

PLASTICITÉ. — *Théorie des charges limites : sur la solution du problème du poinçonnement d'une plaque par un poinçon rectangulaire rigide (en déformation plane)*. Note (\*) de M. JEAN SALENÇON, transmise par M. Paul Germain.

La solution proposée par Hill (1) (IX-5) au problème du poinçonnement d'une plaque à bords libres par un poinçon rectangulaire rigide est incomplète pour  $1 \leq h/a \leq 8,74$ . On met en évidence une solution complète associée à cette solution pour  $5,20 \leq h/a \leq 8,74$ , démontrant ainsi dans ce domaine, que la valeur donnée par Hill est la charge limite.

On étudie en déformation plane le poinçonnement par un poinçon rectangulaire rigide de largeur  $2a$ , d'une plaque à bords libres de hauteur  $h$  et de largeur  $2L$ , reposant sans frottement sur un massif rigide. La force appliquée  $F$  est verticale, la composante verticale de la vitesse du point d'application de cette force est donnée. Les conditions de frottement à l'interface entre le poinçon et la plaque sont supposées cohérentes (poinçon lisse, poinçon totalement ou partiellement rugueux).

On fait les hypothèses habituelles de la théorie des charges limites [voir par exemple (2)]; on utilise la terminologie définie par Bishop dans (3) : solution incomplète, solution complète.

NOTATIONS. — L'axe  $Ox$  est dirigé suivant la verticale descendante. Les contraintes sont comptées positivement en traction. On pose  $p = -(\sigma_x + \sigma_y)/2$ . Soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les contraintes principales ( $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ) et  $\psi$  l'angle de l'axe principal 1 avec  $Ox$ . Le potentiel plastique est  $f(\sigma_{ij}) \equiv (|\sigma_1 - \sigma_2| - k)$  et l'on note (1) l'inégalité large  $f(\sigma_{ij}) \leq 0$ . Dans une zone plastique [où  $f(\sigma_{ij}) = 0$  en tout point], on désigne par  $\alpha$  et  $\beta$  les deux familles de lignes caractéristiques des équations des contraintes, le long desquelles les relations  $dp \mp 2kd\psi = 0$  (respectivement) sont vérifiées. Les théorèmes de Hencky [voir par exemple (4)] sont utilisés dans les démonstrations des résultats énoncés.

*Description de la solution complète.* — Sur la figure le bulbe plastique ABIB'A' « d'ouverture  $\alpha$  » représente la zone déformée de la solution incomplète proposée par Hill (1);  $\alpha$  est lié à  $h$  par la relation  $h/a = A_0(2\alpha) + I_0(2\alpha)$  et

$$p_h = \frac{F}{2a} = \frac{2k \{ I_0(2\alpha) + 2\alpha [I_0(2\alpha) + I_1(2\alpha)] \}}{\frac{h}{a}}$$

est le majorant de la charge limite obtenue. [  $I_0(x)$  et  $I_1(x)$ , fonctions de Bessel modifiées;  $A_0(x) = \int_0^x I_0(t) dt$  ].

Pour compléter la solution on doit prolonger le champ de contraintes dans les zones indéformées en satisfaisant les équations d'équilibre, les conditions aux limites, et (1) en tout point. Nous utilisons une méthode analogue à celle employée par Bishop <sup>(3)</sup>.

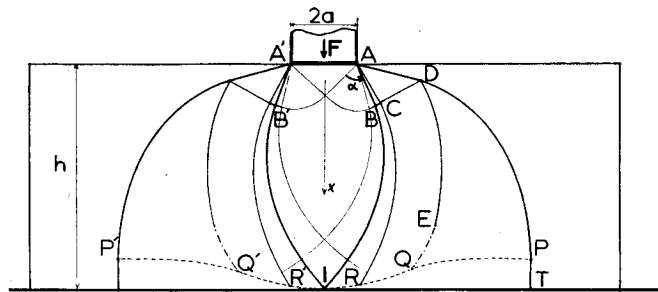
Au-delà du champ défini par la connaissance de  $p_h$  dans le bulbe plastique nous considérons le prolongement suivant (voir figure) :

dans ABC, l'éventail de Prandtl tel que  $p = k$  sur AC;

dans ADC, le champ homogène où  $p = k$ ; AD est libre de contraintes;

dans BCIR, le champ entièrement plastique continu défini à partir de BC et BI, tronçonné par la courbe (L) précisée ci-dessous;

dans CDPQR, le champ entièrement plastique où la courbe DP est libre de contraintes; la condition d'existence d'une courbe libre associée aux



données sur DC et CR permet de construire ce champ dans lequel une ligne de discontinuité apparaît, EQ;

la courbe (L)  $\equiv$  P'Q'R'IRQP, joignant une courbe libre à sa symétrique est telle que la contrainte soit verticale sur tout élément tangent à (L);

dans IRQPTI (et symétrique), le champ vérifiant  $\sigma_y = \sigma_{xy} = \partial\sigma_x/\partial x = 0$ , défini par continuité à la traversée de (L);

au-delà de ADPT (et symétrique), le champ uniformément nul.

DÉMONSTRATIONS. — a. *Existence de ce prolongement* : Pour  $\alpha \neq 1,020$  rd, l'angle BAC devient nul; le prolongement n'est donc possible que pour  $\alpha \geq 1,020$  rd, ce qui correspond à  $h/a \geq 5,20$ .

En étudiant dans toute la zone plastique la famille des courbes enveloppes des facettes sur lesquelles la contrainte est verticale nous démontrons que (L) existe et est unique, passe par I qui est son point le plus bas, et que de plus elle est horizontale en P, orthogonale en ce point à la courbe libre.

b. (1) est vérifiée en tout point : En effet soit  $t$  la valeur de  $\sigma_x$  en chaque point du domaine IRQPTI; on a le long de (L) :  $t = k[1 - (p^2/k^2)]/[(p/k) + \cos 2\psi]$ , cette formule permet de définir la fonction  $t$  en tout point d'une zone plastique. On étudie alors les varia-

tions de  $t$  dans une telle zone; des résultats simples sont obtenus en suivant les lignes caractéristiques :

$$dt = - dp_{(1 \mp \sin 2\psi)} \frac{\left(\frac{p}{k} + \frac{\cos 2\psi}{1 \mp \sin 2\psi}\right)^2}{\left(\frac{p}{k} + \cos 2\psi\right)^2},$$

le long d'une caractéristique  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ). D'où l'on voit que :

En deux points d'un même domaine où est défini un champ de contraintes entièrement plastique, qu'on peut joindre par des segments de caractéristiques  $\alpha$  et  $\beta$  ne franchissant pas de ligne de discontinuité de la contrainte, ni la séparatrice  $[(p/k) + \cos 2\psi] = 0$  et tels que les variations de  $p$  le long de ces segments soient monotones et de même sens, les valeurs de  $t$  se rangent dans l'ordre des valeurs de  $-p$ .

Dans le cas de conditions aux limites surabondantes où la solution entièrement plastique est discontinue, formée par exemple de solutions continues dont les domaines de définition ne sont pas disjoints et qui se raccordent le long d'une ligne de discontinuité de la contrainte, le théorème ci-dessus est applicable pour chacune des solutions continues dans tout son domaine de définition; pour la solution globale, on a, au franchissement des lignes de discontinuité :

$$[t] = -[p] \frac{\left(\frac{p}{k} + \frac{\cos 2\psi - \sin[\psi] \sin[\psi']}{1 - \sin(\psi + \psi')}\right)^2 [1 - \sin(\psi + \psi')]}{\left(\frac{p'}{k} + \cos 2\psi'\right) \left(\frac{p}{k} + \cos 2\psi\right)},$$

si on définit  $\psi'$  en suivant sans rebroussement les lignes  $\alpha$ .

Par application de ces résultats nous obtenons pour  $t$  un encadrement le long de (L) valable quel que soit  $\alpha$  :

$$-2k \leq t_{(L)} \leq (\pi - 2)k < 2k,$$

ce qui suffit à prouver que (1) est vérifiée en tout point de IRQPTI.

La même conclusion est évidente dans les autres domaines du prolongement.

c. Il est clair que les équations d'équilibre et les conditions aux limites sont vérifiées.

Ainsi se trouve complété le résultat obtenu par Bishop dans (3) : la valeur exacte de la charge limite est connue pour  $h/a \geq 5,20$ . Elle est la même quelles que soient les conditions de frottement le long de AA'; on en déduit qu'elle est aussi la charge limite du système dans le cas où il y a frottement de Coulomb le long de AA'. La solution complète proposée ici permet de connaître, pour chaque valeur de  $h/a$  supérieure à 5,20, une valeur minimale (non absolue) de la largeur de la plaque pour que cette dernière supporte la charge  $F = 2ap_h$  correspondante.

Pour  $h/a < 5,20$ , il est seulement possible par la même méthode de construire une solution statiquement plastiquement admissible qui fournit un minorant de la charge limite.

(\*) Séance du 13 mars 1967.

(1) R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press.

(2) J. MANDEL, *Mécanique des milieux continus*, II, Gauthier-Villars, Paris.

(3) J. F. W. BISHOP, *J. Mech. Phys. Sol.*, 2, 1953, p. 43-53.

(Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique,  
17, rue Descartes, Paris, 5<sup>e</sup>.)