 2)K$ est la valeur exacte de la charge limite $\forall K$, tandis que $p_0^1 \nearrow \infty$.

6 – Résultats dans le cas du poinçon rugueux et k< K < ∞.

La formule (11) donnant $G(z)$ ne se simplifie plus. La minimisation de $G(z)$ fait intervenir explicitement les valeurs de m et de K/k et les calculs numériques doivent être faits dans chaque cas particulier. Ils fournissent le minimum de la puissance dissipée pour les champs de vitesses de E_U, d'où un majorant $p_m^{(2)}$ de la charge limite, à partir duquel on peut calculer K_0'' minorant de K_0 comme ci-dessus (§ 5).

VI – PROBLEME DU BICOUCHE, K ⩽ k < ∞.

La couche supérieure du bicouche est plus dure que le demi-plan inférieur.

1 – Solution statique.

Comme au chapitre IV § 1, on obtient une solution statique en considérant les prolongements de Bishop ou de Shield dans le demi-plan homogène de cission limite K.

$(\pi + 2)K$ est un minorant de la charge limite $\forall m$, $\forall h/a$.

2 – Solutions cinématiques.

Les résultats du chapitre précédent sont applicables.

Nous devons minimiser la fonction G(z) définie par

$G(z)/2 = (\pi + 2)ak + mk(a - z) + (K - k)\,F(z)$

où $(K - k) < 0$.

Considérons d'abord $F(z)$: d'après son comportement détaillé à l'annexe 6, son maximum ne peut se produire que pour $z = 0$ ou $z = -a$ plus précisément :

$h \geqslant a\sqrt{2}$: (§ 1) Maximum : $F(a) = 0$ (6)

$a \leqslant h \leqslant a\sqrt{2}$: (§ 2) Maximum :

$$F(a) = 4a \text{ Arccos } \frac{h\sqrt{2}}{a} - h\sqrt{2} \text{ Log } \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2a + \sqrt{4a^2 - 2h^2}}{h}$$

$a\sqrt{2}/2 \leqslant h \leqslant a$: (§ 3) Maximum :

$$F(a) = (\pi + 2)a - 2h - h\sqrt{2} \text{ Log } (1 + \sqrt{2})$$

$(2 - \sqrt{2})a \leqslant h \leqslant a\sqrt{2}/2$: (§ 4) On doit comparer :

$$F(0) = 4a \text{ Arccos } \frac{h\sqrt{2}}{a} - 2h\sqrt{2} \text{ Log } \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a + \sqrt{a^2 - 2h2}}{h}$$

et

$$F(a) = (\pi + 2)a - 2h - h\sqrt{2} \text{ Log } (1 + \sqrt{2})$$

$a/2 \leqslant h \leqslant (2 - \sqrt{2})a$: (§ 5) Comparaison des mêmes expressions.

$0 \leqslant h \leqslant a/2$: (§ 6) Comparaison de

$$F(0) = (\pi + 2)a - 4h - 2h\sqrt{2} \text{ Log } (1 + \sqrt{2})$$

et

$$F(a) = (\pi + 2)a - 2h - h\sqrt{2} \text{ Log } (1 + \sqrt{2})$$

On trouve que dans tous les cas le maximum de $F(z)$ est $F(a)$ atteint pour $z = a$.
Ainsi pour $z = a$, $(K - k)\,F(z)$ est donc minimum, il en est de même de $mk\,(a - z)$.

Donc $G(z)$ est minimum pour $z = a$ $\forall\, m \in (0, 1)$.

La puissance dissipée minimale est égale à :

$$P = 2U\,\{\,(\pi + 2)ak + (K - k)F(a)\,\}$$

D'où le majorant de la charge limite valable $\forall m$:

$$p^{(2)} = (\pi + 2)\,k - k\left(1 - \frac{K}{k}\right)\frac{F(a)}{a}$$

Le majorant de la charge limite est égal à $(\pi + 2)\,k$ pour $h/a \geqslant \sqrt{2}$, et décroît quand h/a décroît, pour atteindre pour $h/a = 0$ la valeur $(\pi + 2)\,K$, valeur exacte de la charge limite.

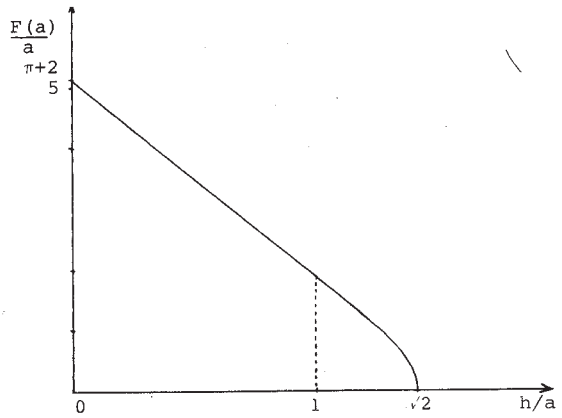


Fig. 12

(6) Les numéros de paragraphes, ici, renvoient aux paragraphes de l'annexe 6.

3 – Remarque.

Nous n'insisterons pas plus sur ces résultats. Du point de vue physique, il semble que ce problème du bicouche où la couche supérieure est la plus dure, ne puisse pas être considéré avec intérêt pour le matériau rigide-plastique. On se trouve là, semble-t-il, en face d'un problème pour lequel les hypothèses de base de la théorie des charges limites ne sont pas vérifiées : en particulier, il ne paraît pas que l'on puisse négliger les changements de géométrie de la structure et ainsi on atteindra un état physique de ruine sans qu'il y ait écoulement plastique libre.

Ces considérations expliqueraient en particulier le gros écart entre le majorant donné ci-dessus et les résultats expérimentaux de Tcheng (1956) ceux-ci étant en bon accord avec ceux obtenus pour le mécanisme de ruine sans écoulement libre proposé par cet auteur.

VII – POINÇONNEMENT D'UN DEMI-PLAN CONSTITUE D'UN MATERIAU ISOTROPE STRATIFIE.

1 – Définition.

Le problème considéré est celui du poinçonnement d'un demi-plan constitué d'un matériau rigide parfaitement plastique isotrope, dont la cission limite est fonction uniquement de la coordonnée x profondeur sous le poinçon. Un tel matériau est dit isotrope stratifié ($k(x) \geqslant 0$).

2 – Solution statique.

Désignons par k_0 la borne inférieure de $k(x)$ ($k_0 \geqslant 0$). On démontre comme au chapitre IV § 1, que $(\pi + 2)k_0$ est un minorant de la charge limite.

3 – SOLUTION CINEMATIQUE

3.1 – Mécanismes de déformation licites choisis.

Nous utilisons les mêmes modes de déformation licites qu'au chapitre V. Les théorèmes généraux énoncés alors (§ 3), s'appliquent ainsi que leurs conséquences pour la recherche du minimum de la puissance dissipée (§ 3.2.5).

3.2 – Calcul de la puissance dissipée.

Il est évident d'après les formules données au chapitre V [formules (2), (3) [que à m, $v(y)$ et U fixés, $P[v(y)]$ est une fonction linéaire de $k(x)$. En fait, dans les modes de déformation considérés ici, la zone déformée est comprise dans la bande $0 \leqslant x \leqslant a^+\sqrt{2}$ et donc seules les valeurs de $k(x)$ dans ce domaine interviennent (7).

Nous désignons par $P[v(y), k(x)]$ la puissance dissipée totale.

D'autre part, nous introduisons $P_t[v(y)]$: c'est la puissance dissipée totale dans le mode de déformation correspondant à $v(y)$, dans le bicouche $k = 0$, $K = 1$ d'épaisseur de couche supérieure $t \geqslant 0$.

L'expression de $P_t[v(y)]$ se déduit du chapitre V § 4.1 :

$$P_0[v(y)] = (\pi + 2)\, a v(a^+) + m \int_0^a v(y)dy$$

$P_t[v(y)] = P[v(y)]$ du § 4.1 chapitre V pour $h = t > 0$, $k = 0$, $K = 1$, soit :

si $0 < t \leqslant a$

$$P_t[v(y)]/2 = \int_t^{t\sqrt{2}} 2r \operatorname{Arccos}\frac{t}{r}\frac{dv}{dy}dr + \int_t^{t\sqrt{2}} \sqrt{2}\operatorname{Arccos}\frac{t}{r}[v(a^+) - v(y)]\,dr$$

$$+ \int_{t\sqrt{2}}^{a^+\sqrt{2}} [r\frac{\pi}{2} + 2(r - t\sqrt{2})]\frac{dv}{dy}dr + \int_{t\sqrt{2}}^{a^+\sqrt{2}} \frac{\pi}{4}\sqrt{2}\,[v(a^+) - v(y)]\,dr$$

(7) Voir la remarque à la fin de ce paragraphe.

si $a \leqslant t \leqslant a\sqrt{2}$.

$$P_t\,[\nu(y)]/2 = \int_t^{a^+\sqrt{2}} 2r \operatorname{Arccos}\frac{t}{r}\,\frac{d\nu}{dy}\,dr + \int_t^{a^+\sqrt{2}} \sqrt{2}\operatorname{Arccos}\frac{t}{r}[\nu(a^+) - \nu(y)]dr$$

si $a\sqrt{2} \leqslant t$

$$P_t\,[\nu(y)] = 0$$

Si $m \neq 0$, $P_t[\nu(y)]$ est discontinue en t pour $t = 0$: on a en effet $\lim\limits_{t \to 0} P_t\,[\nu(y)] = (\pi + 2)\,a\nu\,(a^+)$.

Nous supposons $k\,(x)$ à variation bornée sur $(0, a^+\sqrt{2})$. Soit $dk\,(t)$ la mesure "différentielle" de k au point t : $dk\,(t) = \frac{dk}{dx}(t)\,dx$, où $\frac{dk}{dx}$ est la dérivée au sens des distributions.

D'après la linéarité de $P\,[\nu\,(y), k\,(x)]$ en $k\,(x)$ on peut écrire :

$$P\,[\nu\,(y), k\,(x)] = \int_{t=0}^{t=a^+\sqrt{2}} P_t\,[\nu\,(y)]\,dk\,(t)$$

3.3 – Minimum de la puissance dissipée

D'après (V, § 3.2.5) nous recherchons le minimum de la puissance dissipée pour $\nu(y)$ dans E'_U.

Nous devons minimiser en z la fonction :

$$G\,(z, k\,(x)) = \int_0^{t=a^+\sqrt{2}} G_t\,(z)\,dk\,(t) \qquad \text{(1), intégrale de Stieltjes}$$

où $G_t\,(z)$ correspond à $P_t[[\nu_z\,(y)]$ comme $G\,(z)$ à $P\,[\nu_z\,(y)]$ au chapitre V. Nous donnons à l'annexe 7 le tableau des expressions de $G_t\,(z)$ et $\frac{dG_t\,(z)}{dz}$ pour $0 \leqslant z \leqslant a$ et $0 \leqslant t$.

$G_t\,(z)$ est séparément continue en z $\forall z \in (0, a)$, $\forall\ t$. Elle est positive et bornée $\forall\ t \geqslant 0$ par $(\pi + 3)a$. On en a déduit par application du théorème de Lebesgue que $G(z, k(x)]$ est continue en z.

Il en résulte que $G[z, k\,(x)]$ a un minimum pour $z \in (0, a)$ et donc que G a un minimum sur E'_U (résultat annoncé en V § 3).

Pour la recherche de ce minimum, on étudie le comportement de $G\,(z, k\,(x))$ au moyen de sa dérivée en z, non nécessairement continue,

$$\frac{\partial\ G\,(z, k\,(x))}{\partial\ z} = \int_{t=0}^{t=a^+\sqrt{2}} \frac{\partial\ G_t\,(z)}{\partial\ z}\,dk\,(t) \qquad \text{(2), intégrale de Stieltjes.}$$

L'abscisse z_0 corresponsant au minimum, étant connue, on calcule $G\,(z_0, k\,(x))$ et la puissance dissipée minimale est $P = U \cdot G\,(z_0, k\,(x))$. *On en déduit un majorant de la charge limite.*

La qualité de ce majorant ne peut être appréciée a priori, mais nous ferons la réflexion suivante :

On a vu que $k(x)$ n'intervient dans le calcul du majorant que par ses valeurs pour $0 \leqslant x \leqslant a^+\sqrt{2}$. Il est donc vraisemblable que si $k(x)$ décroît pour $x > a\sqrt{2}$, le majorant obtenu a de fortes chances d'être éloigné de la charge limite ; par contre, si $k(x)$ est non décroissante pour $x > a\sqrt{2}$, la qualité du majorant obtenu peut être bonne.

Il est clair également que le majorant obtenu est d'autant meilleur que les variations relatives de $k(x)$ sont faibles.

La méthode est très facile à employer, à partir du tableau de $G_t\,(z)$ et $\frac{\partial G_t}{\partial z}$ de l'annexe 7, et des formules (1) et (2).

3.4 – Application à un cas simple.

Nous considérons le cas d'un milieu stratifié dont la cission limite est une fonction linéaire croissante de la profondeur :

$$k(x) = k_0 + k_1 \frac{x}{a}$$

Pour l'application de la formule (2) nous avons :

$dk(0) = k_0\ \delta(x)$

et $dk(t) = k_1\, dt$ pour $t > 0$.

D'où en effectuant l'intégration de (2) :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial z}[z, k(x)] = 4\, k_1 \frac{z}{a} - m k_0 \tag{3}$$

Le minimum de $G[z, k(x)]$ pour $0 \leqslant z \leqslant a$ est atteint pour : $z = \text{Inf}\left\{a, a\frac{mk_0}{4k_1}\right\}$

La formule (1) donne :

$$\frac{1}{2}G[0, k(x)] = [(\pi + 2)a + ma]k_0 + \frac{k_1}{a}\int_0^{a/2}[(\pi + 2)a - 4t - 2t\sqrt{2}\,\text{Log}(1 + \sqrt{2})]\,dt$$

$$+\frac{k_1}{a}\int_{a/2}^{a\sqrt{2}/2}\left[4a\,\text{Arccos}\frac{t\sqrt{2}}{a} - 2t\sqrt{2}\,\text{Log}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a + \sqrt{a^2 - 2t^2}}{t}\right]dt$$

d'où

$$\frac{1}{2}G[o, k(x)] = (\pi + 2 + m)ak_0 + 2ak_1$$

et, en utilisant (3) :

$$\frac{1}{2}G[z, k(x)] = (\pi + 2 + m)ak_0 + 2ak_1 + 2ak_1\left(\frac{z}{a}\right)^2 - mak_0\left(\frac{z}{a}\right)$$

On en déduit le majorant de la charge limite :

pour $mk_0/4k_1 \leqslant 1$

$$p = (\pi + 2 + m)k_0 + 2k_1\,[1 + m^2k_0^2/16k_1^2] - m\,(mk_0/4k_1) \tag{4}$$

pour $mk_0/4k_1 \geqslant 1$

$$p = (\pi + 2)k_0 + 4k_1 \tag{5}$$

La formule (4) s'applique : pour $m = 0$ (poinçon lisse) $\forall\, k_0/k_1$, et pour $m \neq 0$ (poinçon totalement ou partiellement rugueux) si la variation relative k_1/k_0 est faible.

Pour $m = 0$, on obtient :

$$p = (\pi + 2)k_0 + 2k_1. \tag{6}$$

L'application de la formule (6) au cas particulier étudié par Kuznetzov (1958) où $k_1 \simeq 0{,}495\, k_0$, donne $p = 6{,}13\, k_0$ qui est exactement la valeur trouvée par cet auteur par une solution approximativement cinématique du problème. Nous en confirmons la validité en tant que *majorant* de la charge limite.

ANNEXE I

CALCUL DES ABSCISSES CURVILIGNES SUR LES COURBES DU RESEAU DE LA FIGURE 1.
(Deuxième partie, chapitre II § 2.)

Les paramètres choisis sont les angles u et v représentés sur la figure et comptés positivement pour u dans le sens rétrograde, pour v dans le sens direct.

Nous désignons par $s(u, v)$ l'abscisse curviligne d'un point M sur sa caractéristique α comptée à partir de OU (c'est-à-dire que $s(u, 0) = 0$) . $R(u, v)$ est le rayon de courbure en M de la caractéristique α.

Avec nos notations, le résultat de Hill (1950) s'écrit :

$$S(u, v) = -a\sqrt{2}\,[I_0(2\sqrt{uv}) + 2\sqrt{v/u} \times I_1(2\sqrt{uv})]$$

En appliquant le second théorème de Hencky on obtient :

$$S(u, v) = -a\sqrt{2} - s(u, v)$$

d'où

$$s(u, v) = a\sqrt{2}\,[I_0(2\sqrt{uv}) - 1 + \sqrt{\frac{v}{u}} \times I_1(2\sqrt{uv})]$$

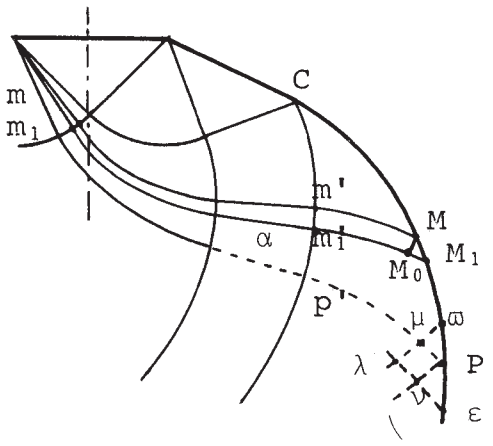
ANNEXE 2

CONCAVITE DE LA COURBE (L) EN P.
(Deuxième partie, chapitre II § 7.)

D'après la formule (4) le signe de tgα dépend des signes de sin 2ψ et de $(p/k + \cos 2\psi)$. La disposition de séparatrice $(p/k + \cos 2\psi) = 0$ est connue en P (c'est l'isocline tg$\alpha = \infty$), et il est nécessaire d'étudier celle de séparatrice $\sin 2\psi = 0$.

1) La séparatrice $\sin 2\psi = 0$ est horizontale en P : cela résulte de l'égalité des rayons de courbure R et S des caractéristiques α et β au point P de la surface libre.

2) Cette courbe a sa concavité tournée vers le bas en P. Nous donnons de ce résultat une démonstration valable si $(\alpha + \gamma) < 1{,}51$, c'est–à-dire dans le cas où la caractéristique α aboutissant en P passe au-dessus de E.



Nous démontrons d'abord que le rayon de courbure de la surface libre croît de C à P. Il suffit pour cela de montrer que $(-S)$ croît de C à P, c'est-à-dire avec les notations de la figure, et par application du deuxième théorème de Hencky, que $m_1M_1 > mM$. Or $mm' < m_1m_1'$. D'autre part : $m'M - m_1'M_0 < M_0M\,(\phi_{m'} - \phi_M)$; d'ou puisque $M_0M \# M_0M_1$, $m'M - m_1'M_1 < M_0M\,[(\phi_{m'} - \phi_M) - 1] < 0$, donc : $m_1M_1 > mM$.

Considérons alors dans le voisinage du point P, deux caractéristiques α et β voisines de celles de P et correspondant à des variations d'angles égales :

$$(\phi_p - \phi_\mu) = -(\phi_p - \phi_\epsilon)$$

Nous cherchons à démontrer qu'au second ordre on a $\nu P > \mu P$ (ils sont égaux au premier ordre).

Nous prenons comme coordonnées α et β, les coordonnées définies par Hill (1950). Les différents points de la figure sont alors :

P : (o, o) ; μ : (a, o) ; ν : $(o, -a)$; λ : $(a, -a)$; ω : (a, a). avec $a > o$

Il faut montrer que $S_\mu > R_\nu$, soit après développement :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2}(o, o) < \frac{\partial^2 R}{\partial \beta^2}(o, o) \qquad \text{ou encore} \qquad -\frac{\partial R}{\partial \alpha}(o, o) < \frac{\partial S}{\partial \beta}(o, o)$$

On a $\frac{\partial R}{\partial \alpha}(o, o) = \frac{1}{a}(R_\mu - R_p) > \frac{1}{a}(R_\mu - R_\omega) = -S_\omega$ d'après un résultat précédent.

D'autre part :

$$S_\nu - S_p = -a\frac{\partial S}{\partial \beta}(o, o) < -S_p\, a\,(\phi_c - \phi_p) < -S_p \times a \times \frac{\pi}{4}$$

d'où $\frac{\partial S}{\partial \beta}(o, o) > \frac{\pi}{4} S_p$

Pour ω suffisamment voisin de P on a $\frac{\pi}{4} S_p > S_\omega$ (car $S < 0$)

donc $\frac{\partial S}{\partial \beta}(o, o) > -\frac{\partial R}{\partial \alpha}(o, o)$

ce qui démontre le résultat cherché.

Pour $(\alpha + \gamma) > 1{,}51$, la démonstration du lemme sur la croissance du rayon de courbure de la surface libre de C à P n'est plus aussi simple.

Tout le reste des démonstrations demeure valable.

La vérification de ce résultat dans le cas $(\alpha + \gamma) = 1{,}57$ sur la figure de Bishop paraît suffisante.

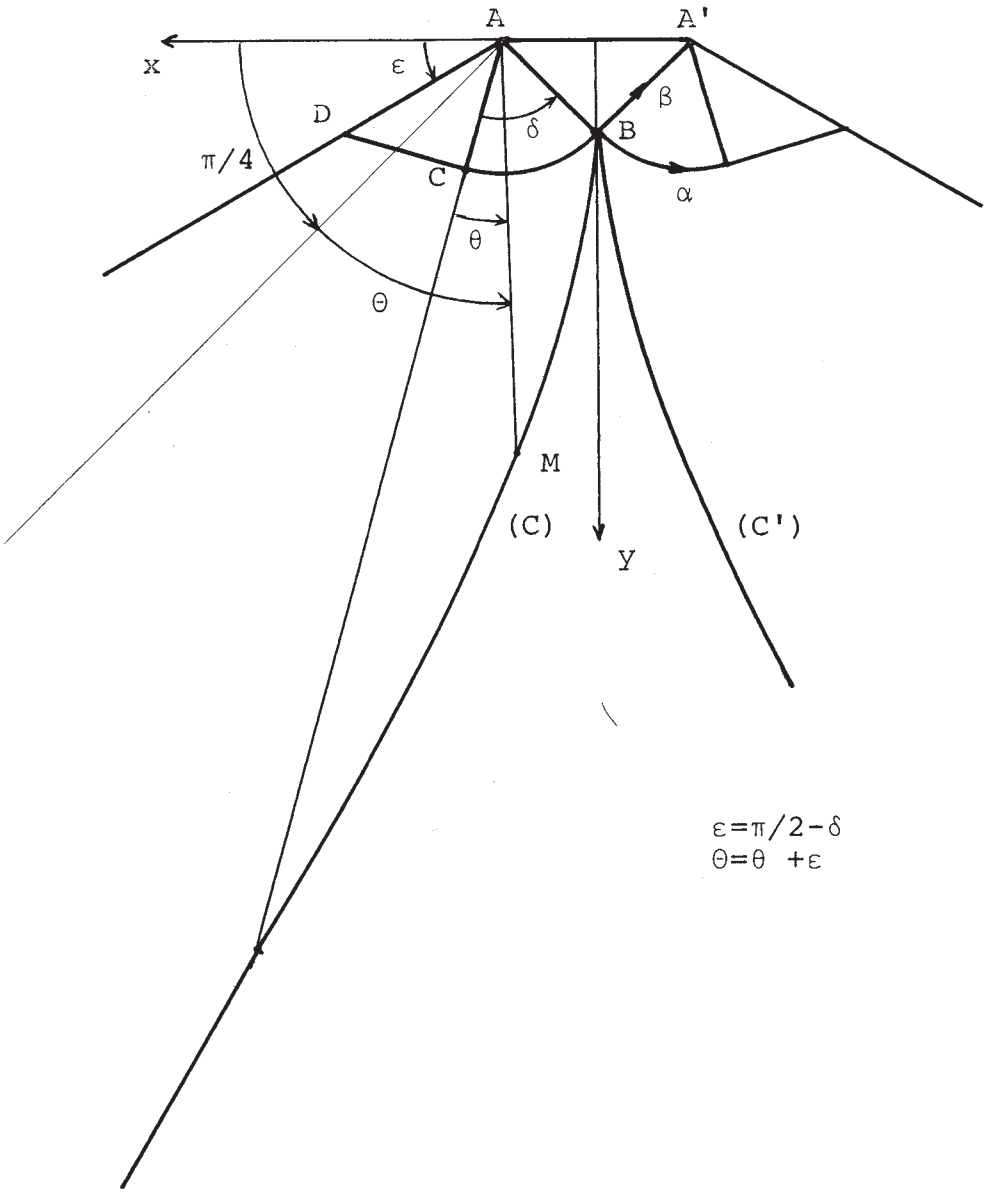
3) En discutant le signe de tgα dans la formule (4), nous voyons que (L) est alors nécessairement descendante en P et située au-dessus de la séparatrice $\sin 2\psi = O$. Elle reste descendante jusqu'en Q.

ANNEXE 3

PROLONGEMENT DES SOLUTIONS INCOMPLETES DE PRANDTL, $\forall\,\delta$, PAR LA METHODE DE SHIELD.
(Deuxième partie, chapitre IV, § 2.)

Considérons la solution incomplète de Prandtl correspondant à $\delta < \pi/2$, représentée sur la figure. Nous cherchons à prolonger cette solution par la méthode de Shield (1954) c'est-à-dire :

– En déterminant une courbe *(C)* [et sa symétrique *(C')*] issue de *B*, de telle sorte qu'un prolongement licite soit obtenu en utilisant : au-dessus de *(C,)* les mêmes champs homogène et semi-homogène (éventail) que dans *ADC* et *ACB*, et au-dessous de *(C)*, entre *(C)* et *(C')*, le champ vérifiant $\tau_{xy} \equiv 0$, défini par la continuité de la contrainte sur *(C)* et *(C')*, *(C)* étant telle que $\sigma_y - \sigma_x = 2k$ dans ce champ sur *(C)*.



Avec les notations de la figure, les calculs sont analogues à ceux exposés dans le livre de Philips (1956), pour la détermination de *(C)* dans le domaine du champ semi-homogène et nous trouvons que *(C) y est identique à la courbe trouvée par Shield* dans le cas $\delta = \pi/2$, d'équation en coordonnées polaires $\rho = AB\,(\sin\Theta\ \mathrm{tg}\,(\Theta/2)]$, les contraintes σ_x et σ_y en un point de *(C)* ont pour expression :

$$\sigma_x = 2k\,(\sin\Theta - \theta - 1)$$

$$\sigma_y = 2k\,(\sin\Theta - \theta)$$

Pour la portion de (C) limitant le champ homogène, nous considérons la tangente à (C) trouvée ci-dessus, au point situé sur le rayon vecteur $\theta = 0$. Elle est définie par $\mathrm{tg}\,\psi = \mathrm{tg}\epsilon + \frac{1}{\cos\epsilon}$ d'où $(\pi/4 + \epsilon) > \psi > \epsilon$. En poursuivant la courbe (C) du champ semi-homogène, par cette tangente qui reste toujours à l'intérieur du champ homogène, nous obtenons la courbe (C) cherchée, dans son intégralité. Les contraintes σ_x et σ_y en un point de (C) dans ce domaine sont :

$$\sigma_x = 2k\,(\sin\epsilon - 1)$$
$$\sigma_y = 2k\,\sin\epsilon$$

On vérifie aisément ensuite que dans tout le domaine intérieur à *(C)* et *(C')* on a :
$(2 - \pi/2)\,k \leqslant \sigma_y - \sigma_x \leqslant 2k\ \forall\,\delta \in (0, \pi/2)$.

Le champ de contraintes est bien licite

ANNEXE 4

SOLUTIONS CINEMATIQUES DEDUITES DE LA SOLUTION INCOMPLETE DE HILL (1950 b) POUR LES EPROUVETTES ENTAILLEES. (Deuxième partie, chapitre V § 2.2.2)

Nous appliquons la même méthode qu'au § 1.2.2.1, mais différents cas sont à considérer selon les valeurs de δ, ils sont représentés sur la figure 1.

Pour chaque valeur de δ (ou de $\epsilon = \pi/2 - \delta$), nous désignons par L_1 la largeur correspondant à la solution incomplète pour le barreau entaillé, par L_m^0 la largeur donnée par la solution cinématique que l'on en déduit pour le problème de la plaque, qui donne comme majorant de la charge limite la même valeur $2a \times 2k(1+\delta)$. $\Delta L_m^0 = L_1 - L_m^0$.

a) $\pi/4 \leqslant \delta < 1{,}0302$. Il n'y a aucune différence avec le cas traité au § 1.2.2.1, si ce n'est la valeur de δ. L'hodographe est entièrement déterminé (à U donné il ne correspond qu'une valeur de ω) et $v(y)$ est connue sur $A'A$.

La puissance dissipée totale est égale à celle dissipée dans la zone déformée de la solution incomplète (1) diminuée de la puissance dissipée dans des zones supprimées par la diminution de largeur ΔL_m^0 et augmentée de la puissance dissipée dans AE_1E_0 (et symétrique), cette dernière égale à $2\,\omega k \times$ Aire (AE_0E_1), et de celle dissipée par frottement sous le poinçon.

b) $\delta \leqslant \pi/4$: aucune différence avec le cas précédent tant que l'on vérifie que $AE_1 \leqslant L_1 - a$.

c) $\delta \leqslant \pi/4$ et $AE_1 > L_1 - a$. Soit E_2 le point d'intersection du bord de la plaque avec AE_1. Supposons d'abord que $EE_2 > \mathrm{DA} = a\sqrt{2}$. Le champ des vitesses est alors défini dans tous les points du solide sauf dans le triangle A_2E_2P ; afin d'obtenir la valeur la plus petite possible pour ΔL_m^0 nous adoptons dans ce triangle : v_α uniforme égale à v_α le long de A_2E_2 et donc puissance dissipée nulle.

d) $\delta < \pi/4$, $AE_1 > L_1 - a$ et supposons que $a\sqrt{2}/2 \leqslant EE_2 \leqslant a\sqrt{2}$. Le champ des vitesses est défini en tout point sauf dans le triangle APP_1, où comme ci-dessus nous prenons la définition qui donne la puissance dissipée nulle.

e) $\delta < \pi/4$, $AE_1 > L_1 - a$, $0 < EE_2 < a\sqrt{2}/2$. Il y a indétermination dans le champ des vitesses. U étant donné la valeur de ω n'est pas unique. En effet, si on se donne une valeur de ω, l'hodographe ne se construit que jusqu'au point m correspondant à M intérieur au triangle $A'BA$. Sont admissibles toutes les valeurs de ω telles que la vitesse verticale du point M qu'elles fournissent soit inférieure à U. Pour une telle valeur de ω, $v(y)$ est alors déterminé le long de $A'A$ et le diagramme a l'allure représentée à la figure 2.

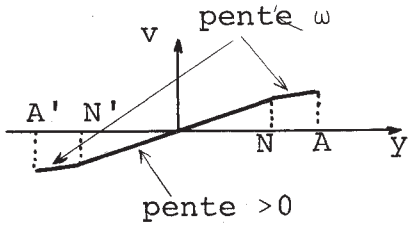


Fig. 2

(1) Nous désignons ainsi la solution incomplète pour le barreau entaillé.

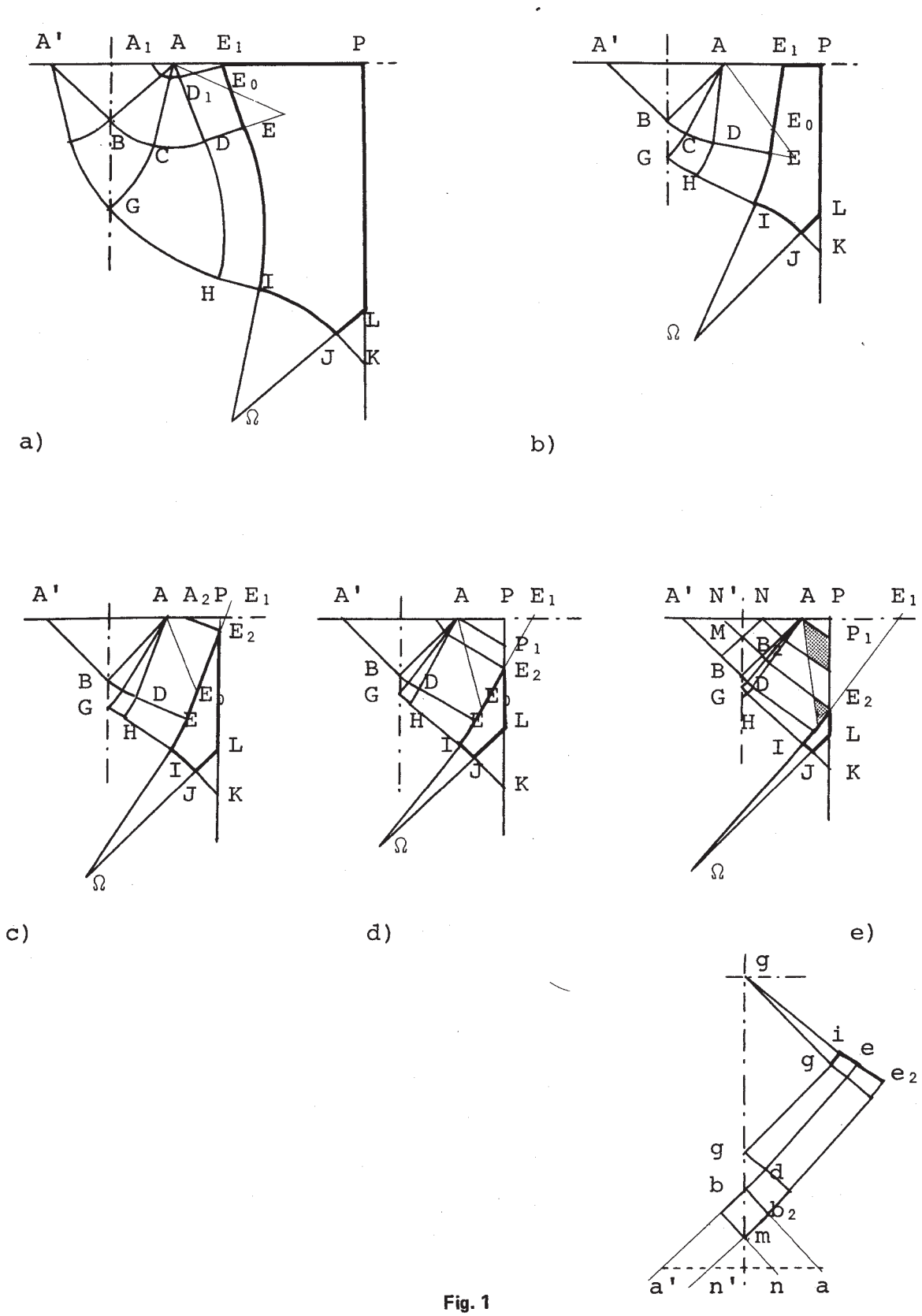


Fig. 1

La pente du segment intermédiaire est nulle lorsque ω a la valeur pour laquelle $u_M = U$. C'est ce cas que nous considérons ici car il fournit la plus petite valeur de ΔL_m^0. La puissance dissipée totale est alors : celle dissipée dans les zones déformées de la solution incomplète, diminuée de la puissance dissipée dans celles de ces zones supprimées par la diminution de largeur, augmentée de la puissance dissipée dans AE_0E_2P (et symétrique) qui se réduit à $2\omega k$ x (aire zones hachurées sur la figure) et de la puissance dissipée par frottement sous le poinçon.

Les formules pour la détermination de ΔL_m^0 correspondant à ces différents cas sont les suivants :

u désigne l'angle $(\Omega I, \Omega J)$

a) et b) :

$$\begin{cases} \overline{DE}^2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{\sin \epsilon}{\cos(\epsilon - \pi/4)} - \Delta L_m^0 \sqrt{2} \; (\overline{\Omega I} + \overline{JK}) + (\Delta L_m^0)^2 + m \dfrac{a^2}{2} = 0 \\ \Delta L_m^0 \leqslant \overline{JK} \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{DE}^2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{\sin \epsilon}{\cos(\epsilon - \pi/4)} - \overline{JK}^2/2 - \overline{\Omega I} \,.\, \overline{JK} + m \dfrac{a^2}{2} - \overline{\Omega I}^2 \times u = 0 \\ \Delta L_m^0 = \overline{JK} \sqrt{2}/2 + \overline{\Omega I} \, [\sin \pi/4 - \sin(\pi/4 - u)] \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} \overline{DE}^2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{\sin \epsilon}{\cos(\epsilon - \pi/4)} - \dfrac{\overline{E_1 E_2}^2}{2 \operatorname{tg}(\epsilon - \pi/4)} - \Delta L_m^0 \sqrt{2} \, (\overline{\Omega I} + \overline{JK}) + (\Delta L_m^0)^2 + ma^2/2 = 0 \\ \Delta L_m^0 \leqslant \overline{JK} \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{DE}^2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{\sin \epsilon}{\cos(\epsilon - \pi/4)} - \dfrac{\overline{E_1 E_2}^2}{2 \operatorname{tg}(\epsilon - \pi/4)} - JK^2/2 - \overline{\Omega I} \,.\, \overline{JK} + ma^2/2 - \overline{\Omega I}^2 \times u = 0 \\ \Delta L_m^0 = \overline{JK} \sqrt{2}/2 + \overline{\Omega I} \, [\sin \pi/4 - \sin(\pi/4 - u)] \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} \overline{DE}^2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{\sin \epsilon}{\cos(\epsilon - \pi/4)} - \dfrac{1}{2}(L_m^0 - a)^2 \operatorname{tg}(\epsilon - \pi/4) - \dfrac{1}{2} \dfrac{(\overline{AE_1} - L_m^0 + a)^2}{\operatorname{tg}(\epsilon - \pi/4)} \\ + ma^2/2 - \Delta L_m^0 \sqrt{2} \, (\overline{\Omega I} + \overline{JK}) + (\Delta L_m^0)^2 = 0 \\ \Delta L_m^0 \leqslant \overline{JK} \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{DE}^2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{\sin \epsilon}{\cos(\epsilon - \pi/4)} - \dfrac{1}{2}(L_m^0 - a)^2 \operatorname{tg}(\epsilon - \pi/4) - \dfrac{1}{2} \dfrac{(\overline{AE_1} - L_m^0 + a)^2}{\operatorname{tg}(\epsilon - \pi/4)} - \overline{JK}^2/2 - \overline{\Omega I} \,.\, \overline{JK} \\ + ma^2/2 - \overline{\Omega I}^2 \times u \\ \Delta L_m^0 = \overline{JK} \sqrt{2}/2 + \overline{\Omega I} \, [\sin \pi/4 - \sin(\pi/4 - u)] \end{cases}$$

e)

$$\overline{DE}^2 \; \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sin \epsilon}{\cos (\epsilon - \pi/4)} - \frac{1}{2}(L_m^0 - a)^2 \operatorname{tg} (\epsilon - \pi/4) - \frac{1}{2} \frac{(\overline{AE}_1 - L_m^0 + a)^2}{\operatorname{tg} (\epsilon - \pi/4)} \; m \; \frac{\overline{EE}_2^2}{2}$$

$$- [\overline{DE} - a\sqrt{2}/2 - (a\sqrt{2}/2 - \overline{EE}_2) \operatorname{tg} (\epsilon - \pi/4)] \times (a\sqrt{2} - 2\overline{EE}_2) \; +$$

$$+ \begin{cases} - \Delta L_m^0 \sqrt{2} (\overline{\Omega I} + \overline{JK}) + (\Delta L_m^0)^2 = 0 \quad \text{et} \quad \Delta L_m^0 \leqslant \overline{JK} \; \sqrt{2}/2. \\ - \overline{JK}^2 - \overrightarrow{\Omega I} \, . \, \overline{JK} - \overline{\Omega I}^2 \times u = 0 \quad \text{et} \quad \Delta L_m^0 = \overline{JK} \; \sqrt{2}/2 + \overline{\Omega I} \, [\sin \pi/4 - \sin (\pi/4 - u)] \end{cases}$$

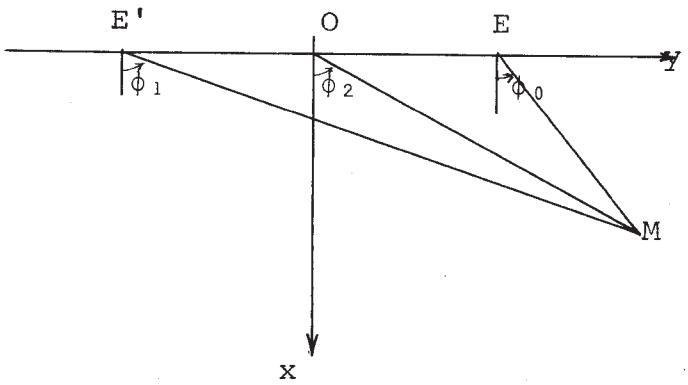
avec dans les cas c, d, e :

$$\overline{E_1E_2} = [\overline{AE}_1 - (L_m^0 - a)]/\sin (\epsilon - \pi/4)$$
$$\overline{EE}_2 = a\sqrt{2} + \overline{AE}_1 \sin (\epsilon - \pi/4) - \overline{E_1E_2}$$

Pour résoudre les équations c, d, e, nous avons procédé par approximation successives.

ANNEXE 5

CONTRAINTES PRODUITES EN ELASTICITE DANS UN DEMI-PLAN CHARGE PAR σ (y) ET τ (y)
(Quatrième partie, chapitre IV § 2.2)



L'origine des axes est le milieu de $E'E$ $(-b + b)$, $b = a + h$.

Le demi-plan $x > 0$ est soumis sur $y'y$ aux contraintes σ (y) et τ (y) (pression normale et contrainte tangentielle). σ (y) et τ (y) possèdent les propriétés suivantes :

$\sigma(y) = \tau(y) = 0$ si $|y| \geqslant b$;

σ (y) et τ (y) sont continues et dérivables sur $(-\infty, +\infty)$; les dérivés σ' (y) et τ (y) sont continues sur $(-\infty, +\infty)$ sauf en $|y| = b$: par ex. en $y = -b$, σ' et τ' ont un saut de 0 à $+k/h$;

Il n'existe pas de point de $(-b + b)$ où τ' s'annule et change de signe au sens strict ($h < a\sqrt{2}$).

Soit P le maximum de σ et $T (= k)$ le maximum de $|\tau|$ sur $E'E$.

En un point M ($x \geqslant 0$) les contraintes sont :

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi}\left\{\int_{-b}^{+b} \frac{x^3}{[x^2 + (y-u)^2)^2}\,\sigma(u)\,du + \int_{-b}^{b} \frac{x^2\,(y-u)}{[x^2 + (y-u)^2)^2}\,\tau(u)\,du\right\} \qquad (1)$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi}\left\{\int_{-b}^{b} \frac{x\,(y-u)^2}{[x^2 + (y-u)^2]^2}\,\sigma(u)\,du + \int_{b}^{+b} \frac{(y-u)^3}{[x^2 + (y-u)^2]^2}\,\tau(u)\,du\right\} \qquad (2)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi}\left\{\int_{-b}^{-b} \frac{x^2\,(y-u)}{[x^2 + (y-u)^2]^2}\,\sigma(u)\,du + \int_{-b}^{b} \frac{x\,(y-u)^2}{[x^2 + (y-u)^2]^2}\,\tau(u)\,du\right\} \qquad (3)$$

On se propose de démontrer que ces contraintes sont bornées en tout point du demi-plan ($x \geqslant 0$).

1 — Les intégrales où intervient $\sigma(u)$ sont bornées :

$$0 \leqslant \left| \int_{-b}^{b} \frac{x^3}{[x^2 + (y-u)^2]^2} \sigma(u)\, du \right| \leqslant \int_{-b}^{b} \frac{x^3}{[x^2 + (y-u)^2]^2} P\, du = \frac{P}{4} [2(\phi_1 - \phi_0) + \sin 2\phi_1 - \sin 2\phi_0]$$

borné par $P\frac{\pi}{2}$

$$0 \leqslant \left| \int_{-b}^{b} \frac{x(y-u)^2}{[x^2 + (y-u)^2]^2} \sigma(u)\, du \right| \leqslant \int_{-b}^{+b} \frac{x(y-u)^2}{[x^2 + (y-u)^2]^2} P\, du = \frac{P}{4} [2(\phi_1 - \phi_0) - \sin 2\phi_1 + \sin 2\phi_0]$$

borné par $P\frac{\pi}{2}$

et

$$0 \leqslant \left| \int_{-b}^{b} \frac{x^2(y-u)}{[x^2 + (y-u)^2]^2} \sigma(u)\, du \right| \leqslant \int_{-b}^{b} \frac{x^2 |y-u|}{[x^2 + (y-u)^2]^2} P\, du =$$

$$\begin{cases} \frac{P}{4} \left| \cos 2\phi_0 - \cos 2\phi_1 \right| & \text{si } \phi_0 \text{ et } \phi_1 \text{ de même signe, borné par } P/2 \\ \frac{P}{4} (2 - \cos 2\phi_0 - \cos 2\phi_1) & \text{si } \phi_0 \leqslant 0 \text{ et } \phi_1 \geqslant 0 \text{, borné par } P \end{cases}$$

donc borné par P.

2. — Les intégrales où intervient $\tau(u)$ dans (1) et (3) sont bornées :

On a de façon analogue à ce qui a été fait ci-dessus :

$$0 \leqslant \left| \int_{-b}^{b} \frac{x^2(y-u)}{[x^2 + (y-u)^2]^2} \tau((u)\, du \right| \leqslant \int_{-b}^{b} \frac{x^2 |y-u|}{[x^2 + (y-u)^2]^2} T\, du$$

borné par T

et :

$$0 \leqslant \left| \int_{-b}^{b} \frac{x(y-u)^2}{[x^2 + (y-u)^2]^2} \tau(u)\, du \right| \leqslant \int_{-b}^{b} \frac{x(y-u)^2}{[x^2 + (y-u)^2]^2} T\, du$$

borné par $T\frac{\pi}{2}$

3. L'intégrale où intervient $\tau(u)$ dans σ_y [formule (2)] est bornée :

La démonstration est ici plus délicate.

Soit $I(x, y)$ cette intégrale :

$$I(x, y) = \int_{-b}^{b} \frac{(y-u)^3}{[x^2 + (y-u)^2]^2} \tau(u)\, du \tag{4}$$

Nous allons démontrer :

§ 3.1 – : $\forall X > 0$, $\forall y$, $I(x, y)$ est bornée $\forall x \geqslant X$.

§ 3.2 – : $\forall y$, $\lim_{x \to 0} I(x, y) = I(0, y)$, défini par l'intégrale prise au sens des valeurs principales (si nécessaire), c'est-à-dire : continuité de $I(x, y)$ pour $x = 0$.

§ 3.3 – : $\forall y$, $I(0, y)$ est bornée.

Il en résultera bien que $I(x, y)$ est bornée $\forall x \geqslant 0$, $\forall y$.

On a :

$$0 \leqslant \left| \int_{-b}^{b} \frac{(y-u)^3}{[x^2 + (y-u)^2]^2} \tau(u)\, du \right| \leqslant \int_{-b}^{b} \frac{|y-u|^3}{[x^2 + (y-u)^2]^2} T\, du =$$

$$= \begin{cases} T \left| \dfrac{\cos^2 \phi_1}{2} - \dfrac{\cos^2 \phi_0}{2} + \operatorname{Log} \dfrac{\cos \phi_0}{\cos \phi_1} \right| & \text{si } \phi_0 \text{ et } \phi_1 \text{ de même signe,} \\ T \left(\dfrac{\cos^2 \phi_0 + \cos^2 \phi_1}{2} - 1 - \operatorname{Log} \cos \phi_0 \cos \phi_1 \right) & \text{si } \phi_0 \leqslant 0 \text{ et } \phi_1 \geqslant 0, \end{cases}$$

expressions qui sont bornées $\forall y$, $\forall x \geqslant X > 0$.

3.2 –

3.2.1 – $|y| > b$.

$I(x, y)$ est continue en x pour $x = 0$, $\forall y$.

3.2.2 – $|y| < b$.

Pour $x = 0$, nous définissons $I(0, y)$ par l'intégrale prise au sens des valeurs principales :

$$I(0, y) = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_{-b}^{y-\epsilon} \frac{\tau(u)}{(y-u)} du + \int_{y+\epsilon}^{b} \frac{\tau(u)}{(y-u)} du \right. \tag{5}$$ [1]

(1) La question de l'existence de cette limite est traitée au § 3.3.3.

et nous allons montrer qu'il y a continuité de $I(x, y)$ en $x = 0$, c'est-à-dire que cette définition est légitime.

Pour $x > 0$, $I(x, y)$ étant défini par (4) on peut aussi écrire :

$$I(x, y) = \int_{-b}^{y-\epsilon} \frac{(y-u)^3}{[x^2 + (y-u)^2]^2} \tau(u)\, du + \int_{y+\epsilon}^{b} \text{id}^{\text{o}} + \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \text{id}^{\text{o}} \qquad (6)$$

Les deux premiers termes, intégrales continues en x pour $x = 0$ tendent donc, quand $x \to 0$ vers les deux termes sous la limite de (5).

Par application de la formule des accroissements finis, on majore le troisième terme, M désignant le maximum de $|\tau'|$ sur $(-b, +b)$:

$$\left| \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \frac{(y-u)^3 \tau(u)}{[x^2 + (y-u)^2]^2} du \right| \leqslant M \left| \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \frac{(y-u)^4}{[x^2 + (y-u)^2]^2} du \right| = M[2\epsilon - 3x \text{ Arc } tg \frac{\epsilon}{x} + \epsilon/(1 + \epsilon^2/x^2)]$$

Pour $x = 0$, l'expression $[2\epsilon - 3x \text{ Arc tg } \frac{\epsilon}{x} + \epsilon/ (1 + \epsilon^2/x^2)]$ est égale à 2ϵ, $\forall \epsilon > 0$, elle est dérivable dérivée négative $(= -3\pi/2)$: donc $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, \eta(\epsilon)$ tel que $\forall x$, $x < \eta(\epsilon)$ on a :

$$0 \leqslant \left| \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \frac{(y-u)^3 \tau(u)}{[x^2 + (y-u)^2]^2} du \right| \leqslant 2\epsilon M$$

On déduit de ce qui précède que :

$$\lim_{x \to 0} I(x, y) = \int_{-b}^{y-\epsilon} \frac{\tau(u)}{(y-u)} du + \int_{y+\epsilon}^{b} \text{id}^{\text{o}} + f(y, \epsilon) \text{ avec } |f(y, \epsilon)| \leqslant 2\epsilon M, \ \forall \epsilon > 0$$

faisant tendre ensuite ϵ vers zéro :

$$\lim_{x \to 0} I(x, y) = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_{-b}^{y-\epsilon} \frac{\tau(u)}{(y-u)} du + \int_{y+\epsilon}^{b} \frac{\tau(u)}{(y-u)} du \right\}$$

ce qui démontre la continuité de $I(x, y)$ en $x = 0$.

3.2.3 – $|y| = b$

Pour $x = 0$, la formule analogue à (5) définissant $I(0, -b)$ par exemple, est :

$$I(0, -b) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-b+\epsilon}^{b} \frac{\tau(u)}{(-b-u)} du \qquad (7)$$

On démontre alors comme ci-dessus que :

$$\lim_{x \to 0} I(x, -b) = I(0, -b)$$

(de même pour $y = b$).

3.3 –

Montrons que $I(0, y)$ est bornée.

3.3.1 – $|y| \geqslant b$.

$$I(0, y) = \int_{-b}^{b} \frac{\tau(u)}{(y-u)} du$$

Par une application immédiate de la formule des accroissements finis on obtient :

$$|I(0, y)| \leqslant 2bM$$

3.3.2 – $|y| < b$.

$$I(0, y) = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_{-b}^{y-\epsilon} \frac{\tau(u)}{(y-u)} du + \int_{y+\epsilon}^{b} \text{id}^{\circ} \right\} \qquad (5)$$

si elle existe.

Appliquant la formule des accroissements finis

$\tau(u) = \tau(y) + (u - y)\, \tau'[z(u)] \quad z \in (-b, b)$ nous obtenons :

$$\int_{-b}^{y-\epsilon} + \int_{y+\epsilon}^{b} = \tau(y) \operatorname{Log} \frac{b+y}{b-y} + \int_{-b}^{y-\epsilon} - \tau'[z(u)]\, du + \int_{y+\epsilon}^{b} - \tau'[z(u)]\, du \qquad (8)$$

les derniers termes sont en valeur absolue bornés par $2bM$; quant au premier terme il est borné $\forall y$: $|y| \leqslant Y \leqslant b$, et lorsque $|y| \to b$, par exemple $y \to -b$, en écrivant $\tau(y) = (b + y)\, \tau'[z(y)]$ où $\tau'[z(y)]$ est borné on voit que $\tau(y) \operatorname{Log} \frac{b+y}{b-y} \to 0$

On démontre ainsi que $\int_{-b}^{y-\epsilon} \frac{\tau(u)}{y-u} du + \int_{y+\epsilon}^{b} \text{id}^{\circ}$ est borné $\forall\ |y| < b$

3.3.3 –

Montrons que $I(0, y)$ existe c'est-à-dire que la limite de (5) quand $\epsilon \to 0$ existe.

D'après 3.3.2, le terme sous la limite de (5) est borné, d'autre part, sa dérivée par rapport à ϵ est :

$$[\tau(y + \epsilon) - \tau(y - \epsilon)]/\epsilon = 2\, \tau'(z) \quad z \in (y - \epsilon, y + \epsilon)$$

d'après les propriétés de τ, $\tau'(z)$ a un signe constant dès que ϵ est suffisamment petit : le terme sous la limite de (5) est alors une fonction monotone de ϵ. Cela entraîne l'existence de la limite de (5) quand $\epsilon \to 0$.

[Même raisonnement pour la limite de (7).]

4 – Conclusions.

Les contraintes σ_x, σ_y, τ_{xy} données par les formules (1), (2), (3) sont bornées en tout point du demi-plan $x \geqslant 0$.

ANNEXE 6

EXPRESSIONS ANALYTIQUES ET COMPORTEMENT DE F (z)
(Quatrième partie chapitre V § 4.3)

Selon les valeurs de h/a et de z/a, $F(z)$ a les diverses expressions analytiques suivantes :

1. $h \geqslant a\sqrt{2}$.

$F(z) \equiv 0 \quad \forall z \in (0, a)$

2. $a \leqslant h \leqslant a\sqrt{2}$.

2.1. $0 \leqslant z \leqslant h\sqrt{2} - a$

$F(z) = 0$

2.2. $h\sqrt{2} - a \leqslant z \leqslant a$

$$F(z) = 2(a + z) \operatorname{Arccos} \frac{h\sqrt{2}}{a + z} - h\sqrt{2} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(a + z) + \sqrt{(a + z)^2 - 2h^2}}{h}$$

fonction croissante de z.

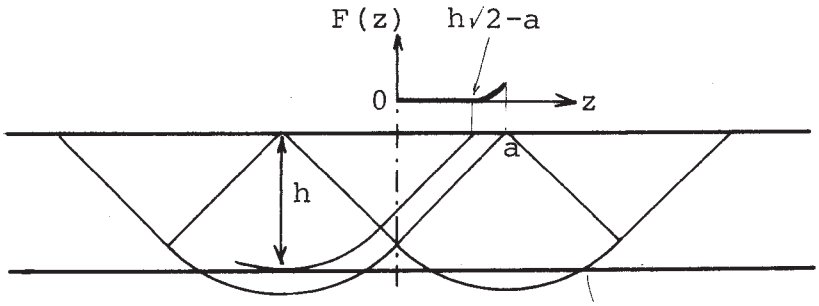


Fig. 1

3. $a\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant h \leqslant a$

3.1. $0 \leqslant z \leqslant h\sqrt{2} - a$

3.2. $h\sqrt{2} - a \leqslant z \leqslant 2h - a$

$$F(z) = 2(a + z) \operatorname{Arccos} \frac{h\sqrt{2}}{a + z} - h\sqrt{2} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(a + z) + \sqrt{(a + z)^2 - 2h^2}}{h}$$

fonction croissante de z.

3.3. $2h - a \leqslant z \leqslant a$

$F(z) = (\frac{\pi}{2} + 1)(a + z) - 2h - h\sqrt{2} \operatorname{Log}(1 + \sqrt{2})$ fonction croissante de z.

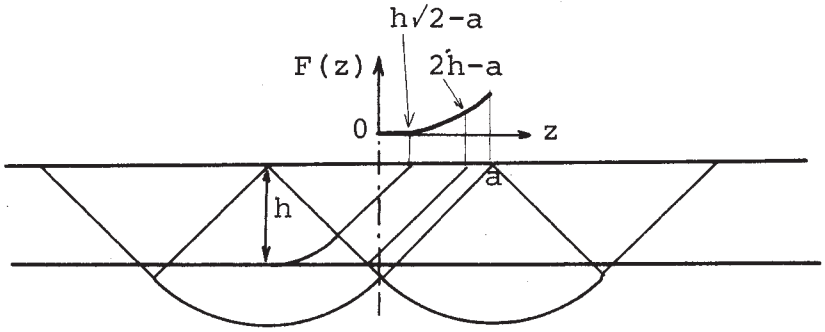


Fig. 2

4. $(2-\sqrt{2})\,a \leqslant h \leqslant a\sqrt{2}/2$

4.1. $0 \leqslant z \leqslant -(h\sqrt{2}-a)$

$$F(z) = 2\left[(a-z)\operatorname{Arccos}\frac{h\sqrt{2}}{a-z} + (a+z)\operatorname{Arccos}\frac{h\sqrt{2}}{a+z}\right] - h\sqrt{2}\operatorname{Log}\frac{\left[a+z+\sqrt{(a+z)^2-2h^2}\right]\left[a-z+\sqrt{(a-z)^2-2h^2}\right]}{2h^2}$$

qui est fonction décroissante de z.

4.2. $-(h\sqrt{2}-a) \leqslant z \leqslant 2h-a$

$$F(z) = 2(a+z)\operatorname{Arccos}\frac{h\sqrt{2}}{a+z} - h\sqrt{2}\operatorname{Log}\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{(a+z)+\sqrt{(a+z)^2-2h^2}}{h}$$ comme au § 3.2.

4.3. $2h-a \leqslant z \leqslant a$

$$F(z) = (\pi/2+1)(a+z) - 2h - h\sqrt{2}\operatorname{Log}(1+\sqrt{2})$$

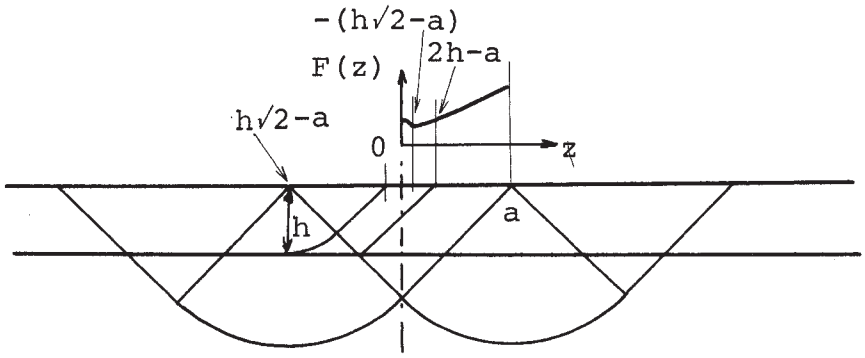


Fig. 3

5. $a/2 \leqslant h \leqslant (2-\sqrt{2})a$

5.1. $0 \leqslant z \leqslant 2h-a$

comme au § 4.1.

$$F(z) = 2\left[(a-z)\operatorname{Arccos}\frac{h\sqrt{2}}{a-z} + (a+z)\operatorname{Arccos}\frac{h\sqrt{2}}{a+z}\right]$$
$$- h\sqrt{2}\operatorname{Log}\frac{\left[a+z+\sqrt{(a+z)^2-2h^2}\right]\left[a-z+\sqrt{(a-z)^2-2h^2}\right]}{2h^2}$$

5.2. $2h - a \leqslant z \leqslant -(h\sqrt{2} - a)$

$$F(z) = 2(a - z)\,\mathrm{Arccos}\,\frac{h\sqrt{2}}{a - z} + \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)(a + z) - 2h - h\sqrt{2}\,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{a - z + \sqrt{(a - z)^2 - 2h^2}}{h}$$

qui est une fonction décroissante de z.

5.3. $(a - h\sqrt{2}) \leqslant z \leqslant a$

$$F(z) = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)(a + z) - 2h - h\sqrt{2}\,\mathrm{Log}\,(1 + \sqrt{2})$$

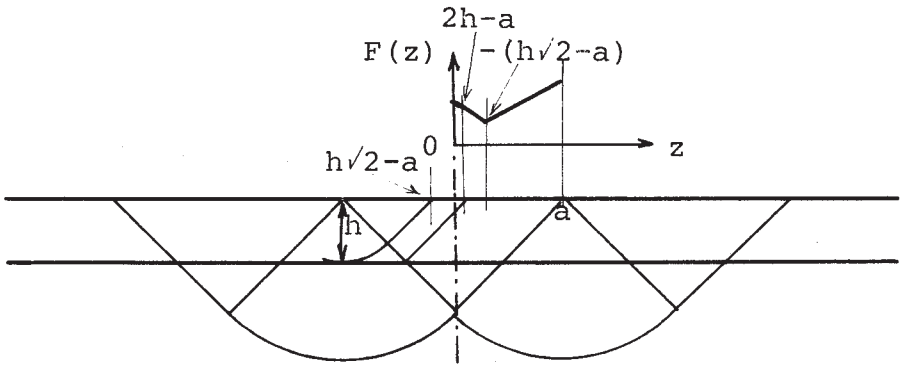


Fig. 4

6. $0 \leqslant h \leqslant a/2$

6.1. $0 \leqslant z \leqslant a - 2h$

$F(z)$ est constante :

$$F(z) = (\pi + 2)\,a - 4h - 2h\sqrt{2}\,\mathrm{Log}\,(1 + \sqrt{2})$$

6.2. $(a - 2h) \leqslant z \leqslant (a - h\sqrt{2})$

comme au § 5.2

$$F(z) = 2(a - z)\,\mathrm{Arccos}\,\frac{h\sqrt{2}}{a - z} + \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)(a + z) - 2h - h\sqrt{2}\,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{a - z + \sqrt{(a - z)^2 - 2h^2}}{h}$$

décroissante de z.

6.3. $(a - h\sqrt{2}) \leqslant z \leqslant a$,

$$F(z) = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)(a + z) - 2h - h\sqrt{2}\,\mathrm{Log}\,(1 + \sqrt{2})$$

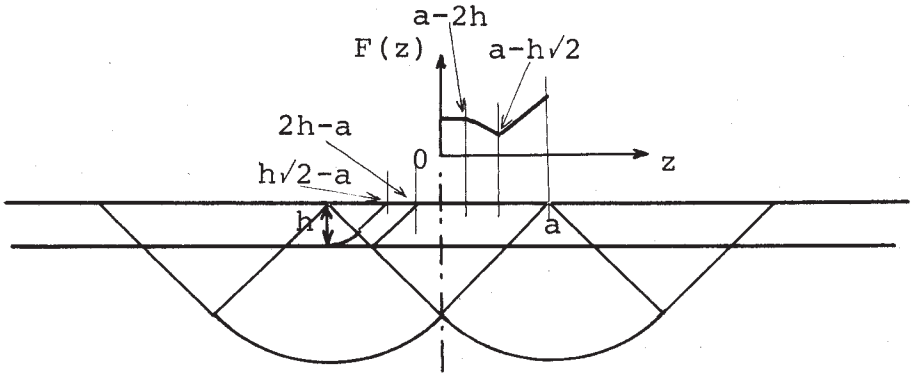


Fig. 5

ANNEXE 7

EXPRESSIONS DE $G_t(z)$ et $\frac{\partial G_t}{\partial z}(z)$

(Quatrième partie, chapitre VII § 3.3)

$$\boxed{0 \leqslant z \leqslant (3 - 2\sqrt{2})\,a}$$

$t = 0$:

$$[1] \quad \begin{cases} \frac{1}{2} G_0(z) = (\pi + 2)\,a + m\,(a - z) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G_0(z)}{\partial z} = m \end{cases}$$

$0 < t \leqslant (a - z)/2$

$$[2] \quad \begin{cases} \frac{1}{2} G_t(z) = (\pi + 2)\,a - 4t - 2t\sqrt{2}\,\mathrm{Log}\,(1 + \sqrt{2}) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G_t(z)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$(a - z)/2 \leqslant t \leqslant (a + z)/2$

$$[3] \quad \begin{cases} \frac{1}{2} G_t(z) = 2\,(a - z)\,\mathrm{Arccos}\,\frac{t\sqrt{2}}{a - z} + (\frac{\pi}{2} + 1)\,(a + z) - 2t - t\sqrt{2}\,\mathrm{Log}\,(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})\,\frac{a - z + \sqrt{(a - z)^2 - 2t^2}}{t} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G_t(z)}{\partial z} = \frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{Arccos}\,\frac{t\sqrt{2}}{a - z} + 1 - \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{(a - z)^2 - 2t^2}} \end{cases}$$

$(a + z)/2 \leqslant t \leqslant (a - z)\sqrt{2}/2$

$$[4] \quad \begin{cases} \frac{1}{2} G_t(z) = 2\,[(a - z)\,\mathrm{Arccos}\frac{t\sqrt{2}}{a - z} + (a + z)\,\mathrm{Arccos}\,\frac{t\sqrt{2}}{a + z}] - t\sqrt{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{a + z + \sqrt{(a + z)^2 - 2t^2}}{t\sqrt{2}} \\ \qquad - t\sqrt{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{a - z + \sqrt{(a - z)^2 - 2t^2}}{t\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G_t(z)}{\partial z} = 2\,\mathrm{Arccos}\,\frac{t\sqrt{2}}{a + z} - 2\,\mathrm{Arccos}\,\frac{t\sqrt{2}}{a - z} + \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{(a + z)^2 - 2t^2}} - \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{(a - z)^2 - 2t^2}} \end{cases}$$

$(a - z)\sqrt{2}/2 \leqslant t \leqslant (a + z)\sqrt{2}/2$:

$$[5] \quad \begin{cases} \frac{1}{2} G_t(z) = 2\,(a + z)\,\mathrm{Arccos}\,\frac{t\sqrt{2}}{a + z} - t\sqrt{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{a + z + \sqrt{(a + z)^2 - 2t^2}}{t} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial G_t(z)}{\partial z} = 2\,\mathrm{Arccos}\,\frac{t\sqrt{2}}{a + z} + \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{(a + z)^2 - 2t^2}} \end{cases}$$

$(a + z)\sqrt{2}/2 \leqslant t \leqslant a\sqrt{2}$ et $t \geqslant a\sqrt{2}$:

$$[6] \quad \begin{cases} G_t(z) = 0 \\ \frac{\partial G_t(z)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{(3 - 2\sqrt{2})a \leqslant z \leqslant a}$$

$t = 0$: [1]

$0 \leqslant t \leqslant (a - z)/2$: [2]

$(a - z)/2 \leqslant t \leqslant (a - z)\sqrt{2}/2$: [3]

$(a - z)\sqrt{2}/2 \leqslant t \leqslant (a + z)/2$:

$$[7] \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2} G_t(z) = (\pi/2 + 1)\,(a + z) - 2t - t\sqrt{2}\,\mathrm{Log}\,(1 + \sqrt{2}) \\[2ex] \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial G_t(z)}{\partial z} = (\pi/2 + 1) \end{cases}$$

$(a + z)/2 \leqslant t \leqslant (a + z)\sqrt{2}/2$: [5]

$(a + z)\sqrt{2}/2 \leqslant t \leqslant a\sqrt{2}$ et $t \geqslant a\sqrt{2}$: [6]

TABLEAU I

VALEURS DE $p_h/2k$ ET DE h/a EN FONCTION DE α, OUVERTURE DU BULBE.
(Deuxième partie, chapitre II)

α	α en °	(h/a)	$\frac{p_h}{2k}$
0,00	0,00	1,0000	1,0000
0,05	2,86	1,1026	1,0046
0,10	5,73	1,2107	1,0176
0,15	8,59	1,3249	1,0377
0,20	11,46	1,4457	1,0639
0,25	14,32	1,5740	1,0954
0,30	17,19	1,7102	1,1316
0,35	20,05	1,8554	1,1722
0,40	22,92	2,0102	1,2167
0,45	25,78	2,1756	1,2649
0,50	28,65	2,3526	1,3165
0,55	31,51	2,5423	1,3712
0,60	34,38	2,7457	1,4290
0,65	37,24	2,9644	1,4896
0,70	40,11	3,1995	1,5529
0,75	42,97	3,4528	1,6187
0,80	45,84	3,7258	1,6870
0,85	48,70	4,0204	1,7576
0,90	51,57	4,3390	1,8306
0,95	54,43	4,683	1,905
1,00	57,30	5,055	1,982
1,0302	59,03	5,298	2,0302
1,05	60,16	5,457	2,061
1,10	63,02	5,894	2,142
1,15	65,89	6,367	2,225
1,20	68,75	6,880	2,308
1,25	71,62	7,438	2,394
1,30	74,48	8,043	2,481
1,35	77,35	8,702	2,569
1,3507	77,39	8,713	2,571

TABLEAU II

VALEURS DE $p_\delta/2k$ ET DE h/a EN FONCTION DE δ

(Deuxième partie, chapitre III)

δ	δ en °	$(h/a)_\delta$	$p_\delta/2k$
0,00	0,00	2,0000	1,0000
0,05	2,86	2,1020	1,0500
0,10	5,73	2,2073	1,1000
0,15	8,59	2,3164	1,1500
0,20	11,46	2,4292	1,2000
0,25	14,32	2,5472	1,2500
0,30	17,19	2,6697	1,3000
0,35	20,05	2,7975	1,3500
0,40	22,92	2,9308	1,4000
0,45	25,78	3,0701	1,4500
0,50	28,65	3,2156	1,5000
0,55	31,51	3,3682	1,5500
0,60	34,38	3,5279	1,6000
0,65	37,24	3,6957	1,6500
0,70	40,11	3,8715	1,7000
0,75	42,97	4,0568	1,7500
0,80	45,84	4,2517	1,8000
0,85	48,70	4,4571	1,8500
0,90	51,57	4,6736	1,9000
0,95	54,43	4,9022	1,9500
1,00	57,30	5,1439	2,0000
1,0302	59,03	5,298	2,0302

TABLEAUX DES VALEURS NUMERIQUES CORRESPONDANT AUX COURBES DE LA FIGURE 23.

(Deuxième partie, chapitre V)

1.1. Solution complète.

$\frac{p_h}{2k}$	2,5708	2,3963	2,2217	2,0472
$\frac{L}{a}$	8,6210	7,0801	5,7861	4,6993
$\frac{h}{a}$	$\geqslant$8,713	7,454	6,351	5,387

1.2 (1.1, 1.2, 2.1). Solutions cinématiques déduites des solutions incomplètes de Hill (1950 b) pour le barreau entaillé.

$\frac{p_h}{2k}$	2,5708	2,3963	2,2217	2,0472
$\frac{h}{a}$	8,713	7,454	6,351	5,387
$\frac{L}{a}(m = 0)$	8,5927	7,0561	5,7468	4,6281
$\frac{L}{a}(m = 1)$	8,5659	6,9963	5,6801	4,5535

1.2.2.2. Solutions incomplètes de Hill et Ewing.

$\frac{p_h}{2k}$	2,5708	2,3963	2,2217	2,0472
$\frac{h}{a}$	8,713	7,454	6,351	5,387
$\frac{L}{a}(m = 0)$	8,5920	7,0641	5,7746	4,6885
$\frac{L}{a}(m = 1)$	8,5388	7,0065	5,7136	4,6261

2.1. Solution statique.

$\frac{p}{2k}$	1.8727	1,6981	1,5236	1,3491	1,1745	1,0000
$\frac{L}{a}$	3,7886	3,0200	2,3762	1,8355	1,3814	1,0000
$\frac{h}{a}$	4,555	3,865	3,287	2,795	2,372	2,000

se raccorde tangentiellement à 1.1

2.2.1. Solution incomplète de Hill et Ewing et solutions cinématiques déduites de celle-là.

$\frac{p}{2k}$	1,9847	1,9050	1,7576	1,6187
$\left(\frac{h}{a}\right)_h$	5,066	4,683	4,020	3,453
$\frac{L}{a}(m = 0)$	4,3431	3,890	2,961	1,989
$\frac{L}{a}(m = 1)$	4,2813	3,824	2,883	1,904

se raccordent tangentiellement à 1.2.2.2.

$\frac{p}{2k}$	1,9847	1,750	1,600
$\left(\frac{h}{a}\right)_\delta$	5,070	4,057	3,528
$\frac{L}{a}(m=0)$	4,3431	2,909	1,853
$\frac{L}{a}(m = 1)$	4,2813	2,832	1,768

2.2.3. Solutions cinématiques déduites des solutions incomplètes de Hill (1950 b) pour le barreau entaillé.

$\frac{p}{2k}$	1,8827	1.6981	1,5236	1,3491	1,1745	1,0000
$\left(\frac{h}{a}\right)_h$	4,553	3,772	3,091			
$\left(\frac{h}{a}\right)_\delta$	4.555	3.865	3,287	2,795	2,372	2,0000
$\frac{L}{a}(m = 0)$	3,6713	2,8494	2,1972	1,7829	1,3754	1,0000
$\frac{L}{a}(m = 1)$	3,5814	2,7559	2,1262	1,7738	1,3748	1,0000

Les deux courbes se raccordent tangentiellement à 1,2

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

J.F.W. BISHOP (1953) : *On the complete solution to problems of deformation of a plastic rigid material* J. Mech. Sol. **2**, 1, p. 43.

J.F.W. BISHOP (1958) : *On the effect of friction on compression and indentation between flat dies* – J. Mech. Phys. Sol. 6 2, p. 132.

I. F. COLLINS (1968 a) : *The algebraic geometry of slip-line fields with application to boundary value problems* – Proc. Roy. Soc. A 303 p. 317.

I.F. COLLINS (1968 b) : *An optimum loading criterion for rigid plastic materials* – J. Mech. Phys. Sol. **16**, 2, p. 73.

I.. COLLINS (1968 c) : *Geometric properties of some slip-line fields for compression and extrusion* – J. Mech. Phys. Sol. **16**, 3, p. 137.

R. COURANT et D. HILBERT (1962) : *Methods of mathematical physics.* Vol. II. Interscience Publ. New York.

J. COURBON (1964) : *Résistance des matériaux.* Dunod. Paris.

D.C. DRUCKER, H.J. GREENBERG, W. PRAGER (1951) : *The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain* – J. Appl. Mech. **18** p. 371.

D.C. DRUCKER et R.T. SHIELD : *The application of limit analysis to punch indentation problems* – J. Appl. Mech. **20**, p. 453.

D.C. DRUCKER et W. PRAGER (1952) : *Soil mechanics and plastic analysis or limit design* – Quart. Appl. Math. **10**, p. 157.

D.C. DRUCKER (1954) : *Coulomb friction, plasticity, and limit loads* – J. Appl. Mech. **21**, p. 71.

D.J.F. EWING et R. HILL (1967) : *The plastic yielding of V. notched tension bars* – J. Mech. Phys. Sol. 15, 2, p. 115.

D..F. EWING (1968) : *The plastic yielding of V – notched tension bars with circular roots* – J. Mech. Phys. Sol. **16**, p. 81.

H. GEIRINGER (1937) : *Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes* – Mem. Scien. Math. 86, Gauthier-Villars, Paris 1937.

H. GEIRINGER (1953) : *Some recent results in the theory of an ideal plastic body* – in *Advances in Applied Mechanics,* Acad Press, New York.

A.P. GREEN (1951) : *A theoretical investigation of the compression of a ductile material between smooth flat dies* – Phil. Mag. (7), **42**, p. 900.

A.P. GREEN (1954) : *On the use of hodographs in problems of plane plastic strain* – J. Mech. Phys. Sol. **2**, s, **2**, p. 73.

R. HILL, E.H. LEE et S.J. TUPPER (1945) : *Ministry of Supply. Armament research Dept.* Theoretical research, rep. 28/45, cité dans

R. HILL (1950 a) : *The mathematical theory of plasticity* – Oxford Clarendon Press.

R. HILL (1950 b) : *A theoretical investigation of the effect of specimen size in the measurement of hardness* – Phil. Mag. **41**, p. 745.

R. HILL (1951) : *On the state of stress in a plastic rigid body at the yield point* – Phil. Mag. **42**, p. 868.

R. HILL, E.H. LEE et S.J. TUPPER (1951) : *A method of numerical analysis... Compression of ductile material betweenrough plates* – J. Appl. Mech. **18**, p. 46.

R. HILL (1952) : *Comment on Dr Lee's paper* – Phil. Mag. 7, **43**, 1952, p. 560.

R. HILL (1953) : *On the mechanics of cutting metal strips with knife-edged tools* – J. Mech. Phys. Sol. **1**, 4, p. 265.

R. HILL (1954) : *On the limits set by plastic yielding to the intensity of singularities of stress* – J. Mech. Phys. Sol. **2**, 4, p. 278.

W. JOHNSON et H. KUDO (1960) : *The compression of rigid plastic material between rough parallel dies of unequal width* – Int. J. Mech. Sc. **1**, 4, p. 336.

W.T. KOITER (1960) : *General theorems for elastic-plastic solids in Progress in solid mechanics edited by I.N. SNEDDON and R. HILL North Holland publishing company – Amsterdam.*

A.I. KUZNETZOV (1958) : *The problem of torsion and plane strain of non-homogeneous plastic bodies* – Arch. Mech. Stos. **10**, 4, p. 447.

E.H. LEE (1952) : *On the significance of the limit load theorems for an elastic-plastic body* – Phil. Mag. 7, **43**, p. 549.

J. MANDEL (1942) : *Equilibre par tranches planes des solides à la limite d'écoulement* – Thèse.

J. MANDEL (1962) : *Problèmes de déformation plane (et de contrainte plane) pour les corps parfaitement plastiques* – Dans Séminaire de plasticité édité par J. MANDEL. P.S.T. N° 116, ministère de l'air.

J. MANDEL (1964) : *Contribution théorique à l'étude de l'écrouissage et des lois de l'écoulement plastique* – Proc. 11 th Int. Congr. Appl. Mech., Springer Verlag 1966.

J. MANDEL (1966) : *Mécanique des milieux continus* – II, p. 706, Gauthier-Villars, Paris.

A.C. PALMER (1966) : *A limit theorem for materials with non-associated flow-laws.* – J. Meca. 5, 2, p. 217.

W. PRAGER (1951) : *Theory or perfectly plastic solids* – John Wiley. New York.

W. PRAGER (1958) : *Problèmes de plasticité théorique,* p. 49 Dunod, Paris.

L. PRANDTL (1923) :*Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht* – Z. angew. Math. Mech, **3**, p. 401.

D. RADENKOVIC (1961) : *Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée* – C.R.Ac. Sci (Paris), **252**, p. 4103.

D. RADENKOVIC (1962) : *Théorie des charges limites* – dans Séminaire de plasticité édité par J. MANDEL, P.S.T. N^0 116.

J. RYCHLEWSKI (1966 a) : *Sur l'écoulement initial plastique d'un semi-espace dû à une distribution donnée de la vitesse* – C.R. Ac. Sci. (Paris), A, **263**, p. 417.

J. RYCHLEWSKI (1966 b) : *Plane plastic strain for jump non homogeneity* – Int. J. non-linear mechanics **1**, 57-78.

G. SACCHI ET M. SAVE (1968) : *A note on the limit loads of non-standard materials* – Meccanica **3**, 1, p. 43.

J. SALENÇON (1967 a) : *Poinçonnement d'une plaque...* – C.R. Ac. Sci. (Paris), A, **264**, p. 613.

J. SALENÇON (1967 b) : *Poinçonnement d'une plaque...* C.R. Ac. Sci. (Paris), A, **265**, p. 869.

J. SALENÇON (1968 a) : *Poinçonnement d'un bicouche...* C.R. Ac. Sci. (Paris), A, **266**, p. 1210.

J. SALENÇON (1968 b) : *Etude d'une classe de solutions cinématiques...* C.R. Ac. Sci. (Paris), A, **267**, p. 171.

M. SAYIR et H. ZIEGLER (1968) : *Zum Prandtlschen Stampelproblem* – Ing. Arch. **36**, 5, p. 294.

R.T. SHIELD (1954) : *Brief note in J. Appl. Mech. 21,* p. 193, voir aussi dans A. PHILIPPS. *Introduction to plasticity,* p. 158 – Ronald Press Company, New York (1956).

V.V. SOKOLOVSKI (1950) : *Theorie der Plastizität* (traduit du russe), V E B Verlag Technik, Berlin 1955.

R. SOWERBY, W. JOHNSON et S.K. SAMANTA (1958) : *Plane strain drawing and extrusion of a rigid perfecty plastic material through concave dies* – Int. J. Mech. Sc. **10**, 4, p. 231.

W. SZCZEPINSKI (1966) : *Indentation of a plastic block by two opposite narrow punches* – Bull. Acad. Polon. Sc. Tech. **14**, 11-12, 1966, p. 671.

W. SZCZEPINSKI (1967) : *Wstep do analisy procesow obrobki plastycznej* – Biblioteka mechenike stosowanej. Varsovie 1967.

TCHENG (1956) : *Pouvoir portant d'un solide composé de deux couches plastiques différentes* – Thèse Fac. Sc. Paris – (1956) C.E.B.T.P. Paris.

A. WINZER et G.F. CARRIER (1948) : *The interaction of discontinuity surfaces in plastic fields of stress* – J. Appl. Mech., **15**, p. 261.

A. WINZER et G.F. CARRIER (1949) : *Discontinuity of stress in plane plastic flow* – J. Appl. Mech., **16**, p. 346.

TABLE DES MATIERES

	Pages
AVANT-PROPOS	1
Introduction	3
Première partie : théorèmes généraux	5
I. Théorie des charges limites	7
1. Le problème de l'équilibre limite	7
2. Propriétés de la charge limite	11
3. Détermination d'un chargement limite	11
4. Les différentes manières pratiques de traiter les problèmes	12
II. Extensions possibles de la théorie des charges limites	14
1. Les différents types de chargement	14
2. Propriétés	14
3. Drücker (1954) : théorème A	15
4. Théorème A'	15
5. Drücker (1954) : théorème B	16
6. Cas où il n'y a qu'un paramètre de chargement	16
7. Solide constitué de matériau non standard	17
III. Application aux problèmes de poinçonnement en déformation plane	17
1. Milieu infini	18
2. Milieu fini et $h/a \geqslant 1$	18
Deuxième partie : Sur le poinçonnement d'une plaque en déformation plane, $h/a \geqslant 1$	19
I. Rappels sur la théorie de l'équilibre limite en déformation plane	21
II. Recherche d'une solution complète associée à la solution incomplète de Hill	22
1. La solution incomplète de Hill	22
2. Prolongement du champ de contraintes. Problème local	23
3. Poursuite du prolongement (dans l'hypothèse $h/a \geqslant 5{,}298$)	25
4. Quelques propriétés du réseau	27
5. Marche à suivre pour continuer la construction	28
6. Famille des courbes sur lesquelles la contrainte appliquée est verticale	28
7. La courbe (L)	30
8. Vérification de la condition sur les contraintes le long de (L)	31
9. Conclusions	35
III. Recherche d'une solution statique pour $1 \leqslant h/a \leqslant 5{,}298$	35
1. Construction d'une solution statique	35
2. Etude précise de cette solution statique	36
3. Résultats	38
IV. Problèmes voisins. Signification de la borne $h/a = 5{,}298$	40
1. La borne $h/a = 5{,}298$	40
2. Quelques problèmes voisins	40
3. La borne $h/a = 5{,}298$ et le prolongement de la solution incomplète de Hill	44
V. Influence de la largeur de la plaque	45
1. $h/a \geqslant 5{,}298$	45
2. $1 \leqslant h/a < 5{,}298$	52

Pages

Troisième partie : Sur le poinçonnement d'une plaque en déformation plane, h/a < 1 55

I. Introduction 57

II. Etude du cas du poinçon parfaitement rugueux 57

1. Solution incomplète 57
2. Solution complète 59

III. Etude du cas du poinçon partiellement rugueux 60

1. Solution complète pour un voisinage de h/a = 1 60
2. Solution statique pour $h/a < 1/[A_0\ (2x) + I_0\ (2x)]$ 61
3. Solutions complètes pour $h/a < 1/[A_0\ (2x) + I_0\ (2x)]$ 63
4. Majoration de la charge limite dans les intervalles Δ_n 65
5. Complément sur le cas du poinçon lisse 69

IV. Frottement de Coulomb sous le poinçon 70

Quatrième partie : Sur le poinçonnement d'un demi-plan non homogène en déformation plane 71

I. Introduction 73

II. Problème du bicouche 73

III. Bicouche dont la couche inférieure est infiniment rigide 74

1. Solutions incomplètes 74
2. Solutions complètes associées 79
3. Conclusions 79

IV. Bicouche dans le cas où $k \leqslant K < +\infty$ 80

1. Solution statique 80
2. Solutions incomplètes 80
3. Solutions complètes associées 80
4. Remarque 82

V. Etude d'une solution cinématique du problème du bicouche 82

1. Calcul de la puissance dissipée 82
2. Position du problème 83
3. Résultats généraux 84
4. Application de ces résultats au cas du bicouche 87
5. Résultats obtenus dans le cas du poinçon lisse et $k < K < \infty$ 89
6. Résultats dans le cas du poinçon rugueux et $k < K < \infty$ 90

VI. Problème du bicouche, $K \leqslant k < \infty$ 90

1. Solution statique 90
2. Solutions cinématiques 90
3. Remarque 92

VII. Poinçonnement d'un demi-plan en matériau isotrope stratifié 92

1. Définition 92
2. Solution statique 92
3. Solution cinématique 92

Pages

Annexes

1. Calcul des abscisses curvilignes sur les courbes du réseau de la figure 1 (2e partie, chap. II, § 2) 95
2. Concavité de la courbe (L) en P. (2e partie, chap. II, § 7) 96
3. Prolongement des solutions incomplètes de Prandtl, par la méthode de Shield (2e partie, chap. IV, § 2) 98
4. Solutions cinématiques déduites de la solution incomplètes de Hill pour les éprouvettes entaillées (2e partie, chap. V, § 2.2.2) 100
5. Contraintes produites en élasticité dans un demi-plan chargé par $\sigma(y)$ et $\tau(y)$ (4e partie, chap. IV, § 2.2). 104
6. Expressions analytiques et comportement de F (z) (4e partie, chap. V, § 4.3) 109
7. Expressions de $G_t(z)$ en $\frac{\partial G_t(z)}{\partial z}$ (4e partie, chap. VII, § 3.3). 112

Tableau I 114
Tableau II 115
Tableau III 116

Références bibliographiques 119

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Programmation linéaire et non linéaire

Vu
et permis d'imprimer
Le Recteur de l'Académie de Paris
Robert MALLET

Vu et approuvé
Paris, le 19 novembre 1969
Le Doyen de la Faculté des Sciences de Paris
Marc ZAMANSKI