

SEMINAIRES DE MECANQUES DES SOLIDES ET DES STRUCTURES

FACULTE POLYTECHNIQUE DE MONS

SOLUTIONS COMPLETES EN PLASTICITE

J. SALENCON

(Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique)
Paris

1. INTRODUCTION.

Les problèmes de déformation plane pour le matériau rigide parfaitement plastique sont parmi ceux que l'on sait le mieux résoudre. De nombreux travaux leur ont été consacrés (PRANDTL, HENCKY, MANDEL, Mme GEIRINGER, HILL, SOKOLOVSKI et bien d'autres). Rappelons que dans les zones plastifiées le problème est hyperbolique, caractère qui a l'avantage de faciliter la construction de "solutions" une fois que l'on fait des hypothèses a priori sur la localisation des zones plastifiées. La résolution peut alors donner lieu à des études mathématiques plus ou moins compliquées, mais on n'échappe jamais à la question finale qui est celle de l'interprétation de la solution obtenue.

L'intervention de la théorie des charges limites est alors inévitable. En effet, ce n'est qu'au moyen de la théorie des charges limites que l'on peut définir précisément le problème étudié - le problème de l'équilibre limite - et interpréter convenablement les solutions obtenues, ce qui permet de choisir entre elles. Il convient d'insister sur ce point qui n'est pas toujours suffisamment mis en évidence.

2. LES DIFFERENTS TYPES DE SOLUTIONS.

Afin de préciser la terminologie employée, nous faisons un rappel sommaire de la théorie des charges limites.

La structure étudiée est constituée d'un matériau rigide parfaitement plastique obéissant au principe du travail maximal de HILL (*).

On désigne par $f(\sigma_{ij})$ le critère de plasticité.

La loi de comportement est alors:

$$v_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \dot{\lambda} \geq 0$$

Les trois notions fondamentales (MANDEL, 1966) intervenant dans la théorie des charges limites sont celles de:

- champ de contraintes licite (ou Statiquement et Plastiquement Admissible):

champ de contraintes σ_{ij} satisfaisant les équations d'équilibre, les conditions aux limites sur les contraintes, et tel qu'en tout point $f(\sigma_{ij}) \leq 0$.

- champ de vitesses de déformation licite (ou Cinématiquement et Plastiquement Admissible):

champ de vitesses de déformation v_{ij} dérivant d'un champ de vitesses qui satisfait les conditions aux limites sur les vitesses, et tel qu'en tout point il existe σ_{ij}^* tel que $f(\sigma_{ij}^*) = 0$ et $v_{ij} = \dot{\lambda} (\partial f / \partial \sigma_{ij}^*)$, $\dot{\lambda} \geq 0$ le champ σ_{ij}^* n'étant pas nécessairement S.A.

- (*) Le principe doit aussi être vérifié aux interfaces entre les solides constituant la structure.

- puissance dissipée associée à un champ de vitesses de déformation licite v_{ij} .

En un point M, soit σ_{ij}^* un tenseur de contraintes vérifiant les propriétés ci-dessus. On démontre que l'expression $v_{ij} \sigma_{ij}^*$ est indépendante du tenseur σ_{ij}^* pourvu qu'il vérifie les propriétés indiquées, et ne dépend que de v_{ij} : $\sigma_{ij}^* v_{ij} = \pi(v_{ij})$

La puissance dissipée dans la structure, correspondant au champ licite v_{ij} est $\int_V \pi(v_{ij}) d\tau$.

On suppose pour simplifier les énoncés que nous allons rappeler, qu'il n'y a pas de force de masse, et qu'il n'y a qu'un seul paramètre de chargement.

Pour la détermination de la charge limite on utilise

- la méthode statique: si on met en évidence un champ de contraintes licite, la charge qui lui correspond est inférieure ou égale à la charge limite.
Nous parlerons alors de solutions statiques.
- la méthode cinématique: si on connaît un champ de vitesses licite, la charge obtenue en y égalant la puissance des forces extérieures à la puissance dissipée est supérieure ou égale à la charge limite.

Nous parlerons alors de solutions cinématiques.

Il convient de définir maintenant les solutions dont l'étude constitue le sujet même de ce travail:

On appellera solution complète la mise en évidence d'un champ de vitesse licite et d'un champ de contraintes licite, ces deux champs étant associés par la loi de comportement. Une telle solution donne la valeur exacte de la charge limite.

Enfin on dira que l'on a une solution incomplète (au sens de Bishop) si on connaît un mode de déformation licite et un champ de contraintes licite associés, ce dernier étant connu uniquement dans les zones déformées ($v_{ij} \neq 0$) et étant tel que l'équilibre des forces au contour des zones rigides ($v_{ij} = 0$) soit assuré. Une telle solution correspond à l'application de la méthode cinématique; le majorant de la charge limite est la charge en équilibre avec le champ de contraintes licite connu dans la zone déformée, il n'y a pas besoin de calculer la puissance dissipée (théorème des travaux virtuels).

Si l'on peut prolonger le champ de contraintes dans les zones non déformées, de façon licite, la solution incomplète est alors complétée et la charge correspondante est la charge limite.

Seuls les résultats donnés par des solutions qui rentrent dans l'une des catégories précédentes peuvent être interprétés; on doit pouvoir appliquer l'une des deux méthodes, statique ou cinématique, c'est-à-dire connaître soit un champ de contraintes licite dans toute la structure soit un mode de déformation licite.

Les solutions incomplètes constituent en fait la grande majorité des solutions connues, en particulier pour les problèmes de déformation plane. Lorsqu'on les utilise, on voit en général plus loin que la simple application de la méthode cinématique de façon commode, persuadé que le prolongement licite des contraintes dans les zones rigides est possible même si l'on n'est pas capable de le prouver, et que la solution fournit la valeur exacte de la charge limite.

Elles apparaissent comme l'ultime étape que l'on souhaite aussi proche du but que possible, avant la construction d'une solution complète. C'est cette idée qui constitue sans doute leur meilleure définition et aide à résoudre les problèmes posés par les solutions incomplètes où interviennent des lignes de glissement isolées par exemple.

C'est précisément l'étude du prolongement licite des contraintes dans les zones rigides des solutions incomplètes pour les compléter que nous avons entreprise sur divers problèmes de déformation plane.

3. ETUDE PLUS PARTICULIERE DES PROBLEMES DE DEFORMATION PLANE.

(Matériau de Tresca homogène).

3.1. Coin infini chargé sur une de ses faces.

Nous allons d'abord traiter du problème du coin infini chargé sur une de ses faces, qui constitue un exemple mettant clairement en évidence l'évolution des idées sur la question du choix entre les "solutions". Nous le posons de la façon suivante: une plaque indéformable lisse A'A (de largeur $2a$) agit sur une face d'un coin infini et l'on étudie les chargements limites de cet ensemble.

Considérons d'abord le cas du coin obtus ($2\beta \geq \pi/2$): la figure 1 représente deux "solutions" possibles:

- la solution continue avec éventail de PRANDTL qui correspond à la pression uniforme sur A'A:

$$\bar{\omega} = 2k(1 + 2\beta - \pi/2)$$

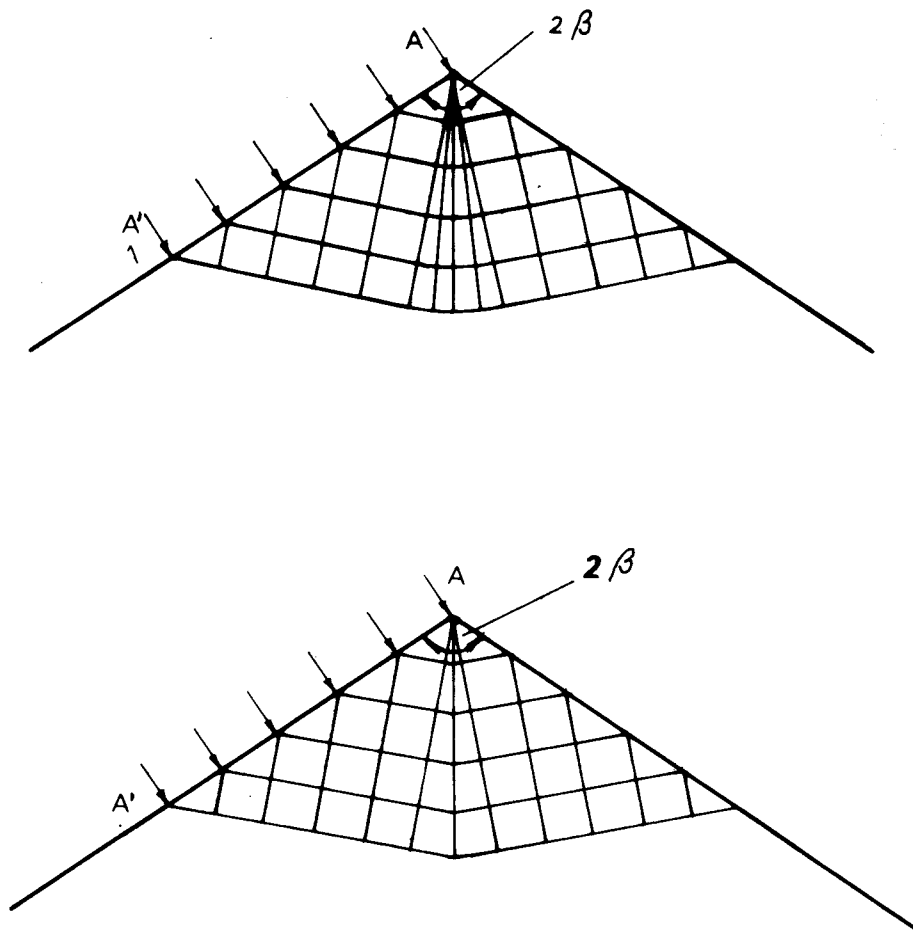


Figure 1

- la solution avec une ligne de discontinuité du champ de contraintes qui correspond à:

$$\bar{\omega} = 2k(1 - \cos 2\beta)$$

Initialement, on ne s'intéressait dans ces deux solutions qu'au champ de contraintes dans les zones supposées plastifiées. On disposait donc de deux "solutions" donnant des résultats différents pour un même problème entre lesquelles il fallait choisir.

HENCKY (1923) et PRANDTL (1923) avaient avancé que dans le cas où plusieurs solutions étaient possibles on devait considérer celle nécessitant la force la plus faible (cité par GEIRINGER, 1953), puisqu'elle suffisait à produire la plastification: ici la solution discontinue (cette idée intuitive confuse et qui ici conduirait à une erreur, apparaît de façon exacte dans la méthode cinématique de détermination des charges limites).

HILL, HODGE, GEIRINGER ont ensuite insisté sur le fait que l'on devait aussi porter son attention sur les vitesses (mais contrairement à l'expression de GEIRINGER, 1953, p.280, il ne s'agit pas encore de solutions complètes).

Dans le cas présent, il n'est pas possible d'associer un champ de vitesses licite au champ de contraintes discontinu - la condition d'inextensibilité de la ligne de discontinuité s'y oppose - par contre on peut associer à la solution continue une infinité de modes de déformation licites, correspondant à des mouvements de la plaque autour de centres instantanés de rotation situés au-dessous de la normale à A'A en A'. D'après ce que nous avons dit, cela n'est pas suffisant pour que l'on puisse affirmer que le chargement correspondant est un chargement limite. On possède, si l'on considère un quelconque des modes de déformation associés, une solution incomplète: le chargement

$$F, \text{ axiale, } = 2a \times 2k (1 + 2 \beta - \pi/2) \quad (1)$$

n'est qu'un majorant (*) des chargements limites.

On ne peut rien dire concernant le chargement correspondant à la "solution" discontinue, puisque celle-ci ne rentre jusqu'à présent dans aucun des types interprétables.

Pour le cas du coin aigu ($2\beta < \pi/2$):
LEE (1950) a montré que l'on peut associer à la solution avec une ligne de discontinuité représentée à la figure 2 les modes de déformation licites correspondant à des mouvements de la plaque autour de centres instantanés de rotation situés uniquement sur la normale en A' à A'A. On dispose donc là encore d'une solution incomplète et le chargement

$$F, \text{ axiale, } = 2a \times 2k (1 - \cos 2\beta) \quad (2)$$

est un majorant des chargements limites dans le cas du coin aigu.

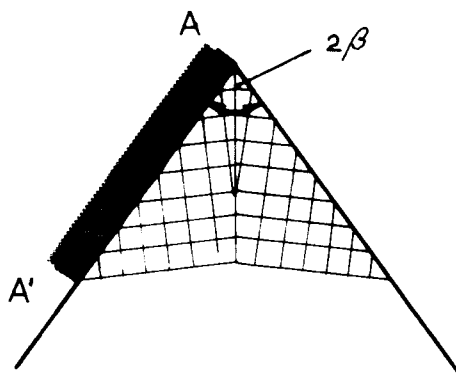


Figure 2

-
- (*) Dans ce problème il y a deux paramètres de chargement: résultante, normale à A'A, des contraintes sur A'A, et moment de ces contraintes par rapport à un point fixe. Nous désignerons par majorants les chargements situés à l'extérieur de ou sur la frontière d'écoulement de la structure, par minorants les chargements situés à l'intérieur de ou sur cette surface.

Ce sont là les seules conclusions précises que l'on peut tirer des résultats connus. On peut en fait en dire plus et dans les deux cas, par la construction de solutions complètes.

Nous présentons à la figure 3 un prolongement licite du champ discontinu valable quel que soit l'angle du coin ($0 \leq 2\beta \leq \pi$).

Ainsi, pour $0 \leq 2\beta < \pi/2$, cas du coin aigu, nous disposons d'une solution complète et le chargement (2) est un chargement limite.

Pour $\pi/2 \leq 2\beta \leq \pi$, le champ discontinu ainsi prolongé fournit une solution statique et l'on peut maintenant interpréter le chargement (2) dans le cas du coin obtus: c'est un minorant des chargements limites.

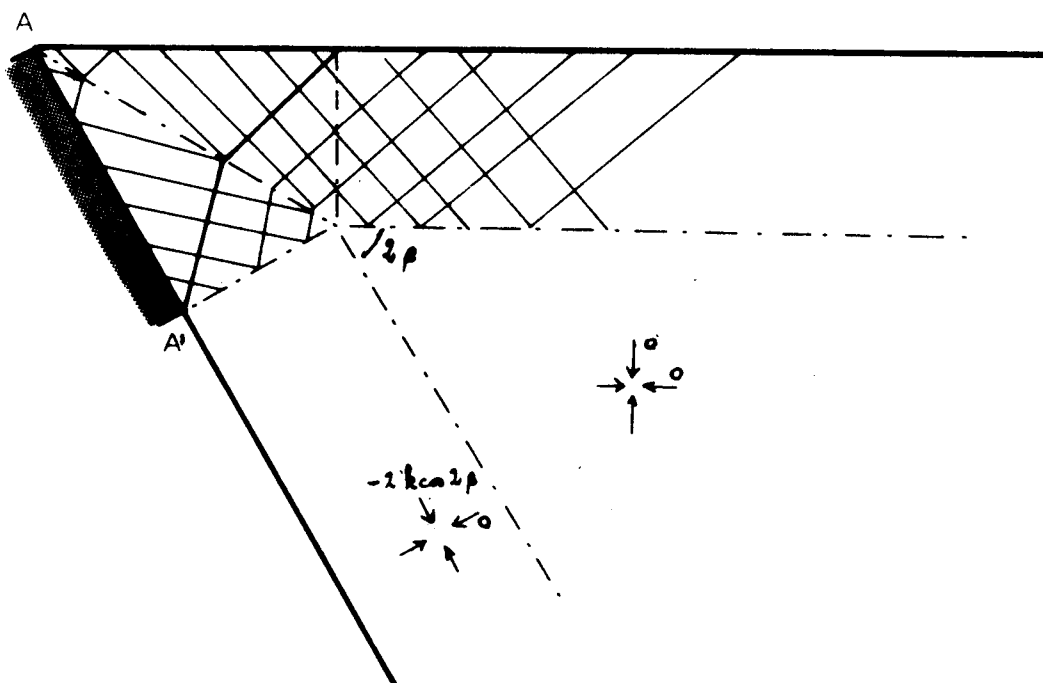


Figure 3

D'autre part, à propos du problème que nous exposons au § suivant, nous avons démontré la possibilité de prolonger tous les schémas de PRANDTL par une méthode analogue à celle de BISHOP.

Cela est applicable ici (fig.4) et pour le coin d'angle obtus nous disposons ainsi de solutions complètes montrant que le chargement (1) est un chargement limite; les mécanismes de déformation qui lui correspondent étant tous ceux pour lesquels la plaque a son centre instantané de rotation situé au-dessous de la normale en A' à AA'.

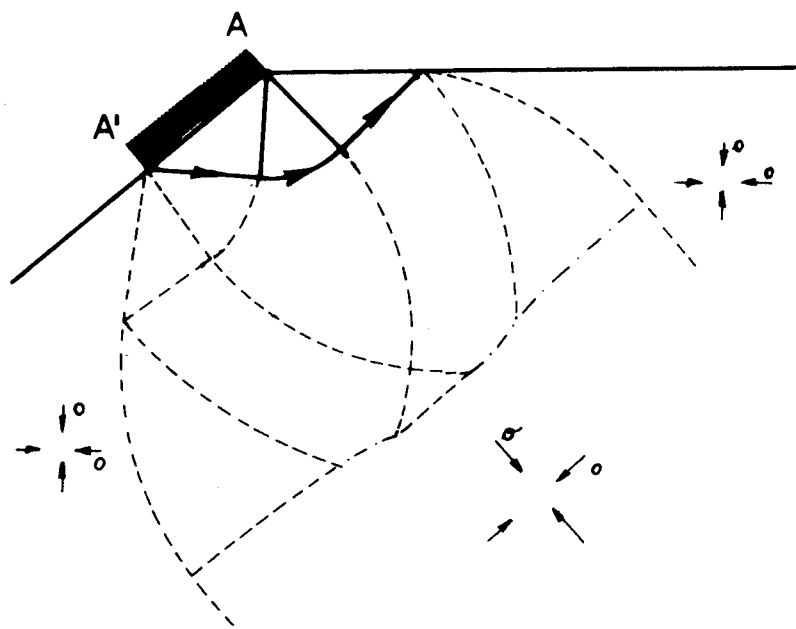


Figure 4

On peut noter que la méthode de SHIELD (1954) peut aussi être utilisée pour effectuer le prolongement (fig. 5).

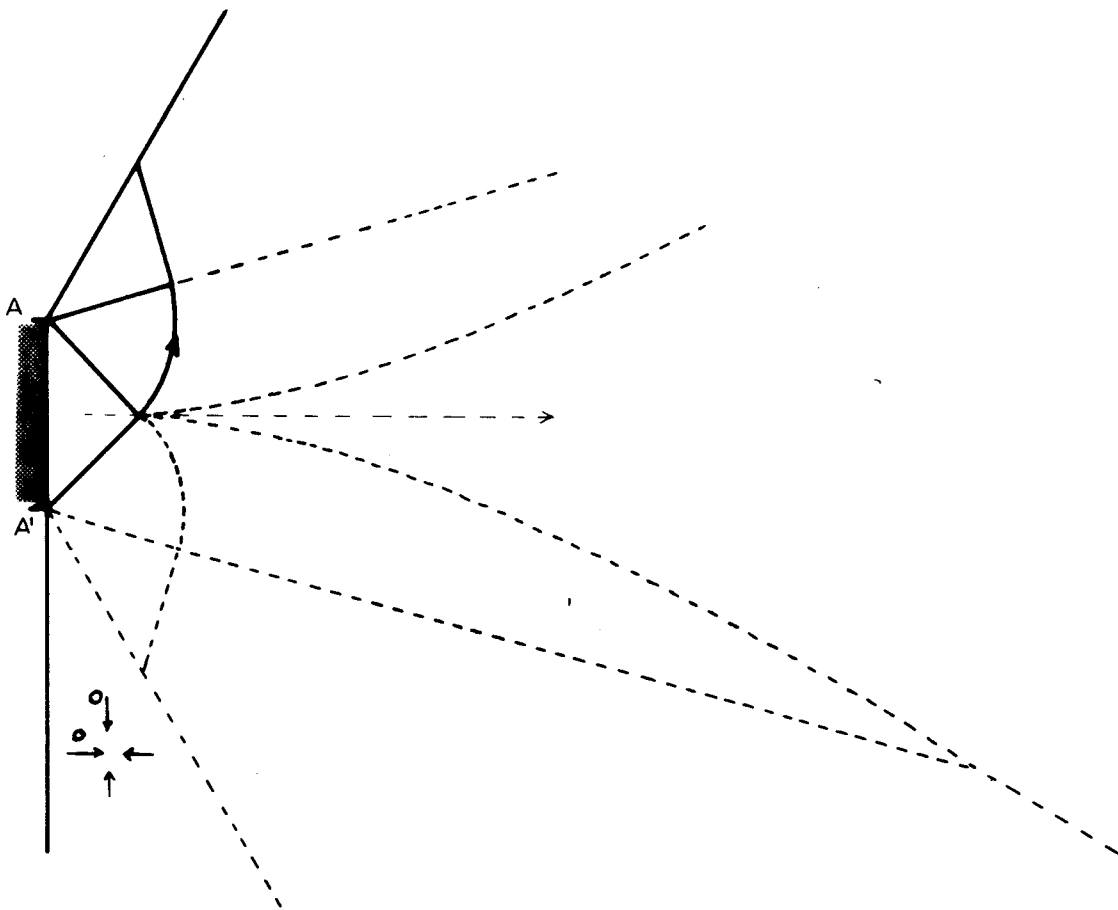


Figure 5

Nous pouvons à l'occasion de ce problème faire plusieurs remarques:

- dans les prolongements statiques que nous avons présentés, les contraintes à l'infini ne sont pas nulles. En effet la condition à l'infini est, soit une condition sur les contraintes, soit une condition sur les vitesses mais pas les deux à la fois. Ici la condition est vitesses nulles à l'infini.
- pour compléter une même solution incomplète, il n'y a pas, en général, unicité du prolongement statique.
- la construction du prolongement licite du champ de contraintes ne nous intéresse pas par elle-même. Ce qui nous intéresse c'est de savoir que ce prolongement est possible. Autrement il nous suffirait de disposer d'un critère permettant d'affirmer sur simple étude des conditions au contour de chaque zone rigide (et de la forme de ce contour) que la "vérification" des contraintes dans les zones rigides est possible ou ne l'est pas.

A priori, cela devrait être aisé puisque l'on dispose d'une grande liberté pour les champs de contraintes du prolongement qui ne sont astreints qu'à vérifier les équations d'équilibre et les conditions aux limites, et à ne pas violer le critère de plasticité. En fait si l'on se donne la peine de construire les prolongements licites, c'est bien parce que l'on ne dispose pas du théorème général en question; la principale difficulté réside dans le fait que la limite entre zones déformées et non déformées est composée d'arcs de caractéristiques

et qu'ainsi, les champs de contraintes des prolongements vérifient nécessairement $f = 0$ sur une partie du contour des zones rigides, ce qui empêche d'établir pour eux des majorations générales intéressantes à l'intérieur de ces zones rigides, dans le cas du matériau homogène.

3.2. Poinçonnement symétrique d'un bloc rectangulaire.

Nous allons maintenant aborder le problème du poinçonnement symétrique d'un bloc que nous avons étudié avec beaucoup de soin. Nous avons essayé, dans la mesure du possible, d'en faire un exemple de problème traité en profondeur, et en particulier nous avons examiné dans tous leurs détails les questions posées par la vérification des zones rigides. C'est à leur évocation que nous nous attacherons ici sans entrer dans les précisions de démonstrations souvent longues.

Les solutions incomplètes données par HILL pour ce problème sont: pour le bloc épais ($h/a \geq 8$, 713) la solution de PRANDTL correspondant au refoulement du matériau vers la surface; pour le bloc moins épais ($1 \leq h/a \leq 8$, 713) la solution avec pour zone déformée un "bulbe" plastique et écartement latéral symétrique de deux blocs rigides B et B' (fig. 6).

Nous nous sommes d'abord attachés à compléter cette solution.

Il s'agit de mettre en évidence un prolongement licite dans le bloc B. Pour cela, nous nous inspirons de la méthode employée par BISHOP pour compléter la solution de PRANDTL.

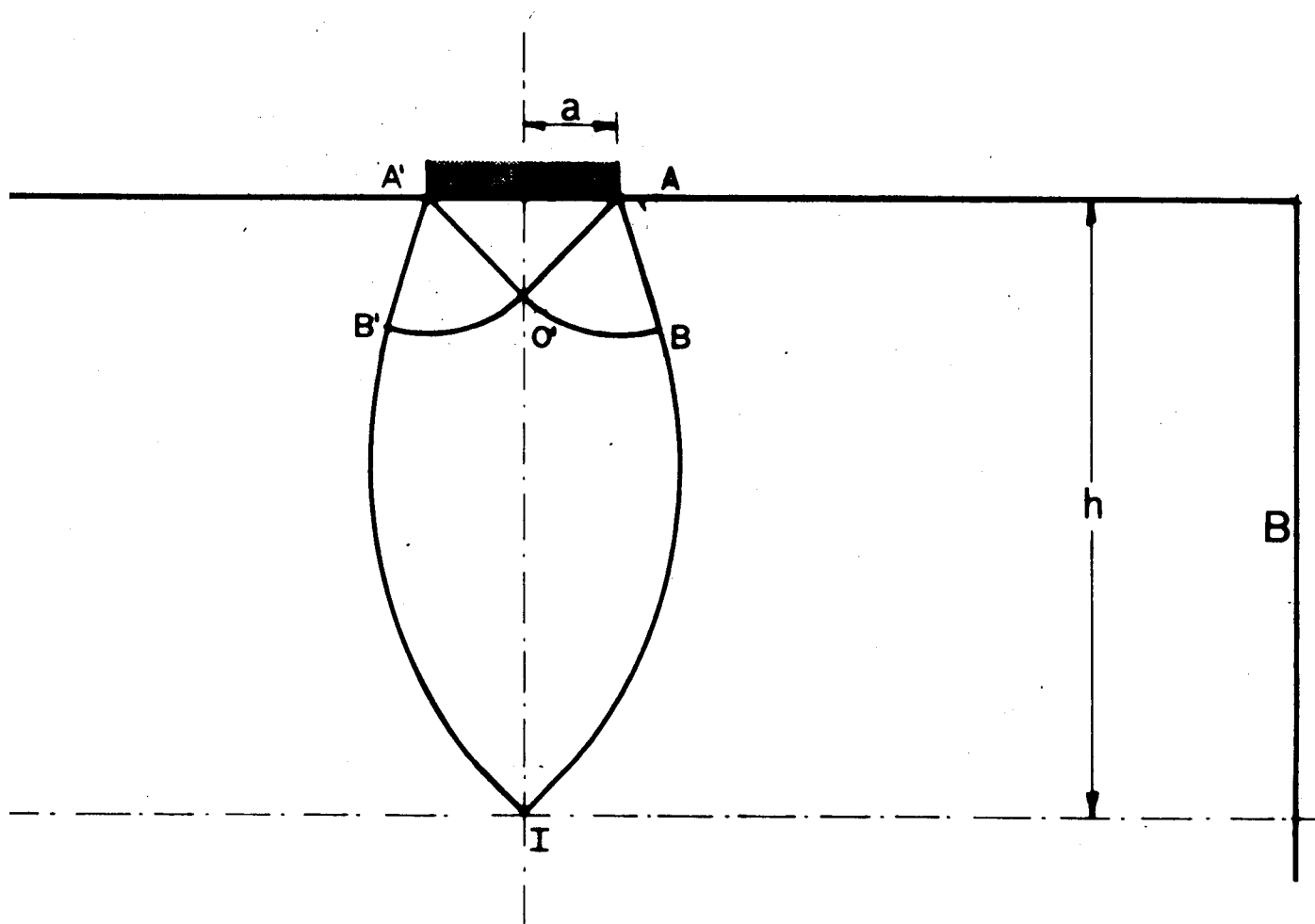
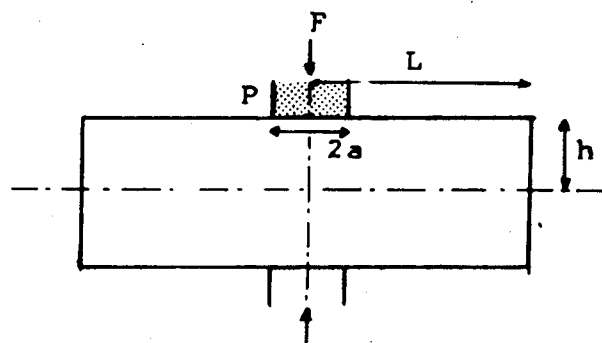


Figure 6

Les contraintes sur ABI sont connues (de résultante verticale), elles sont nulles sur les surfaces libres et verticales sur l'axe de symétrie horizontal.

Nous prolongeons le champ de contraintes en dehors de la zone déformée par un champ à la limite d'écoulement continu dans le plus grand voisinage de A, jusqu'à une surface libre de contraintes intérieure à B, au-delà de laquelle le champ de contraintes est pris nul jusqu'aux surfaces libres réelles du solide, et nous tronçons le champ de contraintes obtenu jusqu'à la surface libre ACP par une courbe (L) au-dessous de laquelle on utilise un champ de contraintes uniaxial vertical (fig. 7).

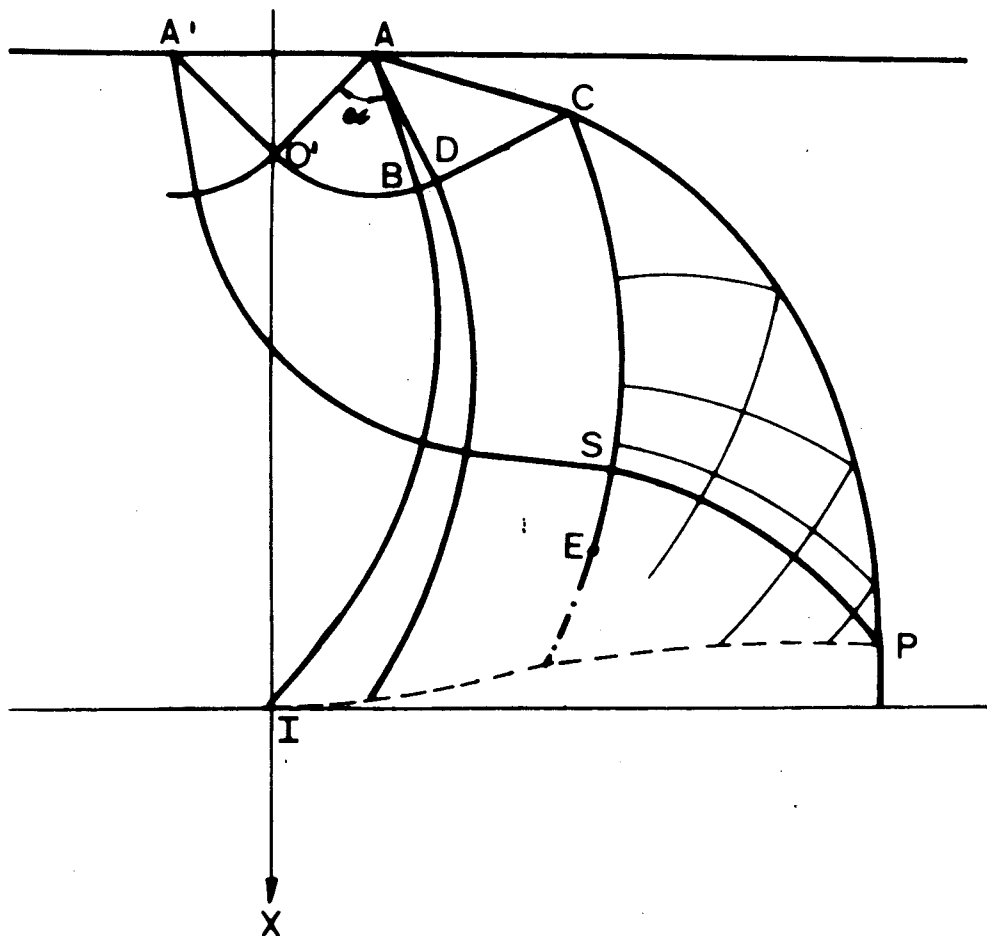


Figure 7

Ainsi posé le prolongement est bien défini. On doit vérifier que sa construction est possible en particulier au voisinage du point A; que la ligne de discontinuité (L) sur laquelle la contrainte est verticale, existe et passe par le point I; et que, enfin, le champ de contraintes uniaxial au-dessous de (L) qui est entièrement défini, est bien licite. Dans le cas de BISHOP certains de ces problèmes ne se posaient pas, et pour d'autres on pouvait se contenter de vérifications numériques.

Nous avons démontré (1967) que ce prolongement n'est possible que pour $h/a \geq 5,298$, que (L) existe et passe par I, et nous avons donné des théorèmes permettant de vérifier algébriquement que le critère n'est pas violé au-dessous de (L).

Ainsi pour $h/a \geq 5,298$ la solution est complétée.

Par contre, pour $h/a < 5,298$ cette méthode ne permet pas de compléter la solution de Hill mais on peut en l'utilisant construire une solution statique (fig.8) à laquelle il n'y a pas de mécanisme cinématique licite associé. On encadre la charge limite entre le minorant ainsi obtenu et le majorant que donne la solution incomplète de HILL (fig.9).

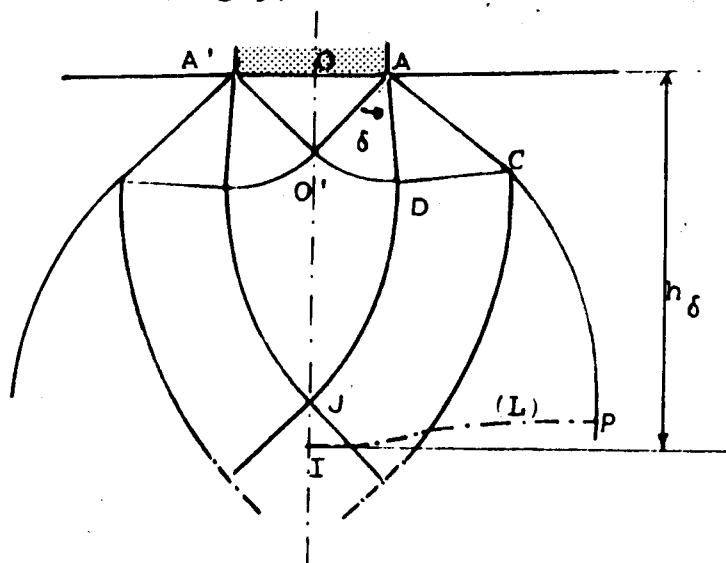


Figure 8

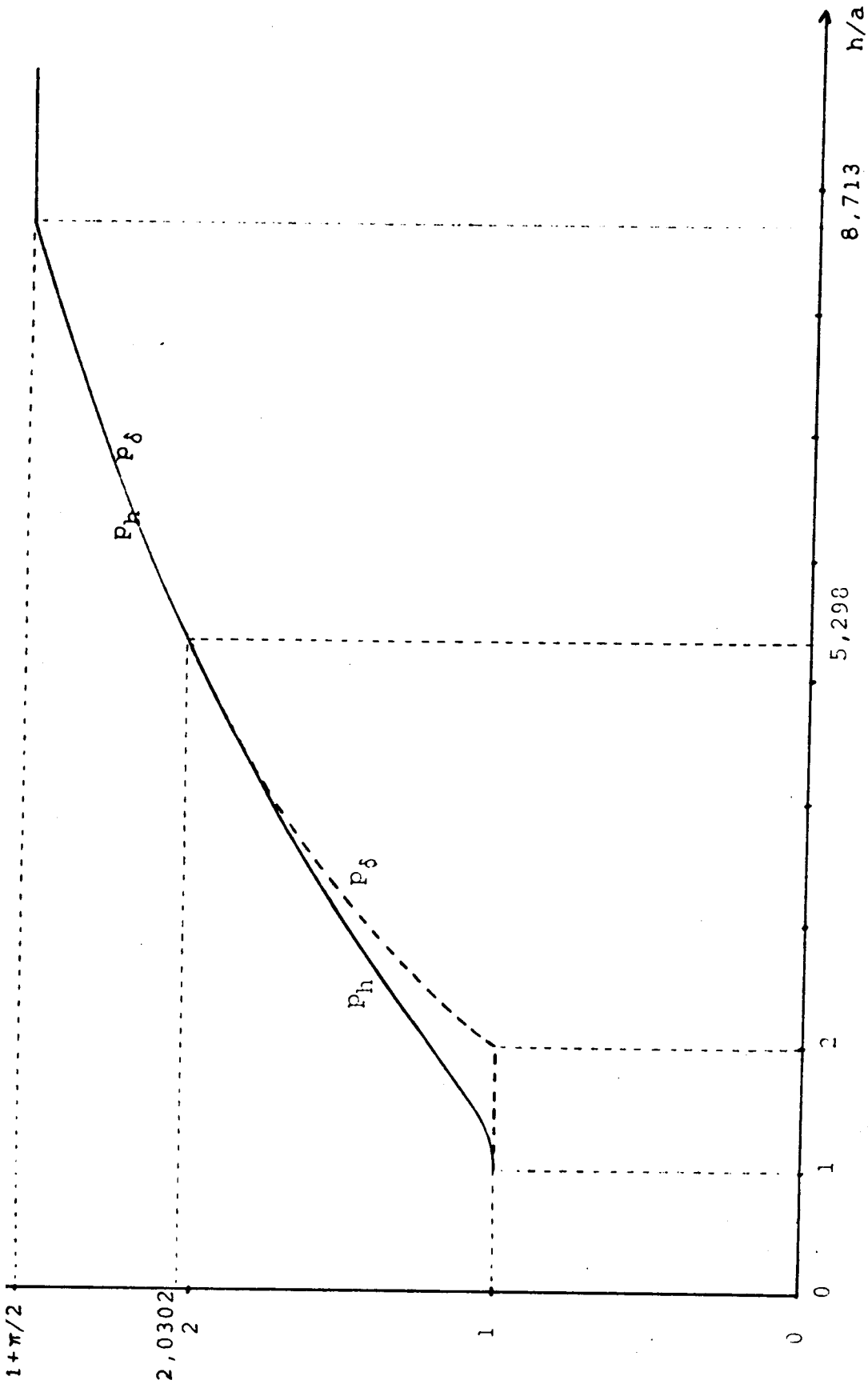


Figure 9

Notons au passage que ces résultats contiennent le prolongement licite de tous les champs de PRANDTL d'ouverture comprise entre 0 et $\pi/2$.

La question qui se pose alors tout naturellement est la suivante: en quoi les résultats obtenus sont-ils liés à la méthode de prolongement choisie ?

Il est évident d'ailleurs que cette question ne se pose que lorsque les résultats sont négatifs, c'est-à-dire du type: impossibilité de prolonger la solution si certaines conditions ne sont pas remplies.

C'est ainsi par exemple que ce prolongement, pour $h/a \geq 5,298$, nécessite pour le bloc une largeur minimale. Nous avons pu montrer par des encadrements au moyen des théorèmes limites, que cette valeur était extrêmement voisine (à 0,3% près) de la largeur au-dessous de laquelle la solution ne pouvait certainement pas être complétée. Cela justifie a posteriori les choix que nous avons faits lors de la construction.

De même une étude précise de la signification de la borne $h/a = 5,298$ nous a fourni des raisons de penser qu'il était très plausible qu'au-dessous de $h/a = 5,298$ la solution incomplète de HILL ne puisse d'aucune façon être prolongée.

3.3. Remarques sur les méthodes de prolongement que nous avons présentées ici.

Il n'est pas possible de donner de méthode générale de prolongement des solutions incomplètes. On se trouve à chaque fois en présence de cas d'espèces.

On peut toutefois dégager certains traits communs dans les exemples que nous avons donnés, relatifs au cas du matériau homogène.

Ainsi que nous l'avons signalé, le long des frontières des zones déformées dans les solides, ou le long des lignes de glissement isolées, on a nécessairement $f = 0$. Il s'ensuit que le champ de contraintes dans tout prolongement licite doit nécessairement être à la limite d'écoulement au voisinage immédiat de ces arcs du contour des zones rigides. Correspondant à cela on remarque que sur les exemples on cherche à prolonger le champ par un champ à la limite d'écoulement, continu si possible, dans un voisinage plus ou moins grand des portions du contour où le critère est nécessairement vérifié, puis à satisfaire les autres conditions aux limites par des champs simples, ou bien connus, en équilibre limite, ou surabondant, qui se raccordent au précédent par des lignes de discontinuité de contraintes.

4. EXEMPLE DE RESULTATS OBTENUS DANS LE CAS DE MATERIAU NON HOMOGENE.

Nous allons maintenant, avec le problème du bicouche, donner un exemple des résultats qui peuvent être atteints dans un cas simple où le matériau constitutif n'est pas homogène.

Il s'agit de l'action d'un poinçon rectangulaire, de largeur $2a$, indéformable, rugueux par exemple, sur

une couche de hauteur h en matériau de cisssion limite k , reposant avec frottement maximal sur une couche infinie de cisssion limite $K \gg k$.

Considérant d'abord le cas où $K = \infty$ - la couche plastique sur support indéformable - nous avons les solutions incomplètes suivantes:

pour $h/a \geq \sqrt{2}$, la solution incomplète de PRANDTL (fig.10), correspondant à la pression moyenne sous le poinçon: $\bar{\omega} = (\pi + 2)k$;

pour $h/a \leq \sqrt{2}$, la solution incomplète dont le schéma est représenté à la figure 11: le poinçon d'axe $\omega\omega'$ dont le coin est en O , s'enfonce verticalement entraînant le bloc rigide STT' ; le bloc rigide SRR' est immobile; STOBAILS est la zone déformée plastiquement; le matériau s'écoule uniformément à la surface à travers OB ; il y a glissement le long de $SRIAB$ et le long de $STCO$. La pression moyenne sous le poinçon $\bar{\omega}$ est une fonction croissante vers l'infini quand $h/a \rightarrow 0$.

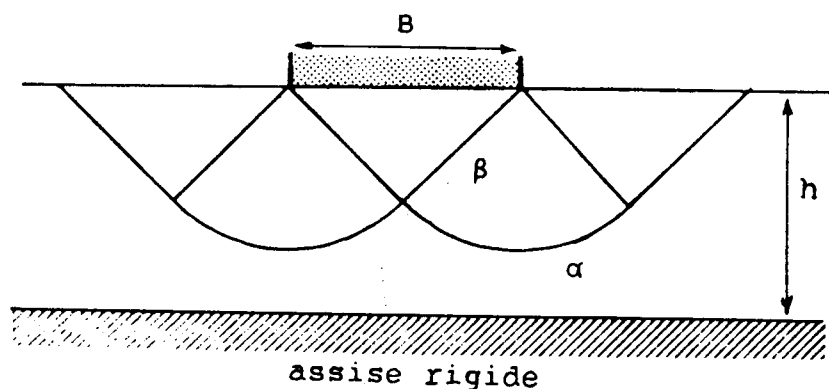
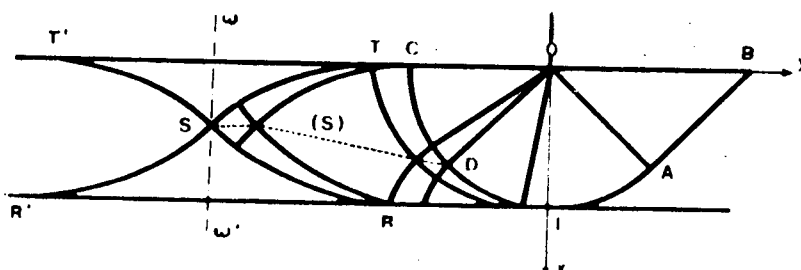


Figure 10



Ces solutions incomplètes peuvent être complétées aisément:

pour $h/a \geq \sqrt{2}$, par le prolongement de SHIELD;

pour $h/a \leq \sqrt{2}$: dans les zones rigides STT' et SRR' on considère les champs continus à la limite d'écoulement définis à partir des données sur les arcs de caractéristiques limitant ces zones ST et ST' (SR et SR'); dans la zone rigide à droite de IAB (et symétrique) les champs à la limite d'écoulement poursuivant le champ radial et le champ homogène (cf. J.S. 1968); on vérifie de plus que les contraintes à l'interface sont des compressions.

Ainsi dans le cas de l'assise indéformable une solution complète du problème est connue et on a la charge limite.

Considérons maintenant le cas où $K < \infty$.

pour $h/a \geq \sqrt{2}$, la solution de PRANDTL prolongée par SHIELD est complète $\forall K \geq k$.

pour $h/a \leq \sqrt{2}$, la solution de la fig. 11 est incomplète et pour la compléter, outre les prolongements donnés ci-dessus, on doit aussi trouver un champ de contraintes licite dans la couche inférieure (K). Considérons la distribution des contraintes à l'interface donnée par ces prolongements: l'intégration des formules de FLAMANT à partir de cette distribution fournit un prolongement S.A. dans la couche inférieure, dont on peut montrer qu'il est borné en tout point. On en déduit le résultat suivant (1968):

pour chaque valeur de h/a il existe une valeur finie K_0 , qui est la valeur minimale de la cission limite de la couche inférieure, pour que la solution de la fig. 11 puisse être complétée.

Ainsi, alors qu'on aurait pu imaginer le cas de la couche inférieure indéformable comme un cas limite atteint asymptotiquement, on démontre que dès que la cission limite est suffisamment grande en restant finie, la charge limite est égale à celle correspondant au cas de la couche inférieure indéformable. (K varie continûment de $K_0 = k$ pour $h/a \geq \sqrt{2}$, jusqu'à l'infini pour $h/a = 0$).

5. CONCLUSION.

Les idées principales qui peuvent être dégagées de ce travail sont à notre avis les suivantes:

L'utilisation de la théorie des charges limites est nécessaire pour l'interprétation des résultats donnés par les solutions connues des problèmes de plasticité pour le matériau rigide parfaitement plastique.

La majorité des solutions connues, en particulier pour les problèmes de déformation plane, sont des solutions incomplètes au sens de BISHOP, correspondant à l'application de la méthode cinématique et fournissant un majorant de la charge limite.

La notion de solution complète est fondamentale: l'intérêt de l'étude du prolongement statique des solutions dans les zones rigides avait été signalé par GEIRINGER (1953), PRAGER (1958), mais cette question est restée peu explorée jusqu'à présent.

*

*

*

REFERENCES.

- J.F.W. BISHOP (1953) : J. Mech. Phys. Sol. 2, 1, p.43.
- H. GEIRINGER (1953) : Adv. in Appl. Mech. 3, p.198,
Academic Press.
- H. HENCKY (1923) : Z. Angew. Math. Mech. 3, 241-251.
- E.H. LEE (1950) : Proc. 3rd. Symp. Appl. Math.
Mc Graw Hill, p.213.
- J. MANDEL (1966) : Mécanique des milieux continus, II,
Gauthier-Villars, Paris.
- W. PRAGER (1958) : Problèmes de plasticité théorique, Dunod.
- L. PRANDTL (1923) : Z. Angew. Math. Mech. 3, 401-406.
- J. SALENCON (1967) : C.R. Acad. Sc. 264, série A, p.613-616,
Paris.
- J. SALENCON (1968) : C.R. Acad. Sc. 266, série A, p.1210,
Paris.
- R.T. SHILED (1954) : J. Appl. Mech. 21, p.193.

APPENDICE.

A titre indicatif nous donnons les expressions analytiques des majorants et minorants de la charge limite correspondant au problème du § 3.3.

I_0 et I_1 sont les fonctions de BESSEL modifiées et $A_0(x) = \int_0^x I_0(t) dt$; p désigne la pression moyenne sous chaque poinçon; les autres notations sont celles des figures.

$$p = (\pi + 2)k \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{valeur exacte pour} \\ 8,713 \leq h/a \end{array} \right.$$

$$h/a = A_0(2\alpha) + I_0(2\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{valeur exacte pour} \\ 5,298 \leq h/a \leq 8,713 \end{array} \right.$$

$$p = 2k \frac{I_0(2\alpha) + 2\alpha [I_0(2\alpha) + I_1(2\alpha)]}{A_0(2\alpha) + I_0(2\alpha)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{majorant pour} \\ 1 \leq h/a \leq 5,298 \end{array} \right.$$

$$h/a = 2A_0(2\delta) - 2\delta I_1(2\delta) + A_0(2\delta) / \delta \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{minorant pour} \\ 2 \leq h/a \leq 5,298 \end{array} \right.$$

$$p = 2k (1 + \delta)$$

$$p = 2k \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{minorant pour} \\ 1 \leq h/a \leq 2 \end{array} \right.$$