

PLASTICITÉ. — *Poinçonnement d'un bicouche à interface lisse, en déformation plane.* Note (*) de MM. JEAN MANDEL et JEAN SALENÇON, présentée par M. Paul Germain.

Pour le matériau de Tresca, on donne la solution complète pour le poinçonnement par un poinçon rugueux d'une bande infinie reposant sans frottement sur une assise rigide, pour $a/h \geq 1$. Dans le cas où la couche inférieure n'est pas infiniment rigide, on démontre l'existence d'une rigidité $K_0(a/h)$ finie, telle que si $K \geq K_0$ la charge limite est la même que dans le cas d'une rigidité infinie. Pour le matériau de Coulomb on donne le réseau de caractéristiques utilisables pour le calcul des coefficients N'_c et N'_g .

1. MATÉRIAU DE TRESCA. — On étudie, en déformation plane, le poinçonnement par un poinçon rigide de largeur $2a$, parfaitement rugueux, d'une couche d'épaisseur h et de cission limite k , reposant sans frottement sur une couche infinie de cission limite $K \geq k$. La force F appliquée au poinçon est verticale axiale, la composante verticale de la vitesse du point d'application de cette force est donnée, U . Les vitesses sont nulles à l'infini.

On fait les hypothèses habituelles de la théorie des charges limites. Les notations et la terminologie sont les mêmes dans (1).

1.1. *Solution pour $a/h \geq 1$.* — La figure 1 représente le réseau de caractéristiques défini dans la bande $0 \leq x \leq h$, utilisé pour construire cette solution.

$\omega\omega'$ est l'axe du poinçon.

Dans la région $\omega'\omega OC$ le schéma d'écoulement est celui qu'a utilisé Hill (2) pour le problème de la presse. Mais à droite de OC le triangle COA reste rigide et glisse le long de CA avec la vitesse $U \times (a/h)$ tandis que le triangle OAB également rigide glisse le long de AB avec la vitesse $U \times (a/h) \sqrt{2}/2$. Il y a discontinuité de vitesse le long de OA et AB , mais pas de discontinuité le long de OC .

Le champ de contraintes associé est le suivant : dans $IOBA$ c'est le champ homogène à la limite d'écoulement défini par la condition sur OB (d'où $p = k$, $\psi = \pi$); OI est une ligne de discontinuité et dans IOC le champ est le champ homogène défini par la continuité de la contrainte s'exerçant sur OI (d'où $p = 3k$, $\psi = \pi/2$); dans $STOCS$ le champ n'est autre alors, que celui obtenu dans le cas du problème de la presse, les valeurs de p étant augmentées de $2k$. Par intégration de σ_x le long de SCO , on obtient le majorant de la charge limite donné par cette solution incomplète, soit $F^{(1)} = 2a p^{(1)}$, fonction de a/h .

Le réseau de caractéristiques de la figure 1 tend, au fur et à mesure que l'on s'éloigne de O vers la gauche, vers le réseau limite de Prandtl composé d'arcs de cycloïdes [cf. (2)]. On en déduit le comportement asymptotique de $p^{(1)}$ quand $a/h \rightarrow \infty$: $p^{(1)} \sim k[2 + (\pi/2) + (a/2h)]$. Cette formule fournit d'ailleurs très vite une excellente approximation par excès, de $p^{(1)}(a/h)$. A noter que $p^{(1)}(a/h = 1) = 4k$ et que $p^{(1)} \geq (\pi + 2)k$ pour $a/h \geq 3,267$.

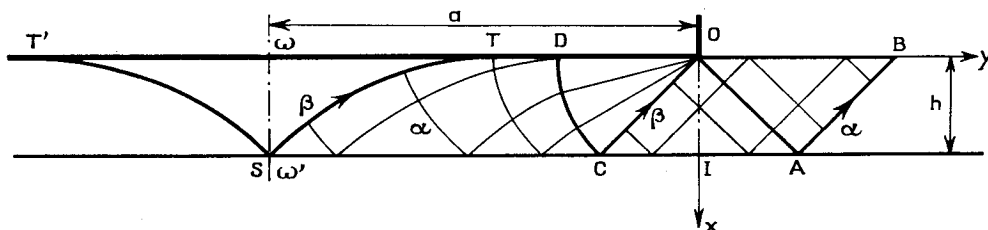


Fig. 1.

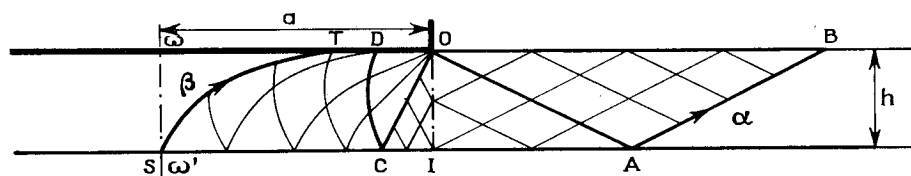


Fig. 2.

Il reste à compléter statiquement la solution ci-dessus dans les parties non déformées autres que les triangles COA et OAB déjà considérés ci-dessus.

Dans le triangle STT', on considère la restriction du champ de contraintes continu, à la limite d'écoulement, défini à partir des contraintes données sur les caractéristiques ST et ST'. Au-delà de AB on considère le même champ de contraintes homogènes que dans OIAB. Remarquons que les contraintes produites par ces champs licites à l'interface du bicouche sont bien des pressions normales (nulles au-delà de I).

La solution est ainsi complétée pour K infini : c'est le cas de la bande plastique sur assise infiniment rigide, pour lequel $p^{(1)}$ représente donc la valeur exacte de la charge limite.

Si K est fini, il est nécessaire, pour compléter la solution, de mettre en évidence un champ de contraintes licite dans la couche inférieure. La même méthode que celle employée dans (4) est applicable (utilisation de la solution élastique de Flamant) et permet de démontrer un théorème analogue à celui de (4) : $\forall a/h \geq 1, \exists K_0(a/h)$ fini tel que : si $K \geq K_0$ la charge limite est indépendante de K et égale à $p^{(1)}$.

1.2. $a/h < 1$. — Les résultats obtenus dans ce cas sont plus fragmentaires. Il est clair que $4k$ constitue un minorant de la charge limite $\forall K \geq k$ (solution statique).

Suivant les valeurs de a/h , dans le cas où l'assise est infiniment rigide, nous avons obtenu comme meilleur majorant : $0,755 \leq a/h \leq 1$: $p_1 = 4k (h/a)$ donné par un mécanisme de déformation avec glissement de blocs rigides.

$\sqrt{2}/2 \leq a/h \leq 0,755$, $p_2 = k (\pi + 4 - h/a \sqrt{2})$ donné par un mécanisme de déformation déduit de la solution de Prandtl.

$0 \leq a/h \leq \sqrt{2}/2$: $p_3 = k (\pi + 2)$ donné par la solution de Prandtl.

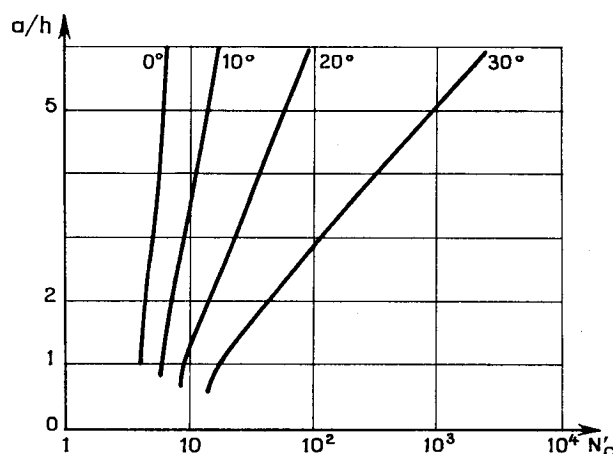


Fig. 3.

2. MATÉRIAU DE COULOMB. — Une généralisation du réseau de la figure 1 permet d'étudier le cas où le matériau constitutif de la couche obéit au critère de Coulomb, et où la couche inférieure est infiniment rigide. La figure 2 présente le réseau utilisé dans le cas du matériau de Coulomb non pesant soumis à une surcharge de surface, c'est-à-dire pour le calcul des coefficients N'_c et N'_γ dans l'expression de Terzaghi de la force portante d'une fondation sur un tel bicouche :

$$p_{\max} = \frac{1}{2} \gamma B N'_\gamma + q N'_c + C N'_c.$$

OIAB est un champ homogène, OCI également; la ligne de discontinuité OI est rectiligne; OCD est un éventail de Prandtl (CD est un arc de spirale logarithmique); le réseau dans STDCS est défini par CD et la condition de frottement maximal sous la fondation et d'interface lisse entre les deux couches.

On trouve encore que pour les faibles valeurs de a/h , N'_c et N'_γ sont inférieurs à N_c et N_γ correspondant à la fondation sur demi-plan infini en matériau de Coulomb homogène.

(4)

La figure 3 représente N'_c en fonction de a/h pour $\Phi = 0, 10, 20$ et 30° .

(*) Séance du 27 janvier 1969.

(1) J. SALENÇON, *Comptes rendus*, 266, série A, 1968, p. 1210.

(2) R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, 1950, p. 228.

(Laboratoire de Mécanique des Solides
de l'École Polytechnique,
17, rue Descartes, 75-Paris, 5^e.)