

PLASTICITÉ. — *Théorie des charges limites : étude du poinçonnement d'un bicouché en déformation plane.* Note (*) de M. JEAN SALENÇON, transmise par M. Paul Germain.

Quels que soient h/a et m (coefficient de rugosité partielle), on met en évidence une solution complète du problème dans le cas où la couche inférieure est infiniment rigide, donnant ainsi la valeur exacte de la charge limite. Pour chaque valeur de h/a (> 0) et de m , on montre que cette valeur est aussi la charge limite du bicouche si la cission limite K de la couche inférieure dépasse une valeur $K_0(h/a, m)$ finie.

On étudie en déformation plane, le poinçonnement par un poinçon rectangulaire rigide de largeur $2a$ d'une couche d'épaisseur h et de cission limite k , reposant sur une couche infinie de cission limite $K \geq k$. La force F appliquée au poinçon est verticale axiale, la composante verticale de la vitesse du point d'application de cette force est donnée. Les vitesses sont nulles à l'infini. On suppose qu'à l'interface sous le poinçon il y a frottement partiellement rugueux de coefficient m ($0 \leq m \leq 1$), et à l'interface entre les deux couches qu'il y a adhérence parfaite.

On fait les hypothèses habituelles de la théorie des charges limites. Les notations et la terminologie sont les mêmes que dans (1).

1. SOLUTION STATIQUE. — Le champ de contraintes de la solution complète de Shield (2) pour le poinçonnement d'un demi-plan homogène de cission limite k , est licite quels que soient $K \geq k$, m , h/a .

$F/2a = (\pi + 2)k$ est donc un minorant de la charge limite.

2. SOLUTION INCOMPLÈTE. — 2.1. $h/a \geq \sqrt{2}$: La solution incomplète classique de Prandtl est valable quel que soit m . $F/2a = (\pi + 2)k$ est donc la valeur exacte de la charge limite.

2.2. $0 \leq h/a < \sqrt{2}$: Pour chaque valeur de m on utilise la solution incomplète généralisant celle proposée par Mandel dans le cas $m=1$ et K infini et par Collins (3).

Le réseau de caractéristiques utilisé, défini uniquement dans la bande ($0 \leq x \leq h$), est représenté à la figure 1 : les caractéristiques β , à gauche de Ox , sont normales à l'interface entre les couches, et font un angle constant u avec le poinçon (en posant $2u = \text{Arc cos } m$).

Pour la construction de la solution incomplète, on place l'axe $\omega\omega'$ sur ce réseau ($O\omega = a$). Soient SR et ST les caractéristiques α et β qui se coupent en S sur $\omega\omega'$ et sont telles que $\psi = \pi/2$ en S . Le mécanisme d'écoulement est le suivant : les zones déformées plastiquement sont STOB AIRS (et symétrique par rapport à $\omega\omega'$); le triangle STT' est rigide et s'enfonce verticalement à la vitesse du poinçon; SRR' est rigide immo-

bile; il y a discontinuité de vitesse le long de SR, ST et de la caractéristique α issue de T, glissement sous le poinçon le long de TO, à l'interface le long de RT, et le long de IAB.

Le champ de contraintes associé dans la zone déformée est défini à partir de la condition $p = k$ dans OAB. Par intégration de σ_x le long de la courbe (C) lieu des points S, de O à S, on obtient $F_m^{(1)}/2$, majorant de la charge limite donné par cette solution incomplète. On pose $p_m^{(1)} = F_m^{(1)}/2 a$; c'est une fonction de m , k et h/a .

Le réseau de caractéristiques de la figure 1 tend, au fur et à mesure que l'on s'éloigne de O vers la gauche, vers le réseau limite de Prandtl

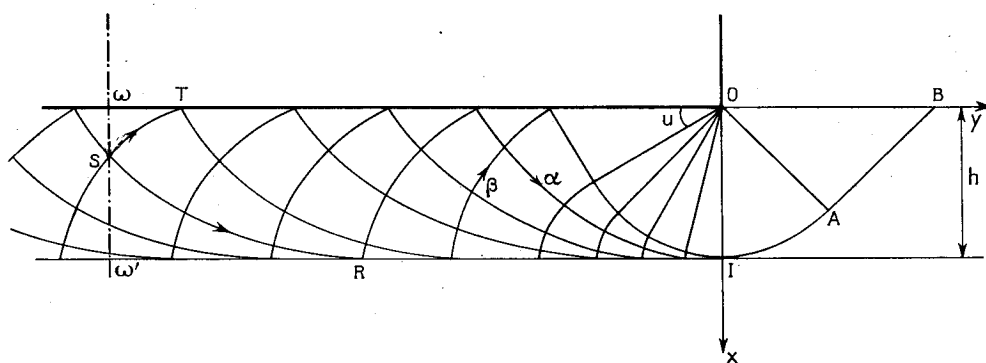


Fig. 1.

composé d'arcs de cycloïdes [cf. (4)]. On peut ainsi préciser le comportement asymptotique du majorant trouvé $p_m^{(1)}$, quand $a/h \nearrow \infty$:

$$p_m^{(1)} \sim k \left(\frac{1 + \frac{\pi}{2} + m \sqrt{1 - m^2} + \text{Arc sin } m + \frac{\pi}{2}}{m + 1} + \frac{m + 1}{2} \frac{a}{h} \right).$$

En effectuant la transformation par hodographe sur les réseaux de caractéristiques de la figure 1 correspondant à $m = 0$ et $m = 1$ pour des valeurs de a égales entre elles et des épaisseurs h dans le rapport 1 à 2, on démontre le résultat suivant :

$$p_0^{(1)} \left(\frac{2a}{h} \right) = p_1^{(1)} \left(\frac{a}{h} \right).$$

Cela permet d'énoncer, dans le cas de la bande sur assise rigide (en anticipant sur les résultats du paragraphe suivant) :

La force portante F d'un poinçon parfaitement rugueux de largeur a quelconque sur une bande plastique d'épaisseur h reposant sur une assise rigide, est la moitié de celle d'un poinçon lisse de largeur double.

3. SOLUTION COMPLÈTE POUR $h/a < \sqrt{2}$. — On cherche à compléter statiquement la solution incomplète ci-dessus.

Dans les triangles STT' et SRR' : on considère la restriction à STT' (resp. SRR') du champ de contraintes continu, entièrement plastique défini à partir des caractéristiques ST et ST' (resp. SR et SR') et des contraintes sur celles-ci; ce champ est licite et satisfait bien les conditions aux interfaces [cf. (5)]. Au-delà de IAB dans la couche supérieure : on considère dans yBAEy (fig. 2) le champ homogène identique à celui de OAB, et dans IAE l'éventail de Prandtl identique à celui de IOA.

La solution est ainsi complétée pour K infini. C'est le cas de la bande plastique sur assise rigide : $p_m^{(1)}$ est la charge limite pour ce problème (et F_m^1 la force portante).

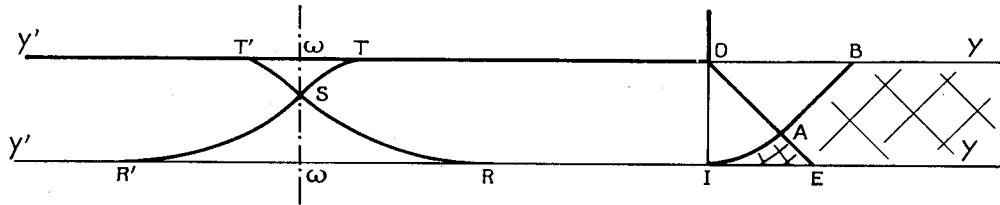


Fig. 2.

Si K est fini, on doit encore, pour compléter la solution, mettre en évidence un champ de contraintes licite dans la couche inférieure.

Soient $\sigma(y)$ et $\tau(y)$ les distributions de contraintes normale et tangentielle produites à l'interface ($x = h$) par le champ licite défini ci-dessus dans la couche supérieure : $\sigma(y)$ et $\tau(y)$ sont continues sur $y'\omega'y$, de support E'E, dérivables et à dérivées bornées sur $y'\omega'y$ (discontinues en E et E'). On considère le champ de contraintes correspondant à la solution élastique du problème du demi-plan chargé par $\sigma(y)$ et $\tau(y)$ en déformation plane (intégration des formules de Flamant). Compte tenu des propriétés de $\sigma(y)$ et $\tau(y)$ on démontre que les contraintes σ_x , σ_y et τ_{xy} sont bornées dans tout le demi-plan $x \geq h$.

Soit $K_0 = \text{Sup}_{y, x \geq h} \{ [(\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}^2]^{1/2} \}$. Il est clair que le champ de contraintes considéré est licite si $K \geq K_0$, ce qui, en utilisant les théorèmes limites, démontre le théorème : $\forall h/a > 0, \forall m (0 \leq m \leq 1), \exists K_0(h/a, m)$ fini tel que : si $K \geq K_0$, la charge limite est indépendante de K et égale à $p_m^{(1)}$.

Des minorants de K_0 peuvent être obtenus en appliquant la méthode cinématique avec des mécanismes d'écoulement déformant les deux couches et l'on trouve que $\forall m, K_0 \nearrow \infty$ quand $h/a \searrow 0$.

- (*) Séance du 29 avril 1968.
(¹) J. SALENÇON, *Comptes rendus*, 264, série A, 1967, p. 613.
(²) R. T. SHIELD, *J. App. Mech. (A. S. M. E.)*, 1954, p. 193.
(³) I. F. COLLINS, *Mech. Phys. Sol.*, 16, n° 2, 1968; voir aussi W. JOHNSON et H. KUDO, *Int. J. Mech. Sc.*, 1, n° 4, 1960.
(⁴) R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, 1950, p. 232.
(⁵) J. SALENÇON, *Comptes rendus*, 265, série A, 1967, p. 869.

(Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique,
17, rue Descartes, Paris, 5^e.)