

PLASTICITÉ. — *Théorie des charges limites : poinçonnement d'une plaque par deux poinçons symétriques en déformation plane; cas où l'épaisseur de la plaque est inférieure à la largeur des poinçons.* Note (*) de M. JEAN SALENÇON, présentée par M. Paul Germain.

La mise en évidence d'une solution complète dans certains cas nouveaux permet de meilleures majorations de la charge limite lorsque la valeur exacte n'est pas connue, et montre qu'on passe de façon continue des résultats du cas général à ceux, connus, qui valent lorsque les poinçons sont lisses.

On étudie, en déformation plane, le poinçonnement d'une plaque à bords libres d'épaisseur $2h$ et de largeur $2L$ par deux poinçons rectangulaires rigides symétriques de largeur $2a$. La force F appliquée à chaque poinçon est verticale axiale, et la composante verticale de la vitesse relative des deux points d'application de ces forces est une donnée [données cohérentes ⁽¹⁾ pour la recherche de la charge limite]. Aux interfaces les conditions de frottement sont : poinçon lisse, poinçon totalement ou partiellement rugueux caractérisé par un coefficient de rugosité partielle m ($0 \leq m \leq 1$) qui seules permettent l'application de la théorie classique des charges limites.

On fait les hypothèses habituelles de la théorie des charges limites et, en plus des notions de solutions statique et cinématique [cf. ⁽¹⁾], on utilise la terminologie introduite par Bishop ⁽²⁾ : solution incomplète, solution complète.

Les notations sont identiques à celles utilisées dans ⁽³⁾.

Par suite de la symétrie du problème on considère uniquement la moitié supérieure de la plaque supposée fixée avec glissement possible sur l'axe de symétrie horizontal sans frottement : $\tau_{xy} = 0$.

On cherche à mettre en évidence une solution complète du problème. La méthode adoptée consiste à construire d'abord une solution statique et à essayer de lui associer ensuite un mode de déformation cinématiquement et plastiquement admissible (ce qui oriente le choix de la solution statique au départ).

a. Construction d'une solution statique. — On utilise le réseau de caractéristiques de la figure 1 dû à Sokolovski ⁽⁴⁾. Dans ce réseau les caractéristiques α font sous le poinçon au-delà de O , un angle égal à u avec Oy , en posant $2u = \text{Arc cos } m$, c'est-à-dire qu'on a $\tau_{xy} = -mk$ sous le poinçon.

On place l'axe du poinçon $\omega\omega'$ sur ce réseau $O\omega = a$, et l'on conserve de celui-ci la partie située à gauche de la caractéristique α , $\rho\omega'$, aboutissant en ω' (on symétrise ensuite par rapport à $\omega\omega'$).

Prenant $p = k$ dans OIA_1 , le champ de contraintes est connu, licite, dans $OI\omega'\rho O$, auquel on peut raccorder dans B le champ de contraintes nulles. Dans $\rho\omega'\rho'$ (ρ' symétrique de ρ) on obtient un champ de contraintes

licités en considérant la restriction du champ de contraintes continu, entièrement plastique, en équilibre, défini dans le domaine d'influence de $\rho\omega$ et $\omega'\rho'$ à partir des données sur ces caractéristiques : l'application des relations de Hencky montre que le long de $\rho\rho'$, $|\tau_{xy}| \leq mk$, car $\rho\omega'$ est constitué de segments rectilignes et d'arcs curvilignes à convexité tournée vers ω .

On désigne par $O\varphi$ le segment de $O\omega$ sur lequel, dans cette solution, $\tau_{xy} = -mk$. On remarque que si ω' appartient à un segment $A_n C_n$ on a $\rho \equiv \varphi$; si ω' appartient à un segment $C_n A_{n+1}$ $O\varphi > O\rho$: plus précisément si ω' est situé entre C_n et le milieu M_n du segment on a $O_n\varphi = 2O_n\rho$ et si ω' est situé entre M_n et A_{n+1} on a $\varphi \equiv D_n$.

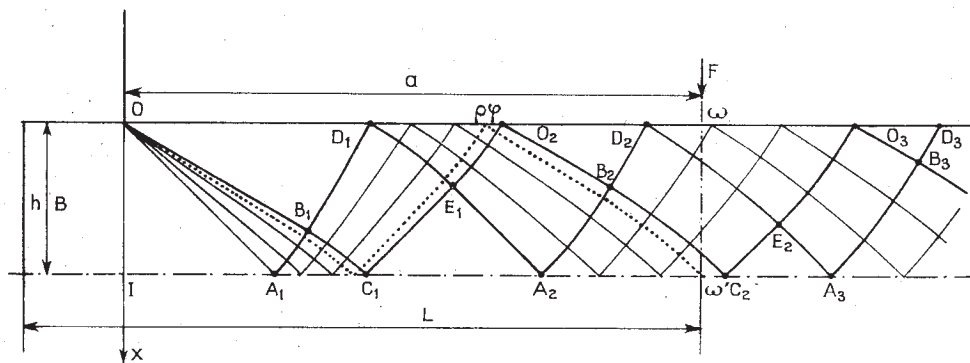


Fig. 1.

b. Résultats donnés par cette solution. — D'après les théorèmes classiques, cette solution fournit un minorant de la charge limite $F_m^0 = 2ap_m^0$ (m est le rapport défini en a : coefficient de rugosité partielle). Il est clair que pour ω' compris entre A_1 et C_1 la courbe $(p_m^0, h/a)$, soit \mathcal{C}_m^0 , est confondue avec la courbe $\mathcal{C}_1^0(p_1^0, h/a)$; pour ω' compris entre C_1 et A_2 , \mathcal{C}_m^0 est la droite tangente à \mathcal{C}_1^0 au point correspondant à C_1 : $a/h = A_0(2x) + I_0(2x)$ en posant $x = [(\pi/4) - u]$; pour ω' compris entre A_2 et C_2 , \mathcal{C}_m^0 est un arc de courbe à concavité tournée vers les p positifs, tangent au segment précédent au point correspondant à A_2 :

$$\frac{a}{h} = A_0(2x) + I_0(2x) + 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

et ainsi de suite.

c. Solution complète. — Pour compléter la solution ci-dessus on cherche à mettre en évidence un mode d'écoulement cinématiquement et plastiquement admissible associé à cette solution.

Si $L = a$, aucune condition n'est imposée à la vitesse le long de OI et il est évident que dans tous les cas on peut associer un mode d'écoulement licite à la solution statique.

Si $L > a$, la vitesse le long de OI doit être horizontale uniforme les : lignes de discontinuité de vitesse d'un mode de déformation licite associé doivent donc se terminer en O .

Dans le cas où ω' appartient à un segment $A_n C_n$, ainsi que cela a été signalé par Hill (⁵), A. P. Green (⁶), Bishop (⁷), un écoulement licite peut être associé à la solution statique : il comporte une ligne de discontinuité de vitesse issue de ω' et aboutissant en O et il y a glissement le long de $O\varphi \equiv O\rho$.

Si maintenant ω' appartient à un segment $C_n A_{n+1}$, puisque $O\varphi > O\rho$, on peut envisager des modes de déformation comportant des lignes de

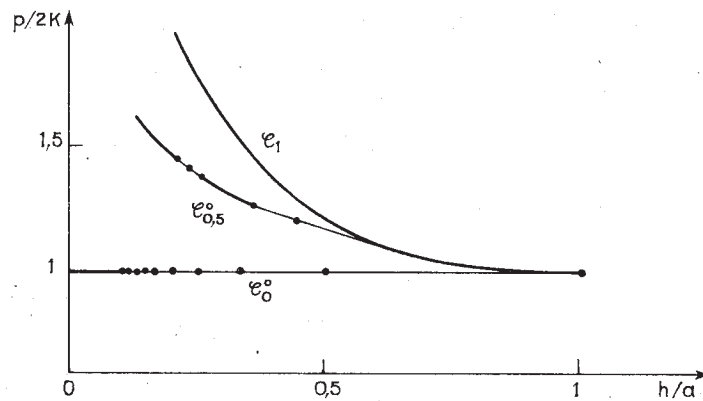


Fig. 2.

discontinuité de vitesse issues d'autres points de $\omega\omega'$ que ω' ; on trouve ainsi que si et seulement si ω' est au milieu M_n d'un segment $C_n C_{n+1}$, il existe un mode de déformation licite associé à la solution statique : il y a glissement sous le poinçon le long de $O\varphi \equiv OD_n$, le triangle rigide $D_n E_n D'_n$ étant lié au poinçon et le triangle $C_n E_n C'_n$ immobile, les caractéristiques issues de E_n correspondent à des discontinuité de vitesse qui se réfléchissent jusqu'en O ; l'hodographe est semblable au réseau des lignes de glissement.

d. Ainsi dans le cas où $L = a$, la courbe \mathcal{C}_m^0 est la courbe \mathcal{C}_m représentative de la charge limite.

Par contre si $L > a$, la courbe \mathcal{C}_m^0 représente un minorant de la charge limite mais on sait de plus que la courbe \mathcal{C}_m de la valeur exacte de la charge limite est confondue avec \mathcal{C}_m en tous les arcs curvilignes de cette dernière et passe par un point de chaque segment rectiligne jamais très éloigné du milieu de celui-ci.

e. Majoration de la charge limite. — Dans les intervalles où la charge limite n'est pas connue exactement on peut en donner des majorations Sans entrer dans les détails, le principe est le suivant : on utilise des solu-

tions cinématiques dont les modes de déformation coïncident avec ceux des solutions complètes quand ω' est en C_n , M_n ou A_{n+1} . Les majorations obtenues sont en « dents de scie » : les courbes qui les représentent passent par les extrémités et le point exact de chaque segment rectiligne. Il est clair que la connaissance de l'existence de ce point exact permet ainsi de réduire l'écart entre majorant et minorant de la charge limite.

f. Cas limites. — Pour $m = 1$, les segments rectilignes de \mathcal{C}_m^0 sont tous de longueur nulle. La charge limite est connue quel que soit h/a : c'est $p_1 = p_1^0$.

Pour $m = 0$, on a $A_n = C_n$. \mathcal{C}_0^0 est la droite $p_0/2 k = 1$, sur laquelle seuls les points $h/a = 1/q$ (q entier) correspondent à \mathcal{C}_0 : q impair provient des points $A_n \equiv C_n$, et q pair des points M_n . On voit que le passage est continu entre les résultats de la théorie générale et ceux de ce cas limite connu [Hill ⁽⁵⁾], la connaissance de la solution complète pour ω' en M_n étant essentielle pour cela.

(*) Séance du 20 novembre 1967.

(1) J. MANDEL, *Mécanique des milieux continus*, II, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

(2) J. F. W. BISHOP, *J. Mech. Phys. Sol.*, 2, 1953, p. 43-53.

(3) J. SALENÇON, *Comptes rendus*, 264, série A, 1967, p. 613.

(4) V. V. SOKOLOVSKI, *Theorie der Plastizität* (traduction du russe), V. E. B. Verlag technik, Berlin, 1955.

(5) R. HILL, *The Mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, 1950.

(6) A. P. GREEN, *J. Mech. Phys. Sol.*, 2, 1954, p. 73-80.

(7) J. F. W. BISHOP, *J. Mech. Phys. Sol.*, 6, 1958, p. 132-144.

(Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique,
17, rue Descartes, Paris, 5^e.)