CONTRACTION QUASI-STATIQUE D'UNE CAVITÉ A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE OU CYLINDRIQUE

DANS UN MILIEU ÉLASTO-PLASTIQUE

par J. SALENÇON
Ingénieur des Ponts et Chaussées (1)

RÉSUME

On étudie la contraction d'une cavité sphérique ou cylindrique dans un milieu infini. Le matériau constituant le massif est isotrope, homogène, et obéit au critère de plasticité de Coulomb. L'élasticité est linéaire. La loi de comportement plastique adoptée permet une variation de volume permanente en supposant la compressibilité en phase plastique indépendante des déformations. On néglige l'influence des forces de masse.

Les résultats obtenus concernent les variations du rayon de la cavité et du rayon de la frontière de la zone plastifiée en fonction de la pression à l'intérieur de la cavité.

SUMMARY

The quasi-statical contraction of a spherical or cylindrical cavity in an elasto-plastic medium

Considering a spherical or cylindrical cavity in an infinite medium, we study its quasi-statica-contraction as the inside pressure is progressively made to decrease. The material is supposed to be isotropic and homogeneous and to obey Coulomb's yield criterion. We give the elasto-plastic solution of this problem, for a constitutive equation allowing a permanent change in volume, the rate of which is independent of strain.

Formulas are obtained relating the radius of the cavity, the radius of the border between the elastic and plastic zones, and the inside pressure.

1. INTRODUCTION.

Nous étudions ici la contraction quasi-statique d'une cavité à symétrie sphérique ou cylindrique dans un milieu élasto-plastique. Ce problème qui concerne par exemple les stockages souterrains d'hydrocarbures, a été posé au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École polytechnique par Gaz de France et Géostock.

(1) Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École polytechnique.

Nous avons traité, dans une publication antérieure (*), le cas de l'expansion d'une cavité dans des conditions analogues. Nous n'entrerons pas à nouveau dans les détails de théorie ou de calculs largement exposés alors,mais nous indiquerons les modifications apportées dans les résultats par l'inversion du sens de l'écoulement.

2. NOTATION.

Les notations sont identiques à celles utilisées dans (*), que nous rappelons brièvement :

Le matériau obéit au critère de Coulomb et on désigne par C la cohésion et φ l'angle de frottement interne :

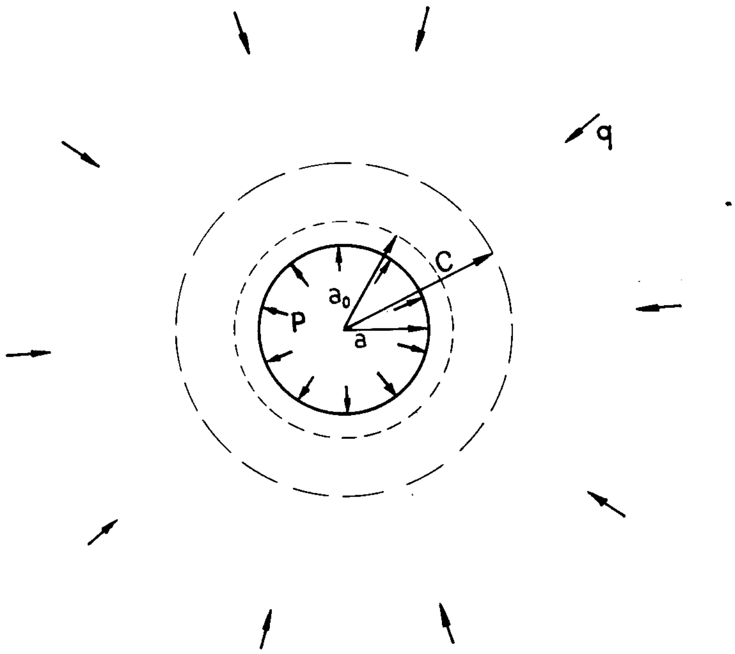
On pose :

$$H = C \operatorname{cotg} \varphi \quad , \quad K_a = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad , \quad K_p = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

a est le rayon actuel de la cavité et a_0 la valeur initiale de ce rayon. c est le rayon de la frontière entre les zones élastique et plastique.

ξ désigne le déplacement radial du point matériel de coordonnées actuelle r, et initiale r_0.

p est la pression à l'intérieur de la cavité et q la pression à l'infini constante. Les contraintes σ_i sont comptées positivement en traction, σ_1, σ_2, σ_3 sont les contraintes principales.



3. CRITÈRE DE PLASTICITÉ ET LOI DE COMPORTEMENT PLASTIQUE.

3.1. Cas où les trois contraintes principales sont distinctes :

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Le critère s'écrit :

$$\begin{cases} (\sigma_1 - H) \leqslant 0 \\ (\sigma_1 - H) = K_a\,(\sigma_3 - H) \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \mathrm{H}) \leqslant 0 \\ (\sigma_3 - \mathrm{H}) = \mathrm{K}_p\,(\sigma_1 - \mathrm{H}) \end{cases}$$

Comme nous l'avons fait dans (*), nous supposons que la vitesse de déformation plastique, dont les directions principales sont les mêmes que celles des contraintes (isotropie), a pour composantes :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1^p = \dot{\lambda} \\ \dot{\varepsilon}_2^p = 0 \\ \dot{\varepsilon}_3^p = -k\dot{\lambda} \end{cases} \qquad \dot{\lambda} > 0 \text{ et } k > 0 \text{ quelconques.}$$

($k = 1$: hypothèse de Mohr; $k = \mathrm{K}a$: hypothèse du potentiel plastique identique au critère de plasticité).

La vitesse de dilatation volumique est : $(1 - k)\,\dot{\lambda}$.

3.2. Cas où deux contraintes principales sont égales :

Si $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$, la vitesse de déformation permanente a pour valeurs principales :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1^p = \dot{\lambda} + \dot{\mu} \\ \dot{\varepsilon}_2^p = -k\dot{\lambda} \\ \dot{\varepsilon}_3^p = -k\dot{\mu} \end{cases} \qquad \dot{\lambda} > 0 \;,\; \dot{\mu} > 0 \;,\; k > 0 \text{ quelconques.}$$

4. CONTRACTION D'UNE CAVITÉ SPHÉRIQUE.

Le problème étudié est celui de la contraction d'une cavité sphérique de rayon initial a_0, lorsque la pression p à l'intérieur de la cavité décroit à partir de la valeur q (on admet même que p puisse devenir négative), la pression à l'infini étant invariable égale à q.

Les contraintes principales sont :

$$\sigma_r = \sigma_1 > \sigma_\theta = \sigma_2 = \sigma_\varphi = \sigma_3.$$

Au début de la baisse de pression, tant que la variation de pression reste suffisamment faible (ce terme sera expliqué par la suite), l'état de contraintes est élastique dans tout le massif; c'est la solution de Lamé. On a :

$$a = a_0\left[1 + (p - q)\,\frac{1+\nu}{2\mathrm{E}}\right]$$

Lorsque la variation de pression devient suffisamment grande, une zone plastique apparaît, entourant la cavité et limitée par une sphère de rayon c.

Dans la zone plastique ($a \leqslant r \leqslant c$), le critère de plasticité est satisfait en tout point et s'écrit : $(\sigma_\theta - \mathrm{H}) = \mathrm{K}_p\,(\sigma_r - \mathrm{H})$. Il y a continuité de σ_r à la traversée de la frontière élastoplastique. D'autre part le critère de plasticité étant satisfait sur cette frontière dans la zone élastique et dans la zone plastique, il y a aussi continuité de $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$. En intégrant alors l'équation d'équilibre on obtient les formules (2′) et (3′) qui remplacent (2) et (3) de (*) :

$$(2') \qquad (\sigma_r - \mathrm{H}) = -(q + \mathrm{H})\,\frac{3}{1 + 2\mathrm{K}_p}\left(\frac{c}{r}\right)^{2(1-\mathrm{K}_p)}$$

$$(3') \qquad p = -\mathrm{H} + (q + \mathrm{H})\,\frac{3}{1 + 2\mathrm{K}_p}\left(\frac{c}{a}\right)^{2(1-\mathrm{K}_p)}$$

(On vérifiera *a posteriori* que $(\sigma_r - \mathrm{H}) \leqslant 0$ dans tout le solide.)

La pression d'apparition de la zone plastique est d'après (2′) :

$$p_0 = -\mathrm{H} + (q+\mathrm{H})\frac{3}{1+2\mathrm{K}_p} \tag{9'}$$

Les déformations n'étant pas supposées infiniment petites, les formules (2′) et (3′) ne sont valables qu'en coordonnées d'Euler et il est nécessaire de déterminer la relation existant entre les valeurs a et c pour étudier la variation de p.

A la différence du cas de l'expansion, il n'est pas édivent *a priori* que c puisse être utilisé comme paramètre cinématique. Nous considérons donc t, paramètre cinématique quelconque, fonction monotone croissante du temps physique, en conservant à v la même signification que dans (*) c'est-à-dire :

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial c}(r_0\ ,\ c).$$

Dans la zone plastique on a alors pour la vitesse de déformation totale, somme de la vitesse de déformation élastique et de la vitesse de déformation plastique :

$$\left\{\begin{aligned}
\dot\varepsilon_r &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{dc}{dt} = \left[\frac{1}{\mathrm{E}}\frac{d}{dc}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta - \nu\sigma_\varphi) - k\frac{d\lambda + d\mu}{dc}\right]\frac{dc}{dt}\\
\dot\varepsilon_\theta &= \frac{v}{r}\frac{dc}{dt} = \left[\frac{1}{\mathrm{E}}\frac{d}{dc}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r - \nu\sigma_\varphi) + \frac{d\lambda}{dc}\right]\frac{dc}{dt}\\
\dot\varepsilon_\varphi &= \frac{v}{r}\frac{dc}{dt} = \left[\frac{1}{\mathrm{E}}\frac{d}{dc}(\sigma_\varphi - \nu\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \frac{d\mu}{dc}\right]\frac{dc}{dt}
\end{aligned}\right. \tag{4'}$$

avec $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ et $d\lambda = d\mu$ par raison de symétrie; d'où après élimination de $\frac{d\lambda}{dc}$ et simplification par $\frac{dc}{dt}$ (qui n'est impossible que si $v \longrightarrow \infty$, ce qui ne se produit pas comme on le vérifiera *a posteriori*) :

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{k}\frac{v}{r} = \frac{1}{\mathrm{E}}\left(1 - \frac{2}{k}\nu\right)\frac{d\sigma_r}{dc} - \frac{1}{\mathrm{E}}\left[\frac{2}{k}(1-\nu) - 2\nu\right]\frac{d\sigma_\theta}{dc} \tag{6'}$$

A partir de (2′), (6′) et du critère de plasticité, il est possible d'intégrer, comme nous l'avons fait dans (*), et d'obtenir la fonction $r\,(r_0,\,c)$, donnant la coordonnée actuelle r d'un point de coordonnée initiale r_0 en fonction de la valeur actuelle du rayon de la frontière élasto-plastique.

Il importe de remarquer que les formules de base pour cette intégration se déduisent des formules correspondantes de (*) *en remplaçant* K_a *par* K_p *et* k *par* $1/k$. Il en est donc de même dans les formules finales qui s'obtiennent ainsi immédiatement. En particulier dans le cas où $k = 1$ (pas de variation de volume permanente) on obtient :

avec le critère de Coulomb :

$$\left\{\begin{aligned}
r^3 &= r_0^3 + \frac{3\,(q+\mathrm{H})}{\mathrm{E}}(1-2\nu)\,r_0^3 - \frac{9\,(q+\mathrm{H})}{\mathrm{E}}\times\frac{1}{1+2\mathrm{K}_p}(1-2\nu)\,r_0^{1+2\mathrm{K}_p}c^{2\,(1-\mathrm{K}_p)} + \frac{9\,(q+\mathrm{H})}{\mathrm{E}}\times\frac{1-\mathrm{K}_p}{1+2\mathrm{K}_p}(1-\nu)\,c^3\\
p &= -\mathrm{H} + (q+\mathrm{H})\frac{3}{1+2\mathrm{K}_p}\left(\frac{c}{a}\right)^{2\,(1-\mathrm{K}_p)}
\end{aligned}\right.$$

Avec le critère de Tresca : (il faut remplacer C par — C dans les formules correspondantes de (*)).

$$\left\{\begin{aligned}
r^3 &= r_0^3 + \frac{4\mathrm{C}}{\mathrm{E}}(1-2\nu)\,r_0^3 + \frac{12\mathrm{C}}{\mathrm{E}}(1-2\nu)\,r_0^3\,\mathrm{Log}\frac{c}{r_0} - \frac{6\mathrm{C}}{\mathrm{E}}(1-\nu)\,c^3\\
p &= q - 4\mathrm{C}\left(\mathrm{Log}\frac{c}{a} + \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}\right.$$

Dans (*), pour le problème de l'expansion, nous avons mis en évidence l'existence d'une pression limite, finie, correspondant à l'expansion infinie de la cavité ($a \longrightarrow \infty$ et $c \longrightarrow \infty$). Ici, la pression limite à envisager est celle pour laquelle la cavité se trouve complètement écrasée, $a = 0$:

$p_{\lim} = -$ H dans le cas du critère de Coulomb;
$p_{\lim} = -\infty$ dans le cas du critère de Tresca.

Par une étude précise des formules données ci-dessus on voit que c est une fonction monotone croissante du temps (1) (da et dc sont toujours de signes contraires), et que $c_{\lim}$ est finie.

5. CONTRACTION D'UNE CAVITÉ CYLINDRIQUE.

Le problème étudié est l'homologue de celui du § 4 pour une cavité cylindrique circulaire infiniment longue. $0z$ étant dirigé suivant l'axe de la cavité, on fait l'hypothèse que σ_z, uniforme, est contrainte principale intermédiaire. Les contraintes principales sont ainsi :

$$\sigma_r = \sigma_1 , \quad \sigma_z = \sigma_2 , \quad \sigma_\theta = \sigma_3.$$

Au début de la baisse de pression, tant que la variation de la pression à l'intérieur de la cavité reste suffisamment petite, l'état de contraintes est élastique dans tout le massif (solution de Lamé) et on a :

$$a = a_0 \left[1 + (p - q) \frac{1+\nu}{\mathrm{E}} \right]$$

Une zone plastique apparaît ensuite lorsque la variation de pression devient suffisamment grande : c'est un anneau entourant la cavité limité par un cylindre concentrique de rayon c. Dans cette zone le critère de plascitité vérifié en tout point est : $(\sigma_\theta = \mathrm{H}) = \mathrm{K}_p (\sigma_r - \mathrm{H})$. Il y a continuité de σ_r et σ_θ (et évidemment de σ_z uniforme) à la traversée de la frontière élastoplastique, et, par intégration de l'équation d'équilibre on obtient les formules homologues de (2′) et (3′) :

(2″) $$(\sigma_r - \mathrm{H}) = -(q + \mathrm{H}) \frac{2}{1+\mathrm{K}_p} \left(\frac{c}{r}\right)^{1-\mathrm{K}_p}$$

(3″) $$p = +(q + \mathrm{H}) \frac{2}{1+\mathrm{K}_p} \left(\frac{c}{a}\right)^{1-\mathrm{K}_p} - \mathrm{H}$$

(on vérifiera *a posteriori* que $(\sigma_r - \mathrm{H}) \leqslant 0$ dans tout le solide).

La pression d'apparition de la zone plastique est :

(9″) $$p_0 = -\mathrm{H} + (q + \mathrm{H}) \frac{2}{1+\mathrm{K}_p} \cdot$$

En procédant comme au § 4 (introduction de t, paramètre cinématique, en conservant à v le sens de dérivée par rapport à c on obtient pour la vitesse de déformation totale :

(4″) $$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = \dfrac{\partial v}{\partial r} \times \dfrac{dc}{dt} = \left[\dfrac{1}{\mathrm{E}} \times \dfrac{d}{dc} (\sigma_r - \nu\sigma_\theta - \nu\sigma_z) + \dfrac{d\lambda}{dc} \right] \dfrac{dc}{dt} \\ \dot{\varepsilon}_\theta = \dfrac{v}{r} \times \dfrac{dc}{dt} = \left[\dfrac{1}{\mathrm{E}} \times \dfrac{d}{dc} (\sigma_\theta - \nu\sigma_r - \nu\sigma_z) - k \dfrac{d\lambda}{dc} \right] \dfrac{dc}{dt} \\ \dot{\varepsilon}_z = 0 = \left[\dfrac{1}{\mathrm{E}} \times \dfrac{d}{dc} (\sigma_z - \nu\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \right] \dfrac{dc}{dt} \end{cases}$$

d'où :

(6″) $$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{k} \frac{v}{r} = \frac{1+\nu}{\mathrm{E}} \frac{d}{dc} \sigma_r \left(1 - \nu - \frac{1}{k}\nu\right) + \frac{1+\nu}{\mathrm{E}} \frac{d}{dc} \sigma_\theta \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\nu - \nu\right)$$

---

(1) c pourrait être pris comme paramètre cinématique.

Comme au § 4, les formules de base [(2''), (6'') et critère de plasticité] pour le calcul de $r(r_0, c)$, s'obtiennent à partir des formules correspondantes de (*) en changeant K_a en K_p et k en $1/k$. On a donc immédiatement les formules finales. Pour $k = 1$:

Avec le critère de Coulomb :

$$\begin{cases} r^2 = r_0^2 + \dfrac{2(q+H)}{E}(1-2\nu)(1+\nu)r_0^2 - \dfrac{4(q+H)}{E} \times \dfrac{1}{1+K_p}(1-2\nu)(1+\nu)r_0^{1+K_p}c^{1-K_p} + \dfrac{4(q+H)}{E} \times \dfrac{1-K_p}{1+K_p}(1-\nu^2)c^2 \\ p = -H + (q+H)\dfrac{2}{1+K_p}\left(\dfrac{c}{a}\right)^{1-K_p} \end{cases}$$

Avec le critère de Tresca :

$$\begin{cases} r^2 = r_0^2 + \dfrac{2C}{E}(1+\nu)(1-2\nu)r_0^2 + \dfrac{4C}{E}(1-2\nu)(1+\nu)r_0^2 \operatorname{Log}\dfrac{c}{r_0} - \dfrac{4C}{E}(1-\nu^2)c^2 \\ p = q - C\left(1 + 2\operatorname{Log}\dfrac{c}{a}\right) \end{cases}$$

Les mêmes remarques que dans le cas de la cavité sphérique sont valables. La pression limite correspondant à l'écrasement complet de la cavité est :

$p_{\lim} = -H$ dans le cas du critère de Coulomb, $p_{\lim} = -\infty$ dans le cas de celui de Tresca.

c est une fonction monotone croissante jusqu'à $c_{\lim}$ fini.

RÉFÉRENCES

[*] J. SALENÇON : Expansion quasi-statique d'une cavité à symétrie sphérique ou cylindrique dans un milieu élasto-plastique, *Annales des Ponts et Chaussées,* 1966, III.