C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, p. 171-173 (15 juillet 1968). Série A

PLASTICITÉ. — *Théorie des charges limites. Étude d'une classe de solutions cinématiques pour le problème du poinçonnement d'un demi-plan non homogène.* Note (*) de M. **Jean Salençon**, transmise par M. Paul Germain.

Des théorèmes sont établis permettant, pour le problème du poinçonnement d'un demi-plan non homogène, dans le cas où il y a symétrie, de simplifier la recherche du minimum de la puissance dissipée sur la classe des solutions cinématiques dont les mécanismes de déformation sont ceux qui peuvent être associés à la solution de Prandtl du cas du demi-plan homogène.

On étudie, en déformation plane, le poinçonnement par un poinçon rigide de largeur $2a$, du demi-plan $x \geqq 0$ constitué d'un matériau rigide plastique non homogène. Le critère de plasticité est celui de Tresca où $k(x, y)$ est la scission limite variable. La force F appliquée au poinçon est verticale axiale et l'on désigne par U la composante verticale, donnée, de la vitesse du point d'application de cette force. Le poinçon est partiellement rugueux de coefficient de rugosité partielle $m(y)$:

$$|\tau_{xy}(0, y)| \leqq m(y)\, k(0, y).$$

On suppose le problème symétrique par rapport à Ox, c'est-à-dire que

$$k(x, y) = k(x, -y) \quad \text{et} \quad m(y) = m(-y).$$

Classe de mécanismes de déformation licites choisie. — Les modes de déformation licites considérés sont tous ceux qui peuvent être associés à la solution de Prandtl du poinçonnement du demi-plan homogène. On sait [*cf.* ([2])], que $v(y)$ étant la vitesse sous le poinçon et y_1 et y_2 définis comme indiqué sur la figure, le champ de vitesses a pour expression dans le système de coordonnées orthogonales α, β :

$$V_\alpha(M) = \frac{\sqrt{2}}{2}[\ \ U + v(y_1)](1_{\mathrm{I}} + 1_{\mathrm{III}}),$$

$$V_\beta(M) = \frac{\sqrt{2}}{2}[- U + v(y_2)](1_{\mathrm{I}} + 1_{\mathrm{II}}),$$

en désignant par 1_A la fonction caractéristique de l'ensemble A.

En posant $v(-a-\varepsilon) = -U$ et $v(a+\varepsilon) = U$ et en définissant les rayons de courbure R et S comme dans ([1]), la puissance dissipée totale est

$$(1) \quad P = \int_{\mathrm{I,II,III}} k(x, y)\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial s_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial s_\alpha} + \frac{V_\alpha}{R} + \frac{V_\beta}{S}\right) ds_\alpha\, ds_\beta + \int_{-a}^{+a} m(y)\, k(0, y)\, |v(y)|\, dy$$

ou

$$(2) \quad P = \mathfrak{L} + \int_{-a}^{a} m(y)\, k(0, y)\, |v(y)|\, dy,$$

la fonction $v(y)$, étant à variation bornée, et non décroissante sur $(-a^-, a^+)$, et les dérivées étant prises au sens des distributions.

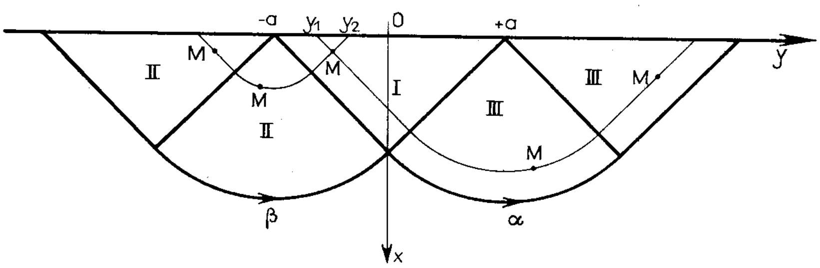
Le problème de la recherche du meilleur majorant de la charge limite dans cette classe de solutions cinématiques est celui de la recherche de la valeur minimale de P.

THÉORÈME 1. — *Le minimum de* P *est atteint pour une répartition de vitesse de glissement sous le poinçon, symétrique par rapport à* O, *c'est-à-dire vérifiant* $v(y) = -v(-y)$.

Ce théorème résulte de la linéarité de $\mathfrak{T}$ en $(v(y), \mathrm{U})$ et de la sous-linéarité du deuxième terme de P.

COROLLAIRE. — *Pour la recherche du minimum de* P *on peut se restreindre aux fonctions* $v(y)$ *symétriques par rapport à* O; P *est alors linéaire en* $(v(y), \mathrm{U})$.

DÉFINITIONS. — On définit la fonctionnelle $\mathbf{G}[v(y)]$ par l'expression de P où l'on remplace U par $v(a^+)$. $\mathbf{G}$ est linéaire en $v(y)$.



α étant une constante positive fixée, on désigne par E_α l'ensemble des fonctions $v(y)$ définies sur $(-a^-, +a^+)$, à variation bornée, symétriques, non décroissantes vérifiant $v(a^+) = \alpha$. E'_α est le sous-ensemble des fonctions de E_α qui sont composées de deux sauts symétriques; ce sont les fonctions $v_z(y) = -\alpha + \alpha \mathrm{Y}(y+z) + \alpha \mathrm{Y}(y-z)$, z abscisse du saut de droite est la paramètre de la fonction, $0 \leq z \leq a$.

De la linéarité de $\mathbf{G}$ on déduit alors :

LEMME 2.1. — *Si pour une valeur de* α *donnée,* $\mathbf{G}$ *a un minimum sur* E'_α *atteint pour* $v_{z_0}(y)$, *alors* $\mathbf{G}$ *a un minimum sur chaque* E'_α, $\alpha > 0$, *et ce minimum correspond à la même valeur* z_0 *de* z.

LEMME 2.2. — *Si le minimum de* $\mathbf{G}$ *sur* E'_α *est atteint pour les fonctions* $v_{z_1}(y)$ *et* $v_{z_2}(y)$, $z_1 \neq z_2$, *toute fonction de* E_α *de la forme*

$$v(y) = \lambda v_{z_1}(y) + (1-\lambda)\, v_{z_2}(y) \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

est telle que $\mathbf{G}[v(y)] = \operatorname*{Min}_{\mathrm{E}'_\alpha} \{\mathbf{G}[v(y)]\}$ *(généralisable à plus de deux valeurs de* z_0*).*

Par l'application de ces lemmes et en utilisant la linéarité de $\mathbf{G}$ on démontre alors le théorème :

THÉORÈME 2. — *a. Si* $\mathbf{G}$ *a un minimum dans* E_U *atteint pour une seule fonction* $v_{z_0}(y)$, *cette fonction réalise aussi le minimum strict de* $\mathbf{G}$ *dans* E_U.

b. Si **G** *a un minimum dans* E'_U *atteint pour les deux fonctions* $\varphi_{z_1}(y)$ *et* $\varphi_{z_2}(y)$, *le minimum dans* E_U *lui est égal et est atteint pour les seules fonctions*

$$\varphi(y) = \lambda \varphi_{z_1}(y) + (1-\lambda)\,\varphi_{z_2}(y) \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1).$$

c. Si **G** *est constante sur* E'_U *elle est constante sur* E_U.

Corollaire. — *Le minimum cherché de* P *est atteint pour une fonction* $\varphi(y)$ *composée de deux sauts d'amplitude* U *symétriques par rapport à* O. *Le problème est donc simplifié puisqu'il n'y a plus qu'à chercher le minimum d'une fonction de* z, $G(z)$.

Application au cas du bicouche $k < K$. — Le problème du bicouche, tel qu'il a été posé dans [3], fournit un exemple d'application immédiate de ces résultats. Les mécanismes de déformation de la classe considérée permettent de mettre en évidence un minorant $K''_0(h/a, m)$ de $K_0(h/a, m)$. En particulier dans le cas où $m = 0$, poinçon lisse, on trouve que le minimum de la puissance dissipée correspond à $z = |h\sqrt{2} - a|$, $\forall\, k/K < 1$.

Application au cas du milieu stratifié. — La méthode fournit un moyen aisé de calculer un majorant de la charge limite dans le cas où le demi-plan est constitué d'un matériau stratifié : milieu où m et k ne dépendent que de la profondeur x. En effet, à m, U et $\varphi(y)$ fixés, P est linéaire en $k(x)$: la fonction $G(z)$ s'obtient facilement par intégration de celle $G_X(z)$ relative au bicouche $k = 0$, $K = 1$ d'épaisseur $X\,(0 \leqq X \leqq a^{+}\sqrt{2})$:

$$G(z) = \int_0^{a+\sqrt{2}} G_X(z)\, dk(X), \text{ fonction continue de } z.$$

C'est ainsi que si $k(x)$ est une fonction affine $k(x) = k_0 + k_1\,(x/a)$ et si $m = 0$ on trouve le majorant $F = 2a\{(\pi + 2)\,k_0 + 2k_1\}$. Cette formule fournit dans le cas particulier étudié par Kuznetzov [4] ($k_1 = 0{,}495\,k_0$) le majorant $F/2a = 6{,}13\,k_0$ valeur égale à celle trouvée par cet auteur, par une méthode approximativement cinématique, dont on confirme ainsi la signification. (Cette concordance de valeurs ne doit pas induire à penser que l'on a trouvé la charge limite.)

(*) Séance du 24 juin 1968.

[1] R. Hill, *The mathematical theory of plasticity.*
[2] J. Mandel, *Séminaire de Plasticité*, P. S. T., 116, 1961.
[3] J. Salençon, *Comptes rendus*, 266, série A, 1968, p. 1210.
[4] A. I. Kuznetzov, *Arch. Mec. Stos.*, 10, 1958, ~~N~~ 4.

(*Laboratoire de Mécanique de l'École Polytechnique,*
17, *rue Descartes, Paris,* 5e.)