

EXPANSION QUASI-STATIQUE D'UNE CAVITÉ A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE OU CYLINDRIQUE DANS UN MILIEU ÉLASTOPLASTIQUE

par J. SALENÇON,
Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Laboratoire de mécanique de l'École polytechnique

RÉSUMÉ

Pour un matériau régi par le critère de Coulomb, on étudie l'expansion quasi-statique dans un milieu infini, d'une cavité sphérique ou cylindrique. Le matériau est supposé isotrope, homogène, et sans forces de masse. La solution considérée est élastoplastique. La loi de comportement plastique adoptée permet une variation de volume permanente, en supposant la compressibilité en phase plastique, indépendante des déformations.

On discute la validité de cette solution et on donne ensuite les formules plus simples obtenues dans le cas où il n'y a pas de variation de volume permanente.

Cette étude est à rattacher à l'utilisation faite, dans la pratique de la mécanique des sols, d'appareils à expansion cylindrique ou sphérique pour déterminer les caractéristiques des sols rencontrés.

SUMMARY

The quasi-static expansion of a spherical or cylindrical cavity in an elastoplastic medium.

The paper is concerned with the study of the expansion of a spherical or cylindrical cavity in an infinite medium. We assume that the material is isotropic and homogeneous, that no body forces are acting, and that the yield criterion is that of Coulomb. The elastoplastic solution is given, for a constitutive equation allowing a permanent change in volume, the rate of which is independent of strain. The validity of the solution is discussed.

This study is to be connected with the use of pressuremetric devices in order to determine features of soils in practical soil mechanics.

1. CRITÈRE DE PLASTICITÉ DU MATÉRIAU

On suppose que le critère de plasticité du matériau est le critère de Coulomb avec cohésion :

$$|t| = C + n \operatorname{tg} \varphi$$

qui s'écrit, en posant $H = C \operatorname{cotg} \varphi$:

$$|t| = (n + H) \operatorname{tg} \varphi$$

(la contrainte n est comptée positivement en compression). Les contraintes σ_{ij} étant comptées positivement en traction, le critère se traduit, entre les contraintes principales extrêmes, par la relation :

$$(\sigma_1 - H) = K_a (\sigma_3 - H)$$

en posant :

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = K_a \quad \text{pour} \quad \sigma_1 > \sigma_3$$

2. HYPOTHÈSES SUR LA LOI DE COMPORTEMENT PLASTIQUE DU MATÉRIAU

On suppose que le tenseur des vitesses (1) de déformation permanente $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ a mêmes directions principales que le tenseur des contraintes. On appelle vecteur déformation permanente le vecteur $d\varepsilon^p$ de coordonnées $d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p$, qu'il est d'usage de représenter dans l'espace des contraintes, espace $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ [cf. (3)].

2.1. Cas où les trois contraintes principales sont distinctes.

On a $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$: régime de face sur la surface limite :

$$(\sigma_1 - H) = K_a (\sigma_3 - H)$$

On suppose que le vecteur déformation permanente a pour coordonnées :

$$\begin{cases} d\varepsilon_1^p = d\lambda \\ d\varepsilon_2^p = 0 \\ d\varepsilon_3^p = -kd\lambda \end{cases}$$

avec $d\lambda > 0$ et $k > 0$

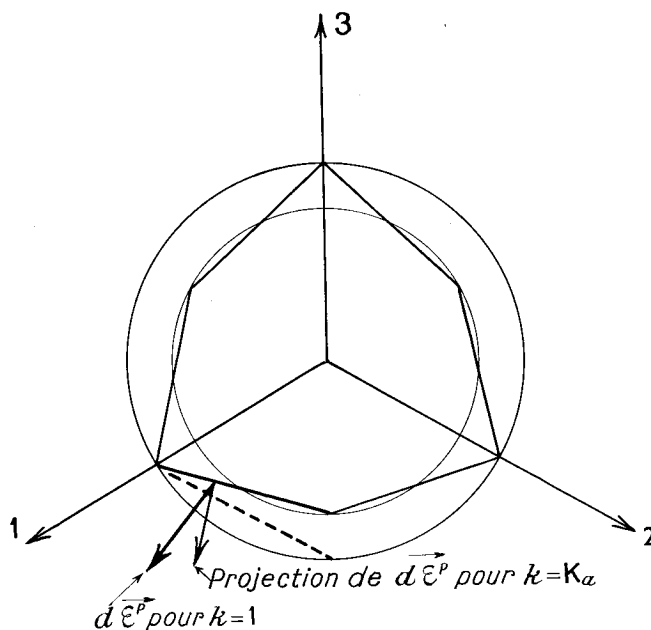


Fig. 1.

(1) On rappelle que, dans la théorie de la plasticité, le temps considéré n'est pas le paramètre physique, mais un simple paramètre cinématique. L'étude faite est quasi-statique, puisque l'on n'y fait pas intervenir les forces d'inertie.

Pour $k = 1$, c'est l'hypothèse de Mohr sur la déformation par glissement. Il n'y a pas de variation de volume permanente. Si l'on considère, dans l'espace des contraintes, la section de la surface limite par le plan « déviateur » (plan d'équation $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = C^{te}$), le vecteur déformation permanente est dans ce plan et est dirigé suivant la normale au côté de l'hexagone régulier correspondant à un critère de Tresca dans la région considérée ($|\sigma_1 - \sigma_3| = 2C$).

Pour $k = K_a$ c'est l'hypothèse d'un potentiel plastique identique au critère de plasticité. Le vecteur déformation permanente est alors normal à la surface limite (fig. 1).

La variation de volume permanente est $(1 - k)d\lambda$ donc :

pour $k > 1$ il y a diminution permanente de volume

et

pour $k < 1$ augmentation.

2.2. Cas où deux des contraintes principales sont égales.

Soit le cas $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$: régime d'arête sur la surface limite.

$$(\sigma_1 - H) = (\sigma_2 - H) = K_a (\sigma_3 - H)$$

La généralisation du paragraphe précédent consiste alors à poser :

$$\begin{cases} d\varepsilon_1^p = d\lambda \\ d\varepsilon_2^p = d\mu \\ d\varepsilon_3^p = -k(d\lambda + d\mu) \end{cases}$$

avec $k > 0$, $d\lambda > 0$ et $d\mu > 0$.

La variation de volume permanente est $(1 - k)(d\lambda + d\mu)$.

3. EXPANSION D'UNE CAVITÉ SPHÉRIQUE

3.1. Etude générale.

On considère un milieu élastoplastique infini dans lequel est pratiquée une cavité sphérique de rayon initial a_0 . On suppose qu'à l'état initial il règne dans le milieu, un état de contrainte caractérisé par le tenseur de compression sphérique q identique en tout point; cette hypothèse est équivalente à la suivante : à l'état initial, la pression à l'intérieur de la cavité est égale à la pression à l'infini égale à q . On fait croître la pression intérieure p dans la cavité, la pression à l'infini étant invariable.

On désigne par a et c les rayons actuels de la cavité et de la frontière élastoplastique.

Les contraintes positives sont les tractions.

Il est évident que les contraintes principales sont : $\sigma_\theta = \sigma_1 = \sigma_\varphi = \sigma_2 > \sigma_r = \sigma_3$ (coordonnées sphériques).

III. 1.1. Dans la zone élastique ($r \geq c$).

On utilise pour la détermination des contraintes, la classique solution de Lamé appliquée aux variations des contraintes entre l'état initial correspondant à $p = q$ et l'état actuel $p = p$. Si l'on désigne par $\bar{\omega}$ la

valeur de la variation $\Delta\sigma_r$ de la contrainte principale radiale, sur la frontière de la zone ($r = c$) on obtient ainsi :

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta\sigma_r = -\bar{\omega} \frac{c^3}{r^3} \\ \Delta\sigma_\theta = \bar{\omega} \frac{c^3}{2r^3} \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \sigma_r = -q - \bar{\omega} \frac{c^3}{r^3} \\ \sigma_\theta = -q + \bar{\omega} \frac{c^3}{2r^3} \end{cases}$$

III. 1.2. Dans la zone plastique, si elle existe ($a \leq r \leq c$).

Le critère est satisfait en tout point, on a donc :

$$(\sigma_\theta - H) = K_a (\sigma_r - H)$$

En particulier, en appliquant cette formule pour $r = c$ il vient :

$$\bar{\omega} = (q + H) \frac{2(1 - K_a)}{1 + 2K_a}$$

à reporter dans (1).

Les équations d'équilibre sans forces de masse se réduisent à :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0$$

soit, compte tenu du critère :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{(\sigma_r - H)(1 - K_a)}{r} = 0$$

En intégrant et en écrivant la continuité de σ_r à la traversée de la frontière élastoplastique, il vient :

$$(2) \quad \sigma_r - H = - (q + H) \frac{3}{1 + 2K_a} \left(\frac{c}{r}\right)^{2(1 - K_a)}$$

et pour p :

$$(3) \quad p = -H + (q + H) \frac{3}{1 + 2K_a} \left(\frac{c}{a}\right)^{2(1 - K_a)}$$

Les déformations n'étant pas supposées infiniment petites, les formules (2) et (3) ci-dessus ne sont valables qu'en coordonnées d'Euler, c'est-à-dire qu'il est nécessaire de déterminer la relation existant entre les valeurs actuelles a et c , coordonnées d'Euler de la cavité et de la frontière élastoplastique, pour pouvoir étudier la variation de p .

On prend comme paramètre cinématique le rayon actuel de la frontière c .

On désigne par v la vitesse de déformation radiale :

ξ étant le déplacement radial de la couche de rayon initial r_0 , à l'instant c : $\xi(r_0, c)$ on a :

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial c} = \frac{\partial r}{\partial c}$$

Dans la zone plastique les vitesses de déformation, sommes des vitesses de déformation élastiques et permanentes, sont, en utilisant la loi de comportement II.2 :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\varepsilon_r}{dc} = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{E} \frac{d}{dc} (\sigma_r - \nu\sigma_\theta - \nu\sigma_\varphi) - k \frac{d\lambda + d\mu}{dc} \\ \frac{d\varepsilon_\theta}{dc} = \frac{v}{r} = \frac{1}{E} \frac{d}{dc} (\sigma_\theta - \nu\sigma_r - \nu\sigma_\varphi) + \frac{d\lambda}{dc} \\ \frac{d\varepsilon_\varphi}{dc} = \frac{v}{r} = \frac{1}{E} \frac{d}{dc} (\sigma_\varphi - \nu\sigma_\theta - \nu\sigma_r) + \frac{d\mu}{dc} \end{cases}$$

avec $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$.

On voit que la symétrie géométrique entraîne $d\lambda = d\mu$, et :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{E} \frac{d}{dc} (\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta) - 2k \frac{d\lambda}{dc} \\ \frac{v}{r} = \frac{1}{E} \frac{d}{dc} [\sigma_\theta (1 - \nu) - \nu\sigma_r] + \frac{d\lambda}{dc} \end{cases}$$

En éliminant $\frac{d\lambda}{dc}$ entre ces deux équations on obtient :

$$(6) \quad \frac{\partial v}{\partial r} + 2k \frac{v}{r} = \frac{1}{E} (1 - 2\nu k) \frac{d\sigma_r}{dc} + \frac{1}{E} [2k(1 - \nu) - 2\nu] \frac{d\sigma_\theta}{dc}$$

En remplaçant σ_r et σ_θ par leurs valeurs tirées de (2) et de $(\sigma_\theta - H) = K_a (\sigma_r - H)$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} + 2k \frac{v}{r} &= \frac{6(q+H)}{E} \times \frac{1-K_a}{1+2K_a} \left(\frac{c}{r}\right)^{2(1-\kappa_a)} \times \left(\frac{v}{r} - \frac{1}{c}\right) \{ (1-2\nu k) + K_a [2k(1-\nu) - 2\nu] \} \\ \frac{\partial v}{\partial r} + 2k \frac{v}{r} &= \frac{6(q+H)}{E} \times \frac{1-K_a}{1+2K_a} \times \left(\frac{c}{r}\right)^{2(1-\kappa_a)} \times \left(\frac{v}{r} - \frac{1}{c}\right) [(1+2K_a)(1-2\nu)k + (1-k)(1-2\nu K_a)] \end{aligned}$$

Le terme $\frac{q+H}{E}$ est en général petit et l'on peut ainsi négliger dans cette équation le terme en $\frac{v}{r}$ du second membre d'où :

$$v \neq - \frac{6(q+H)}{E} \frac{1-K_a}{1+2K_a} \times \frac{(1+2K_a)(1-2\nu)k + (1-k)(1-2\nu K_a)}{(1+2K_a)k + (1-k)(2K_a-1)} \left(\frac{c}{r}\right)^{1-2\kappa_a} + \frac{A}{r^{2k}}$$

On détermine A par continuité sur la frontière élasto-plastique. En effet, dans la région élastique, v est donnée par :

$$v = \frac{3(q+H)}{E} \times \frac{1-K_a}{1+2K_a} (1+\nu) \frac{c^2}{r^2} \quad (\text{pour } r \geq c)$$

Faisant $r = c$ dans les deux formules ci-dessus on obtient A et :

$$(7) \quad \begin{aligned} v \neq & - \frac{6(q+H)}{E} \times \frac{1-K_a}{1+2K_a} \times \frac{(1+2K_a)(1-2\nu)k + (1-k)(1-2\nu K_a)}{(1+2K_a)k + (1-k)(2K_a-1)} \left(\frac{c}{r}\right)^{1-2\kappa_a} \\ & + \frac{3(q+H)}{E} \times \frac{(1-\nu)(1-K_a)(1+2k)}{(1+2K_a)k + (1-k)(2K_a-1)} \left(\frac{c}{r}\right)^{2k} \end{aligned}$$

Or $v = \frac{\partial r}{\partial c}$; de l'équation ci-dessus on tire donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^{2k+1}}{\partial c^{2k+1}} \neq & - \frac{6(q+H)}{E} \times \frac{1-K_a}{1+2K_a} \times \frac{(1+2K_a)(1-2\nu)k + (1-k)(1-2\nu K_a)}{(1+2K_a)k + (1-k)(2K_a-1)} \left(\frac{c}{r}\right)^{1-2\kappa_a-2k} \\ & + \frac{3(q+H)}{E} \frac{(1-\nu)(1-K_a)(1+2k)}{(1+2K_a)k + (1-k)(2K_a-1)} \end{aligned}$$

On utilise ici la même méthode d'intégration approchée que dans [1]. $\frac{q+H}{E}$ étant petit on remplace au second membre r par r_0 , d'où r^{2k+1} par intégration immédiate.

$$(8) \quad r^{2k+1} \approx - \frac{6(q+H)}{E} \frac{1-K_a}{1+2K_a} \frac{(1+2K_a)(1-2\nu)k+(1-k)(1-2\nu K_a)}{(1+2K_a)k+(1-k)(2K_a-1)} r_0^{(2k-1+2K_a)} \times c^{2(1-K_a)} \\ \times \frac{2k+1}{2(1-K_a)} + \frac{3(q+H)}{E} \times \frac{(1-\nu)(1-K_a)(1+2k)}{(1+2K_a)k+(1-k)(2K_a-1)} c^{2k+1} + B(r_0)$$

$B(r_0)$ est déterminé à partir des « conditions initiales » : on considère la sphère de rayon initial r_0 ; l'instant où son rayon r commence à être régi par (8) est l'instant $c = r(r_0, c)$. A cet instant $r = r_0 + \xi$ élastique :

$$r = r_0 + \frac{q+H}{E} (1+\nu) \frac{1-K_a}{1+2K_a} \frac{c^3}{r_0^3}$$

d'où :

$$r^{2k+1} = r_0^{2k+1} \left[1 + (2k+1) \frac{q+H}{E} (1+\nu) \frac{1-K_a}{1+2K_a} \right]$$

En égalant à (8) où $r = c$ on obtient $B(r_0)$.

La formule (8) est en particulier utilisable pour obtenir $a = a(a_0, c)$.

En portant cette expression dans (3) on obtient $p = p(c)$.

III. 1.3. Résultats.

On voit alors que la pression d'apparition de la zone plastique est :

$$(9) \quad p_0 = -H + (q+H) \frac{3}{1+2K_a}$$

et qu'il existe pour p une pression limite, pour laquelle c est infini, égale à :

$$p_{lim} \approx -H + \frac{3(q+H)}{1+2K_a} \left[\frac{E}{3(1+2k)(q+H)} \times \frac{(1+2K_a)k+(1-k)(2K_a-1)}{1-K_a} \times \frac{1}{1-\nu} \right]^{\frac{2(1-K_a)}{2k+1}}$$

Si l'on étudie les variations de p_{lim} en fonction de k on trouve que :

La pression limite décroît quand la compressibilité plastique augmente (si $k \nearrow$, $p_{lim} \searrow$).

D'autre part, l'étude précise de la fonction $p(c)$ pour $k \geq 1$ montre que cette fonction est monotone croissante.

3.2. Discussion de la validité de la solution.

Toute l'étude, ci-dessus, a été menée en supposant que le coefficient k caractéristique de la compressibilité plastique, était constant. Si l'on considère la deuxième équation de (5) :

$$(5) \quad \frac{v}{r} = \frac{1}{E} \frac{d}{dc} [\sigma_\theta (1-\nu) - \nu \sigma_r] + \frac{d\lambda}{dc}$$

et que l'on l'intègre pour c variant de a à l'infini, on voit que pour la couche sphérique de rayon initial r_0 , $\int d\lambda$ est infini :

En effet $\frac{v}{r} = \frac{\partial r}{\partial c} \times \frac{1}{r}$ et σ_θ et σ_r sont finies d'après (2) puisque $\frac{c}{r}$ tend vers une limite finie. Pour

cette couche sphérique, dans l'hypothèse d'un coefficient k constant il y aurait une variation de volume infinie : en particulier, $k < 1$ correspondrait à une dilatation infinie sous l'action de contraintes qui sont en permanence des compressions.

L'hypothèse de k constant n'est donc acceptable que pour $k = 1$. Dans le cas des sols, une étude plus précise devrait prendre en compte les variations de k en fonction de la déformation : k inférieur ou supérieur à 1 pour la déformation plastique commençante suivant que la densité initiale est supérieure ou inférieure à la densité critique, et tendant vers 1 au fur et à mesure de l'augmentation de la déformation plastique. Un calcul dans ces conditions serait plus compliqué que celui présenté ici.

Les résultats obtenus pour $k \neq 1$ peuvent donner une idée de l'incidence sur la valeur de p_{lim} et sur l'allure de la courbe $p(c)$, d'une valeur de k différente de 1 au début de l'expansion. On peut penser en effet que la vraie valeur de la pression limite est comprise entre les estimations obtenues en prenant pour k , la valeur 1 correspondant à la déformation plastique établie d'une part, et d'autre part la valeur correspondant à la déformation plastique commençante (1).

3.3. Etudes particulières et formules pour $k = 1$.

III. 3.1. Critère de Coulomb $\varphi \neq 0$.

La pression d'apparition de la zone plastique est donnée par (9) :

$$p_0 = -H + \frac{3}{1+2K_a}(q+H)$$

et la pression limite :

$$p_{lim} \neq -H + \frac{3}{1+2K_a}(q+H) \left[\frac{E}{9(q+H)} \times \frac{1+2K_a}{1-K_a} \times \frac{1}{1-\nu} \right]^{\frac{2}{3}(1-\kappa_a)}$$

La formule donnant $r(r_0, c)$ s'écrit :

$$r^3 - r_0^3 \neq \frac{3(q+H)}{E}(1-2\nu)r_0^3 - \frac{9(q+H)}{E} \frac{1}{1+2K_a}(1-2\nu)r_0^{1+2\kappa_a} c^{2(1-\kappa_a)} + \frac{9(q+H)}{E} \frac{1-K_a}{1+2K_a}(1-\nu)c^3$$

Les figures 2 et 3 indiquent l'allure de la courbe $p(c)$:

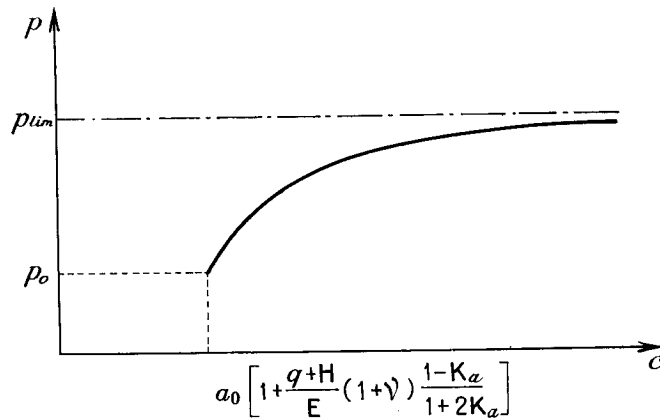


Fig. 2.

(1) Il est peut-être possible de préciser la vraie valeur en adoptant, dans la loi de comportement, deux valeurs de k :
 k constant $\neq 1$ tant que $\int d\lambda < \lambda_0$
 et $k = 1$ pour $\int d\lambda > \lambda_0$
 Cette hypothèse conduit à diviser la région plastique en deux couches séparées par une sphère de rayon C_2

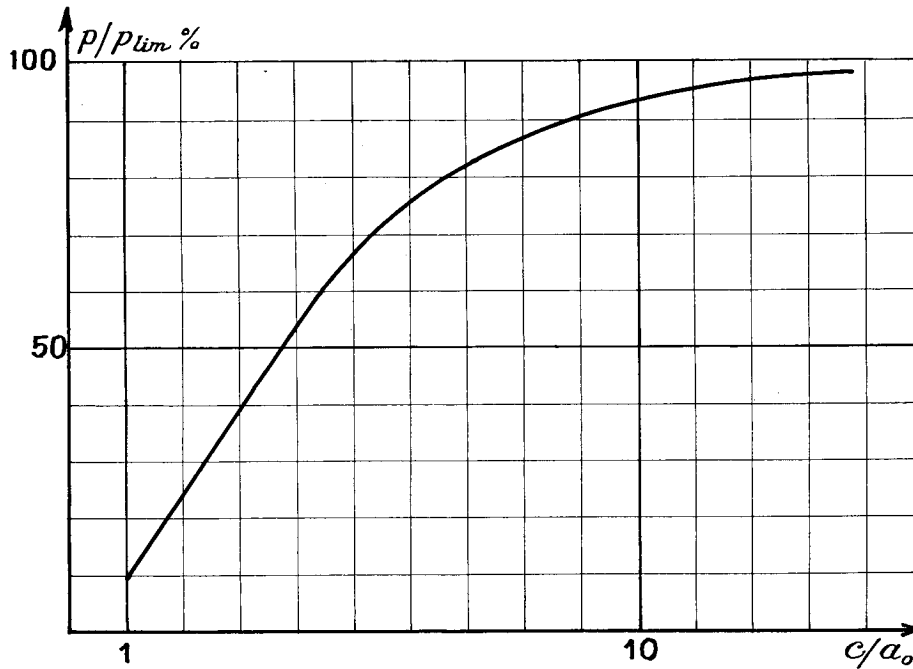


Fig. 3. — Expansion d'une cavité sphérique : courbe représentant la fonction $p(c)$
 (Utilisation des formules approchées dans le cas : $k = 1$; $C = 0$; $\nu = 0,3$; $\varphi = 30^\circ$; $q = 2$ bar; $E = 1\ 000$ bar; d'où $P_{lim} = 38$ bar)

En utilisant a comme paramètre cinématique la courbe $p(a)$ est représentée aux figures 4 et 5.

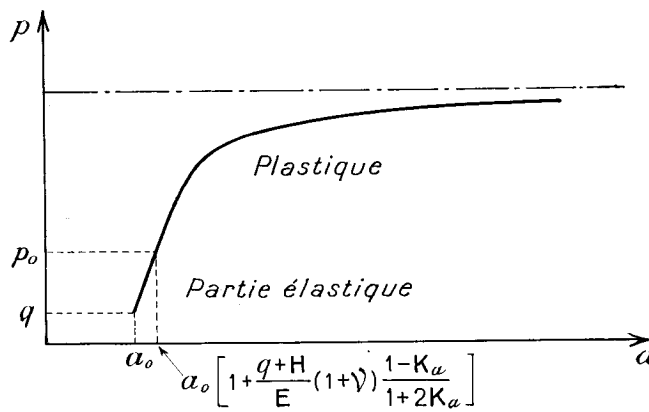


Fig. 4.

III. 3.2. Critère de Tresca $\varphi = 0$.

On obtient les formules correspondantes en faisant $\varphi = 0$ ce qui conduit à des passages à la limite.

Pression d'apparition de la zone plastique :

$$p = q + \frac{4C}{3}$$

Pression limite :

$$p_{\text{lim}} \approx q + \frac{4C}{3} \left[1 + \text{Log} \frac{E}{6C(1-\nu)} \right]$$

et la formule donnant $r(r_0, c)$ s'écrit :

$$r^3 - r_0^3 \approx -\frac{4C}{E}(1-2\nu)r_0^3 - \frac{12C}{E}(1-2\nu)r_0^3 \text{Log} \frac{c}{r_0} + \frac{6C}{E}(1-\nu)c^3$$

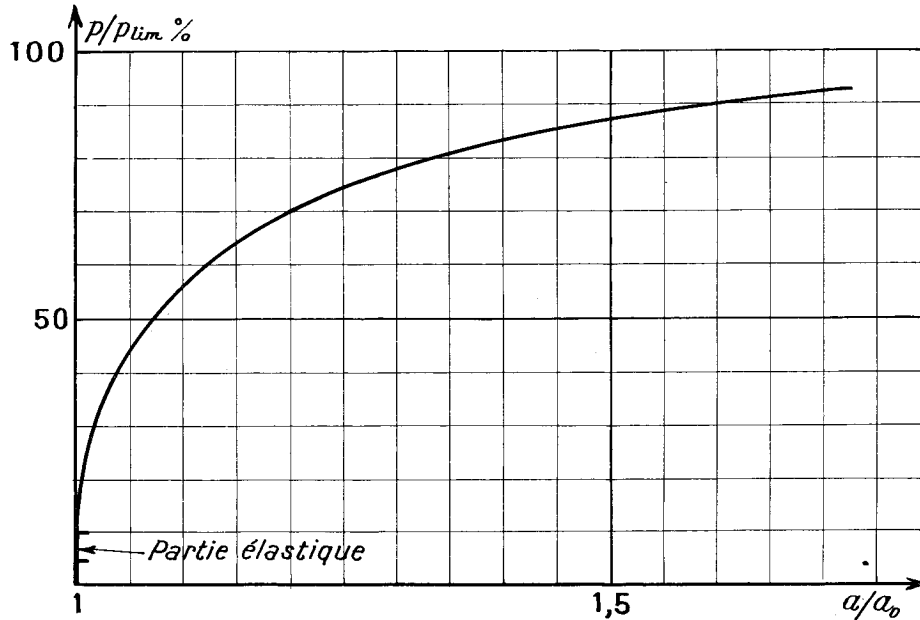


Fig. 5. — Expansion d'une cavité sphérique : courbe représentant la fonction $p(a)$

(Utilisation des formules approchées dans le cas : $k = 1$; $C = 0$; $\nu = 0,3$; $\varphi = 30^\circ$; $q = 2$ bar; $E = 1000$ bar; d'où $P_{\text{lim}} = 38$ bar)

4. EXPANSION D'UNE CAVITÉ CYLINDRIQUE

4.1. Étude générale.

Les hypothèses sont analogues à celles de l'étude précédente.

On considère un milieu élastoplastique infini dans lequel est pratiquée une cavité cylindrique de rayon initial a_0 . On suppose que l'état initial est caractérisé dans tout le milieu par le tenseur de contraintes de révolution : $-q$ pour les contraintes horizontales, $-Q$ pour la contrainte verticale; cette hypothèse est équivalente à la suivante : à l'état initial, la pression à l'intérieur de la cavité est égale à la pression horizontale à l'infini égale à q , la pression verticale à l'infini étant égale à Q . On fait croître la pression intérieure p dans la cavité la pression à l'infini étant invariable.

Il s'agit d'un problème de déformation plane.

On désigne par a et c les rayons actuels de la cavité et de la frontière élastoplastique.

Les contraintes positives sont les tractions.

Les contraintes principales sont σ_r , σ_θ , σ_z (coordonnées cylindriques), et on fait l'hypothèse que, dans la zone plastique, σ_z est contrainte principale intermédiaire.

IV. 1.1. *Dans la zone élastique* ($r \geq c$).

On utilise à nouveau la solution de Lamé (cylindrique cette fois) appliquée aux variations de contraintes :

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma_r &= -\bar{\omega} \frac{c^2}{r^2} \\ \Delta\sigma_\theta &= \bar{\omega} \frac{c^2}{r^2} \end{aligned} \right\} (1) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r &= -q - \bar{\omega} \frac{c^2}{r^2} \\ \sigma_\theta &= -q + \bar{\omega} \frac{c^2}{r^2} \\ \sigma_z &= -Q \end{aligned} \right\}$$

en désignant par $-\bar{\omega}$, la variation $\Delta\sigma_r$ à la frontière de la zone ($r = c$).

IV. 1.2. *Dans la zone plastique si elle existe* ($a \leq r \leq c$).

Avec l'hypothèse faite sur σ_z les contraintes principales sont : $\sigma_1 = \sigma_\theta$, $\sigma_2 = \sigma_z$, $\sigma_3 = \sigma_r$.

Le critère est satisfait en tout point, on a donc :

$$(\sigma_\theta - H) = K_a (\sigma_r - H)$$

D'où en appliquant cette formule pour $r = c$:

$$\bar{\omega} = (q + H) \frac{1 - K_a}{1 + K_a} \quad \text{à reporter dans (1).}$$

Les équations d'équilibre sans forces de masse se réduisent à :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

En tenant compte du critère :

$$\frac{d\sigma_r}{r} + \frac{(\sigma_r - H)(1 - K_a)}{r} = 0$$

D'où après intégration :

$$(\sigma_r - H) = - (q + H) \frac{2}{1 + K_a} \left(\frac{c}{r}\right)^{1 - \kappa_a}$$

et pour p :

$$(3) \quad p = -H + (q + H) \frac{2}{1 + K_a} \left(\frac{c}{a}\right)^{1 - \kappa_a}$$

Ces formules ne sont valables qu'en coordonnées d'Euler puisqu'aucune hypothèse sur l'ordre de grandeur des déformations n'a été faite. On doit chercher la relation entre a et c .

On prend c comme paramètre cinématique.

ξ désigne le déplacement radial de la couche de rayon initial r_0 , v la vitesse radiale.

$$\begin{aligned} \xi(r_0, c) &= r(r_0, c) - r_0 \\ v &= \frac{\partial \xi}{\partial c} = \frac{\partial r}{\partial c} \end{aligned}$$

Utilisant la loi de comportement II. 1. on peut écrire les vitesses de déformation totales dans la zone plastique :

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{d\varepsilon_r}{dc} &= \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{E} \frac{d}{dc} (\sigma_r - \nu\sigma_\theta - \nu\sigma_z) - k \frac{d\lambda}{dc} \\ \frac{d\varepsilon_\theta}{dc} &= \frac{v}{r} = \frac{1}{E} \frac{d}{dc} (\sigma_\theta - \nu\sigma_r - \nu\sigma_z) + \frac{d\lambda}{dc} \\ \frac{d\varepsilon_z}{dc} &= 0 = \frac{1}{E} \frac{d}{dc} (\sigma_z - \nu\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \end{aligned}$$

on y élimine $\frac{d\lambda}{dc}$ et $\frac{d\sigma_z}{dc}$ d'où :

$$\frac{\partial v}{\partial r} + k \frac{v}{r} = \frac{1+\nu}{E} \times \frac{d}{dc} \sigma_r (1-\nu-k\nu) + \frac{1+\nu}{E} \times \frac{d}{dc} \sigma_\theta (k-k\nu-\nu)$$

en y remplaçant σ_r et σ_θ par leurs valeurs tirées de (2) et de $(\sigma_\theta - H) = K_a (\sigma_r - H)$ on trouve :

$$(5) \quad \frac{\partial v}{\partial r} + k \frac{v}{r} = \frac{2(q+H)}{E} (1+\nu) \frac{1-K_a}{1+K_a} \left(\frac{c}{r}\right)^{1-\kappa_a} \left(\frac{v}{r} - \frac{1}{c}\right) (1-\nu-k\nu+K_a k - K_a k\nu - K_a \nu)$$

dont la solution approchée en négligeant le terme en $\frac{v}{r}$ du second membre est :

$$v \approx - \frac{2(q+H)}{E} (1+\nu) \frac{1-K_a}{1+K_a} \frac{1-\nu-k\nu+K_a k - K_a k\nu - K_a \nu}{k+K_a} \left(\frac{r}{c}\right)^{\kappa_a} + \frac{A}{r^k}$$

A est déterminé par continuité de v à la traversée de la frontière élastoplastique, puisque dans la zone élastique on a :

$$v = \frac{2(q+H)}{E} \times \frac{1-K_a}{1+K_a} \times (1+\nu) \left(\frac{c}{r}\right)$$

et on obtient :

$$(6) \quad v \approx - \frac{2(q+H)}{E} (1+\nu) \frac{1-K_a}{1+K_a} \times \frac{1-\nu-k\nu+K_a k - K_a k\nu - K_a \nu}{k+K_a} \left(\frac{r}{c}\right)^{\kappa_a} + \frac{2(q+H)}{E} (1-\nu^2) \frac{(1-K_a)(1+k)}{k+K_a} \left(\frac{c}{r}\right)^k$$

on en tire :

$$\frac{\partial r^{k+1}}{\partial c^{k+1}} \approx - \frac{2(q+H)}{E} (1+\nu) \frac{1-K_a}{1+K_a} \times \frac{1-\nu-k\nu+K_a k - K_a k\nu - K_a \nu}{k+K_a} \left(\frac{r}{c}\right)^{\kappa_a+k} + \frac{2(q+H)}{E} (1-\nu^2) \frac{(1-K_a)(1+k)}{k+K_a}$$

que l'on intègre de façon approchée comme en III :

$$(7) \quad r^{k+1} \approx - \frac{2(q+H)}{E} (1+\nu) \frac{1+k}{1+K_a} \times \frac{1-\nu-k\nu+K_a k - K_a k\nu - K_a \nu}{k+K_a} r_0^{k+1} c^{1-\kappa_a} + \frac{2(q+H)}{E} (1-\nu^2) \frac{(1-K_a)(1+k)}{k+K_a} c^{k+1} + B(r_0)$$

où $B(r_0)$ est à déterminer comme en III.

A partir de (7) on peut obtenir a (a_0, c) en particulier et donc en déduire, avec (3), $p(c)$.

IV. 1.3. Résultats.

La pression d'apparition de la zone plastique est :

$$(8) \quad p_0 = -H + (q+H) \frac{2}{1+K_a}$$

et il existe pour p une pression limite pour laquelle c est infini :

$$(9) \quad p_{lim} \approx -H + (q+H) \frac{2}{1+K_a} \times \left[\frac{E}{2(q+H)(1+k)} \times \frac{k+K_a}{1-K_a} \times \frac{1}{1-\nu^2} \right]^{\frac{1+\kappa_a}{1+k}}$$

On trouve, ici encore, que la pression limite décroît lorsque la compressibilité plastique du matériau augmente.

Les mêmes remarques qu'en III.2 sur la validité de la solution sont à faire. (L'intégration en c de la deuxième équation de (4) montre ici encore que $\int d\lambda = +\infty$).

4.2. Études particulières et formules pour $k = 1$.IV. 2.1. Critère de Coulomb $\varphi \neq 0$.

La pression d'apparition de la zone plastique est donnée par (8) :

$$p_0 = -H + (q + H) \frac{2}{1 + K_a}$$

et la pression limite :

$$p_{\text{lim}} \neq -H + \frac{2}{1 + K_a} (q + H) \left[\frac{E}{4(q + H)} \times \frac{1 + K_a}{1 - K_a} \times \frac{1}{1 - \nu^2} \right]^{\frac{1 - K_a}{2}}$$

La formule donnant $r(r_0, c)$ s'écrit :

$$r^2 - r_0^2 \neq \frac{2(q + H)}{E} (1 - 2\nu)(1 + \nu) r_0^2 - 4 \frac{q + H}{E} \times \frac{1}{1 + K_a} (1 - 2\nu)(1 + \nu) r_0^{1 + K_a} c^{1 - K_a} + \frac{4(q + H)}{E} \times \frac{1 - K_a}{1 + K_a} (1 - \nu^2) c^2$$

Les courbes représentatives de $p(c)$ et $p(a)$ ont la même forme que dans le cas précédent. La valeur du paramètre c pour laquelle il y a début de plastification de la ~~sphère~~ est :

$$c = a_0 \left[1 + \frac{q + H}{E} \times \frac{1 - K_a}{1 + K_a} (1 + \nu) \right]$$

IV. 2.2. Critère de Tresca $\varphi = 0$.

Les passages à la limite dans les formules lorsque l'on y fait $\varphi = 0$ conduisent aux résultats suivants :

Pression d'apparition de la zone plastique :

$$p_0 = q + C$$

Pression limite :

$$p_{\text{lim}} \neq q + C \left[1 + \text{Log} \frac{E}{4C(1 - \nu^2)} \right]$$

et pour $r(r_0, c)$:

$$r^2 - r_0^2 = -\frac{2C}{E} (1 + \nu) r_0^2 - \frac{4C}{E} (1 - 2\nu)(1 + \nu) r_0^2 \text{Log} \frac{c}{r_0} + \frac{4C}{E} (1 - \nu^2) c^2$$

La valeur donnée ici pour p_{lim} est différente de celle trouvée par Hill [2] pour le même problème avec le même critère. Cette divergence est due au fait que Hill utilise dans son travail le critère de Tresca associé à la loi de comportement de Prandtl-Reuss, ne satisfaisant pas au principe du travail maximal. Pour $k = 1$ la loi de comportement utilisée ici satisfait au principe du travail maximal avec le critère de Tresca (cf. II-1).

(On sait que la loi de comportement de Prandtl-Reuss satisfait au principe du travail maximal avec le critère de Misès et que d'autre part, en déformation plane il y a équivalence des différents critères de plasticité (cf. [3]) lorsqu'il s'agit de corps rigides-plastiques. Cette propriété n'est plus valable dans le cas du corps élasto-plastique considéré ici.)

REMERCIEMENTS :

Nous remercions Monsieur MANDEL de l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail et des remarques qu'il nous a suggérées.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. MANDEL. — *Cours de mécanique de l'École polytechnique. Annexes.*
- [2] R. HILL. — *The mathematical theory of plasticity.*
- [3] J. MANDEL. — *Séminaire de plasticité. 1962. (Ministère de l'Air PST 116.)*