

Pression limite dans un tube présentant un défaut de centrage

par

J. SALENÇON

Présenté par W. OLSZAK le 16 mars, 1969

On donne un encadrement de la pression limite qui peut être imposée à l'intérieur d'un tube cylindrique dont l'alésage est excentré. Une solution statique et trois solutions cinématiques sont utilisées.

On considère un tube cylindrique (dont le rayon extérieur R sera pris égal à l'unité) dont l'alésage de rayon r , est excentré de la distance e (fig. 1). Ce tube est soumis à une pression extérieure de référence (que l'on peut prendre nulle) et à une pression à l'intérieur p . Il s'agit d'un problème de déformation plane que l'on traite dans le cadre de la théorie des charges limites; nous supposons que toutes les conditions sont remplies pour que cette théorie soit applicable et conduise à des résultats

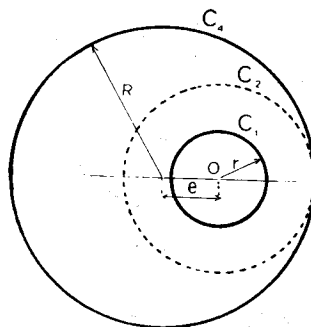


Fig. 1

ayant une signification pratique (on pourra se reporter à l'étude complète faite dans [1] pour le cas du tube élasto-plastique centré). Le matériau constituant le tube obéit au critère de plasticité de Tresca ($|\sigma_1 - \sigma_3| = 2k$) ou à celui de Misès ($J_2 = k^2$). On cherche à évaluer la pression limite applicable à l'intérieur du tube.

1. Minorant de la pression limite: méthode statique

Un champ de contraintes licite est obtenu de la façon suivante: on considère dans la zone comprise entre les cercles C_1 et C_2 (fig. 1), le champ de contraintes continu à la limite d'écoulement tel que la contrainte agissant sur C_2 soit nulle

et que la contrainte agissant sur C_1 soit une pression normale uniforme; dans la zone comprise entre C_2 et C_4 on considère le champ de contraintes nul.

Ce champ de contraintes licite fournit un minorant de la pression limite qui n'est autre que la pression limite du plus grand tube centré (en 0) inscrit dans le tube excentré:

$$(1) \quad p = 2k \log \frac{1-e}{r}.$$

2. Majorants de la pression limite: méthode cinématique

2.1 Retour sur le cas du tube centré

La solution complète pour l'équilibre limite d'un tube centré soumis à une pression intérieure est connue. Les lignes caractéristiques des contraintes et des vitesses sont des spirales logarithmiques de pole 0 inclinées à $\pm \frac{\pi}{4}$ sur les rayons vecteurs. Le mécanisme de déformation utilisé habituellement pour cette solution est un écoulement radial; en fait on peut associer au champ de contraintes une infinité de mécanismes de déformation et en particulier ceux du type représenté à la fig. 2.

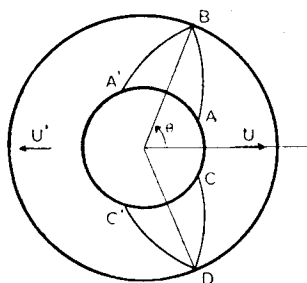


Fig. 2

Les deux blocs $ABDC$ et $A'BDC'$ sont rigides et se déplacent horizontalement avec les vitesses U et U' ; il y a discontinuité de la vitesse le long de AB , $A'B$, CD et $C'D$ et les zones déformées plastiquement sont ABA' et CDC' . Le champ de vitesses dans ces zones s'obtient aisément au moyen des équations de Geiringer, par exemple en construisant l'hodographe (le cas où les zones ABA' et CDC' se chevauchent ne crée aucune difficulté particulière).

Pour qu'un tel mécanisme puisse être associé au champ de contraintes exact connu, il faut que la puissance de ce dernier y soit en tout point positive. La vérification de cette condition, par exemple au moyen de l'hodographe — cf. [2] — restreint les mécanismes possibles à ceux pour lesquels $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$.

2.2. Tube excentré. Solution cinématique

Revenant maintenant au cas du tube excentré, nous considérons une classe de mécanismes cinématiques directement inspirée des résultats du § précédent. Un de ces mécanismes est représenté à la fig. 3 (dans le cas de l'optimum où $\theta = \frac{\pi}{4}$): AB , $A'B$, CD , $C'D$ sont les spirales logarithmiques de pôle O inclinées à $\pm\pi/4$ sur les rayons vecteurs qui aboutissent en B et D sur C_4 , surface extérieure du tube, OB et OD étant inclinées à $\pm\theta$ sur l'horizontale; les blocs $ABDC$ et $A'BDC'$ sont rigides et se déplacent horizontalement, les zones déformées sont ABA' et CDC' comme ci-dessus.

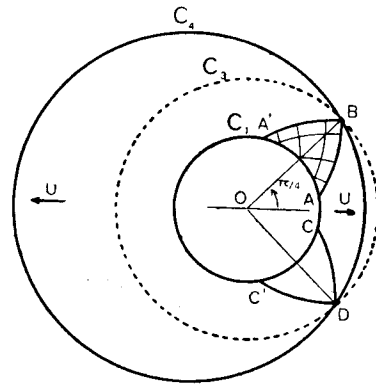


Fig. 3

La puissance dissipée dans ce mécanisme licite est la même que lorsque le même mécanisme est utilisé pour le tube centré en O limité par les cercles C_1 et C_3 (de rayon OB). Il en est de même du champ des vitesses et de la distribution des vitesses sur le cercle intérieur C_1 . Il s'ensuit que le majorant de la pression limite obtenu pour le tube excentré, au moyen de ce mode de déformation, n'est autre que la pression limite du tube centré (C_1 , C_3); il est alors évident que le meilleur majorant fourni par cette méthode est obtenu lorsque C_3 a le rayon minimum, c'est-à-dire lorsque $\theta = \pi/4$ comme indiqué sur la fig. 3. Ce majorant est:

$$(2) \quad p_1 = 2k \log \frac{\sqrt{4 - 2e^2} - e\sqrt{2}}{2r}.$$

Nous indiquons cette méthode, bien qu'elle ne fournisse pas le meilleur majorant que nous ayons obtenu (cf. § 2.3 et 2.4), pour sa très grande simplicité et sa commodité d'emploi pratique si l'on ne dispose pas des abaques de la fig. 6 ou de moyens de calcul. La précision de l'encadrement est bonne pour les faibles valeurs de l'excentrement. (Pour $e = 0$ on a $p_1 = p_0 = -2k \log r$, valeur exacte de la pression limite).

2.3. Tube excentré; seconde solution cinématique

Lorsque e approche de sa valeur maximale, l'encadrement de la pression limite entre p_0 et p_1 devient peu précis. Nous avons donc étudié une autre classe de mécanismes cinématiques permettant d'améliorer les résultats dans ce voisinage.

Le mode de déformation est le suivant:

Deux lignes de glissement horizontales et symétriques, isolées, AB et $A'B'$, (fig. 4) permettent le déplacement du bloc rigide $ABB'A'$ avec la vitesse horizontale

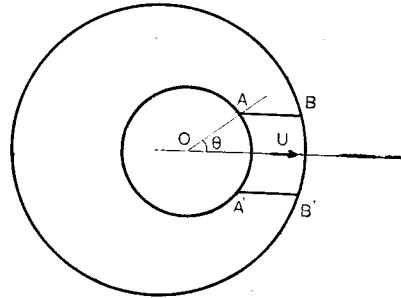


Fig. 4

U . A e et r fixés, le mécanisme dépend d'un paramètre soit θ , angle de OA avec l'horizontale.

La majorant de la pression limite est obtenu en égalant la puissance de la pression intérieure à la puissance dissipée:

$$(3) \quad p_2 = 2k \frac{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} - r \cos \theta - e}{2r \sin \theta}.$$

Pour chaque valeur de r et de e on cherche le minimum de p_2 en θ , qui constitue le meilleur majorant fourni par cette méthode.

Les résultats sont représentés à la fig. 6. On voit que p_2 est un meilleur majorant que p_1 , au voisinage de $e = 1 - r$, sur un intervalle dont l'étendue relative est d'autant plus grande que r est plus grand (tube plus mince). Pour $e = (1 - r)$ on a $p_2 = p_0 = 0$, $\frac{\partial p_2}{\partial e} \rightarrow -\infty$ alors que $\frac{\partial p_0}{\partial e} = -\frac{1}{1 - e}$ *).

2.4 Tube excentré; troisième solution cinématique

A partir des deux mécanismes présentés ci-dessus, on peut concevoir le mode de déformation plus élaboré représenté à la fig. 5.

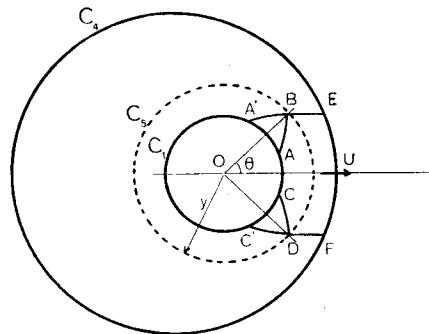


Fig. 5

*) A noter que quand $e \nearrow (1 - r)$, la valeur θ_0 correspondant l'optimum tend vers zéro et que $d\theta/de \rightarrow -\infty$.

Désignons par C_5 le cercle de centre 0 et de rayon $OB = y \geq r$. OB et OD font l'angle $\pm\theta$ avec l'horizontale, $AB, A'B, CD$ et $C'D$ sont les spirales logarithmiques de pôle 0 comme au § 2.1, et BE et DF sont deux lignes de glissement horizontales symétriques isolées comme au § 2.3. Le bloc $ABEFDC$ est rigide et se déplace horizontalement avec la vitesse U . $A'BEFDC'$ est rigide immobile. Il y a glissement le long de BE et DF , de $AB, A'B, CD, C'D$, et les zones ABA' et CDC' sont déformées plastiquement comme au § 2.1. Le mécanisme licite ainsi obtenu dépend de deux paramètres: y et θ .

Pour que le champ de déformations entre C_1 et C_5 puisse être associé au champ de contraintes connu pour le tube centré, il faut que $\theta \geq \pi/4$.

Le calcul de la puissance dissipée et du majorant de la pression limite peut alors être beaucoup simplifié. En effet considérons d'abord le tube excentré limité par C_5 et C_4 : en employant les formules du § précédent on détermine la distribution de pression uniforme p' à l'intérieur de C_5 dont le travail dans le déplacement horizontal de BD est égal au travail dissipé par glissement le long de BE et DF ; considérons ensuite le tube centré (C_1, C_5), soumis le long de C_5 à la pression uniforme p' : la pression $p_3 = p' + 2k \log(y/r)$ est alors telle que son travail (le long de $A'ACC'$) soit égal au travail dissipé dans ABA', CDC' et par glissement le long de $AB, A'B, CD, C'D$, diminué du travail de la pression p' extérieure sur C_5 dans le déplacement horizontal de BD .

Ainsi p_3 est le majorant de la pression limite donné par le mécanisme*):

$$(4) \quad p_3 = 2k \left\{ \frac{\sqrt{1 - y^2 \sin^2 \theta} - y \cos \theta - e}{2y \sin \theta} + \log \frac{y}{r} \right\}.$$

Le meilleur majorant fourni par cette méthode est obtenu en minimisant p_3 en y et θ . Le domaine sur lequel on doit rechercher le minimum absolu de p_3 est défini par (5):

$$(5) \quad \left. \begin{aligned} r \leq y \leq 1 - e \\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\}$$

(en fait pour $y = r$, la limitation $\theta \geq \pi/4$ n'est plus nécessaire et on est ramené au problème du § précédent: $0 \leq \theta \leq \pi/2$).

L'étude précise de cette minimisation, que nous ne détaillerons pas ici, conduit aux résultats suivants: le minimum absolu de p_3 sur le domaine défini par (5) correspond toujours à $\theta = \theta_0 = \pi/4$, et la valeur de y est $y = y_0$ fonction de e , indépendante de r , si $r \leq y_0$; lorsque $r \geq y_0$, le minimum absolu est atteint pour $y = r$. De plus, à e fixé, le minimum de p_2 (§ 2.3) en θ pour $r = y_0$ est atteint pour $\theta = \pi/4$, ce qui prouve que p_3 fournit un meilleur majorant que p_2 tant que $0 \leq r \leq y_0$ et que la situation est inversée pour $y_0 \leq r \leq 1 - e$.

*) Le raisonnement et la formule obtenue sont également valables si le cercle C_5 coupe le cercle C_4 , B et D restant intérieurs à C_4 .

La valeur du majorant p_3 est représentée à la fig. 6. Pour $e = 0$, $p_3 = p_0 = -2k \log r$; pour $e > 0$, p_3 est toujours meilleur majorant que p_1 . L'intervalle (en e) sur lequel p_3 est meilleur majorant que p_2 a d' autant plus d'étendue relative que r est plus faible (tube plus épais).

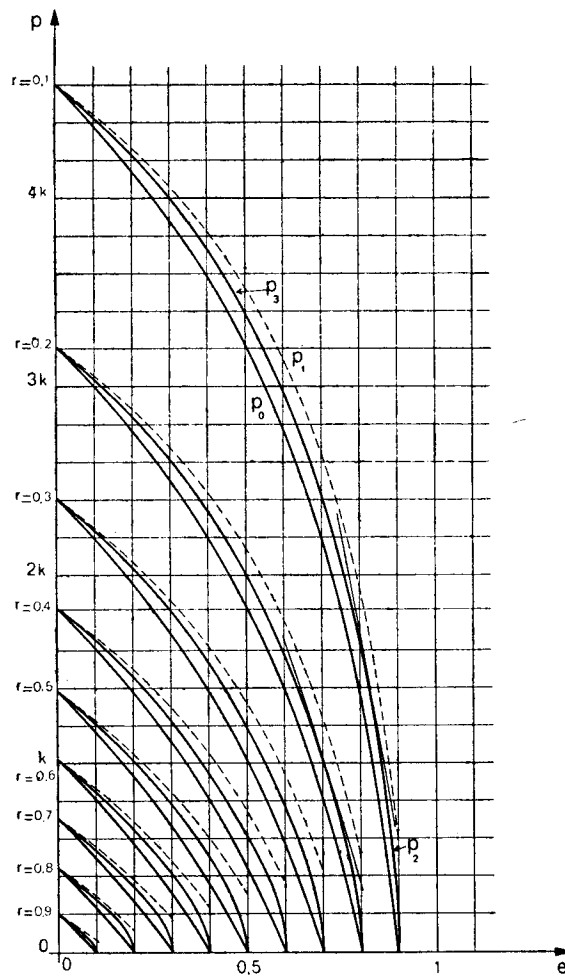


Fig. 6

TABLEAU

$e \backslash r$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	2,302	1,609	1,204	0,916	0,693	0,511	0,357	0,223	0,105	0
0,1	2,220	1,526	1,121	0,833	0,610	0,428	0,274	0,140	0	
	2,197	1,504	1,099	0,811	0,588	0,405	0,251	0,118	0	
0,2	2,120	1,427	1,022	0,734	0,511	0,328	0,174	0		
	2,079	1,386	0,981	0,693	0,470	0,288	0,133	0		

Le tableau ci-dessus donne les bornes de l'encadrement de la pression limite (plus exactement de $p/2k$) pour des excentremets de 0, 0,1 et 0,2.

3. Conclusions

Le meilleur encadrement que nous ayons obtenu pour la pression limite à l'intérieur d'un tube excentré est fourni par p_0 pour la borne inférieure, p_2 ou p_3 pour la borne supérieure suivant les valeurs de e et de r . Cet encadrement est d'autant meilleure que r et e sont plus faibles (tube épais, peu excentré*).

Le mécanisme qui fournit le majorant p_1 , quoique moins bon, vaut d'être noté pour sa commodité d'emploi dans les cas pratiques.

Les résultats obtenus montrent que la pression limite du tube excentré est proche de celle du plus grand tube centré intérieur. Nous ne pensons pas cependant qu'elle lui soit égale. La mise en évidence d'une solution statique meilleure que celle que nous présentons ici lèverait évidemment les doutes sur ce point; peut-être cela serait-il possible en utilisant les méthodes variationnelles.

Du point de vue pratique, nous pensons que la présente étude doit permettre à l'ingénieur appelé à utiliser un tube excentré, de mieux apprécier la marge de l'erreur commise en le traitant, ce qu'exigera en général la sécurité, comme le tube centré intérieur.

Signalons enfin que l'application des mêmes méthodes au cas de la cavité cylindrique sous pression dans un demi-espace est immédiate.

Nous remercions M. Radenkovic avec qui nous avons eu d'utiles conversations concernant cette étude, et M. Passos qui nous a assisté pour les calculs numériques.

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE DES SOLIDES, L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PARIS (FRANCE)

REFERENCES

- [1] J. Mandel, *Mécanique des milieux continus*, vol. II, p. 740, Paris Gauthier—Villars, 1966.
- [2] D. J. F. Ewing, R. Hill, *The plastic constraint of V-notched tension bars*, J. Mech. Phys. Sol., **15** (1967), 118.

Ж. САЛЯНСОН, ПРЕДЕЛЬНОЕ ДАВЛЕНИЕ В ТРУБЕ С ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОМ

Автором изучается предельное давление применимое в цилиндрической трубе с эксцентриситетом. Проблема обсуждается по соображениям теории предельного анализа. Предлагается статически допустимое решение проблемы, а также три решения, допустимые с кинематической точки зрения. Таким образом, получены верхний и нижний пределы давления.

Полученные результаты справедливы для более толстых труб с неособенно выдающимся эксцентриситетом.

*) Pour apprécier correctement la valeur de e il faut la comparer à la valeur maximale possible $(1 - r)$.