

FORCE PORTANTE D'UNE FONDATION PEU PROFONDE

EMPLOI DE LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

par J. SALENÇON,
Ingénieur des Ponts et Chaussées

L'étude publiée ici a été effectuée à titre de travail personnel pour l'option Mécanique des Sols (Professeur M. Kerisel) sous la direction de MM. Mandel et Radenkovic du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École Polytechnique. Nous présentons une version légèrement condensée de ce travail, où nous passons sous silence les détails de calcul et certaines justifications.

RÉSUMÉ

L'auteur se propose de déterminer en milieu pulvérulent, homogène, pesant, la répartition des contraintes autour d'une fondation enterrée, rugueuse, rectangulaire de hauteur h et de largeur $2b$ dont la longueur est supposée infinie.

A partir de cela, on peut calculer la force portante de cette fondation et la largeur limite au-delà de laquelle il y aura glissement sous la base. Le principe du calcul est issu de la théorie de l'équilibre critique dans les sols. Le problème étant, ici, plan, nous utilisons la méthode dite des caractéristiques des équations des contraintes.

SUMMARY

Loading capacity of a shallow foundation. An application of the method of characteristics.

The paper is concerned with the stress distribution in a homogeneous, heavy granular medium under a rough rectangular foundation of infinite length, the width and the depth of which are $2b$ and h respectively. Thereof we can calculate the loading capacity of the foundation and the limit width beyond which slip occurs under the basis.

The analysis is based on the theory of critical equilibrium in soils. The problem considered being plane, the so called « method of characteristics » is used.

I. ÉQUILIBRE CRITIQUE DANS UN SOL

(D'après V.V. SOKOLOVSKI, *Statics of Soil Media*,
et J. MANDEL, *Séminaire de plasticité*.
[École Polytechnique 1961])

I.1. Les conditions de l'équilibre critique.

Nous adoptons comme critère de résistance au glissement suivant un plan la relation :

$$|\tau| = \sigma \operatorname{tg} \varphi + C$$

où φ désigne l'angle de frottement interne du milieu, C sa cohésion, τ la contrainte tangentielle, σ la contrainte normale comptée positivement si c'est une compression. Nous admettons que cette relation demeure valable lorsque l'équilibre est rompu, c'est-à-dire lorsqu'il y a glissement.

Pour que l'équilibre du sol en un point donné M (fig. 1) soit possible, il faut donc que :

$$\operatorname{Max} \{ |\tau| - (\sigma + H) \operatorname{tg} \varphi \} \leq 0$$

où $H = C \operatorname{cotg} \varphi$

(Le symbole Max indique le maximum de la quantité lorsque le plan passant par M prend toutes les orientations possibles). Le cas Max :

$$\{ |\tau| - (\sigma + H) \operatorname{tg} \varphi \} = 0$$

est appelé cas de l'équilibre critique en M . On démontre alors que les plans suivant lesquels $|\tau| = (\sigma + H) \operatorname{tg} \varphi$ sont au nombre de deux plans de glissement passant par un des axes principaux et également inclinés sur le plan des deux autres.

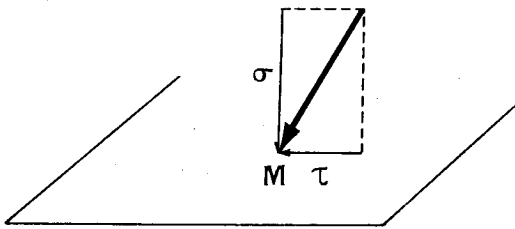


Fig. 1

Une zone dont tous les points sont en équilibre critique, est dite *zone d'équilibre critique*, et l'on appelle *surfaces de glissements* les enveloppes des deux familles de plans de glissements.

I.2. Équilibre plan (ou à deux dimensions).

La figure 2 indique clairement les notations employées. La convention de signes est la suivante :

la normale positive à une facette est la normale rentrante.

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = X \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = Y \end{cases}$$

X et Y forces de masse qui dans le cas d'un milieu pesant de poids spécifique $\gamma = \rho g$ sont : $X = \gamma$, $Y = 0$. Nous désignons par σ_1 et σ_2 les contraintes principales en un point et par 1 et 2 les axes correspondants. ($\sigma_1 > \sigma_2$).

$$\begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \left[\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

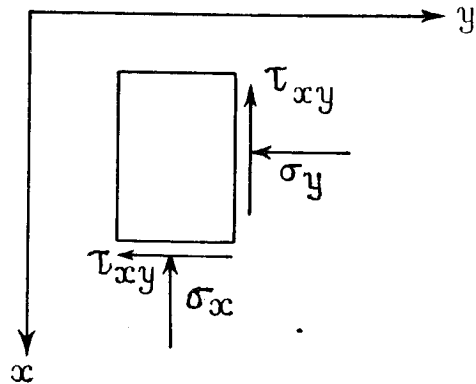


Fig. 2

I.3. Équilibre critique plan dans un sol.

Nous appelons *lignes de glissements* les directrices dans le plan x, y des surfaces de glissement qui sont évidemment cylindriques parallèles à Oz . Nous désignons par 2μ l'angle $(\frac{\pi}{2} - \varphi)$. On démontre que les lignes de glissements font avec l'axe 1 des angles de $\pm \mu$, et qu'il existe entre σ_1 et σ_2 la relation d'équilibre critique :

$$\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{\sin \varphi}{2} (\sigma_1 + \sigma_2 + 2H)$$

qui avec :

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2 + 2H)$$

se traduit par :

$$\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma \sin \varphi.$$

Soit \varnothing l'angle de l'axe principal 1 avec Ox on obtient alors pour les contraintes :

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \end{cases} = \sigma (1 \pm \sin \varphi \cos 2\varnothing) - H$$

$$\tau_{xy} = \sigma \sin \varphi \sin 2\varnothing$$

Pour déterminer l'équilibre critique plan d'un milieu nous disposons dès lors des équations d'équilibre et de la relation d'équilibre critique (où σ_1 et σ_2 sont exprimées en $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) :

$$\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = \frac{\sin^2 \varphi}{2} (\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2$$

entre les trois fonctions inconnues $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, de x et y . Par conséquent si les conditions à la limite s'y prêtent, on pourra déterminer les trois fonctions sans introduire de relation d'écoulement. (Problème dit statiquement déterminé). Dans le cas où les conditions aux limites ne concernent que les contraintes, qui sera celui rencontré par la suite, il est nécessaire de faire intervenir les vitesses de déformation pour choisir entre deux solutions possibles : c'est la classique distinction entre problèmes de poussée et de butée. En portant dans (1) les expressions (2) de $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, qui satisfont identiquement à la relation d'équilibre critique on obtient un système d'équations de base qui, avec les changements de variables :

$$\chi = \cotg \varphi \log \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \xi = \chi + \varnothing, \quad \eta = \chi - \varnothing$$

(σ_0 désignant une contrainte de référence),

est équivalent au système :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \tg(\varnothing - \mu) \frac{\partial \eta}{\partial y} = a \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} + \tg(\varnothing + \mu) \frac{\partial \xi}{\partial y} = b \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} a \\ b \end{cases} = \pm \frac{X \sin(\varnothing \pm \mu) - Y \cos(\varnothing \pm \mu)}{2\sigma \sin \varphi \cos(\varnothing \mp \mu)}$$

Le problème de la détermination des contraintes avec des données aux limites ne concernant que les contraintes est un problème de Cauchy, dont les lignes caractéristiques sont réelles.

Rappelons ici brièvement, sur cet exemple particulier les propriétés des caractéristiques d'un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaire. Le long d'une courbe $y = y(x)$, étant donné les valeurs de ξ et η on se

propose grâce au système différentiel (3) d'en déduire les valeurs des dérivées partielles de ξ et η . Pour $y = y(x)$ on connaît :

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy$$

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy$$

d'où l'on tire avec (3) :

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{b dy - \tg(\varnothing + \mu) d\xi}{dy - \tg(\varnothing + \mu) dx}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{a dy - \tg(\varnothing - \mu) d\eta}{dy - \tg(\varnothing - \mu) dx}$$

et des expressions analogues pour $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ et $\frac{\partial \eta}{\partial y}$.

On voit alors que si l'un des dénominateurs s'annule le long de $y = y(x)$ sans que le numérateur correspondant ne s'annule le problème est impossible : la ligne est appelée *ligne de discontinuité*; si numérateur et dénominateur d'une des formules s'annulent simultanément il y a indétermination : la ligne est appelée *ligne caractéristique*.

Une ligne caractéristique est ainsi constituée par l'ensemble d'une courbe $y = y(x)$ et des données ξ et η sur cette courbe annulant simultanément numérateur et dénominateur.

Dans le cas étudié il y a deux familles de caractéristiques définies par :

$$dy = \tg(\varnothing - \mu) dx, \quad d\eta/dx = a$$

$$dy = \tg(\varnothing + \mu) dx, \quad d\xi/dx = b$$

Un théorème d'Analyse affirme que dans l'espace à quatre dimensions (x, y, ξ, η), toute variété à deux dimensions intégrale du système, porte deux familles de caractéristiques. Cela se traduit ici de la manière suivante : dans une région du plan où le problème de Cauchy a une solution ξ, η de x, y , cette solution est telle que le long d'une courbe vérifiant $dy = \tg(\varnothing - \mu) dx$ on ait $d\eta/dx = a$ et le long d'une courbe :

$$dy = \tg(\varnothing + \mu) dx \text{ on ait : } d\xi/dx = b$$

Ajoutons que nous conviendrons de désigner dans la suite par S_+ , les caractéristiques d'inclinaisons $\alpha_+ = \varnothing + \mu$ et S_- celles d'inclinaison $\alpha_- = \varnothing - \mu$.

Les caractéristiques étant inclinées à $\varnothing \pm \mu$ sur Ox il s'ensuit qu'elles sont *lignes de glissement*. En tout point de la région étudiée il passe 2 caractéristiques qui se coupent en faisant entre elles l'angle 2μ . Quant aux zones de discontinuité, leur présence dans la solution indique l'impossibilité

de l'existence de l'équilibre critique conjointement avec une distribution continue des contraintes. Nous n'irons pas plus loin en ce qui concerne l'exposé des conditions de l'équilibre critique. Les quelques paragraphes précédents nous ont paru indispensables pour la compréhension des notations des formules et des raisonnements que nous utiliserons par la suite.

II. ÉNONCÉ DU PROBLÈME POSÉ

Nous nous proposons d'étudier, dans le cas de l'équilibre critique, en milieu pulvérulent, homogène, pesant, la répartition des contraintes autour d'une fondation enterrée rugueuse, rectangulaire, de hauteur h et de largeur $2b$ (de longueur supposée infinie).

$$X = \rho g = \gamma, \quad Y = 0, \quad C = 0.$$

II.1. Symétrie du problème.

Remarquons que le problème est symétrique par rapport à l'axe Ox de la fondation, ce qui nous amène aux considérations suivantes sur la symétrie dans les problèmes plans d'équilibre critique; soit S_+ une caractéristique, ligne de glissement dans la région D (fig. 3). Sa symétrique par rapport à Ox , sera évidemment ligne de glissement dans la région G ; cette caractéristique appartiendra au système S_- :

en effet on a par raison de symétrie :

$$\varnothing_{M'} = -\varnothing_M$$

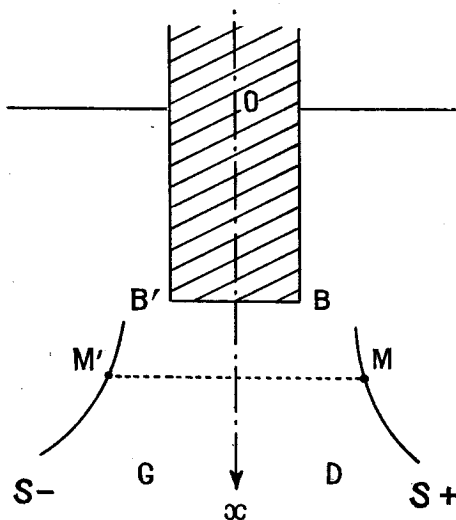


Fig. 3

en M l'inclinaison de S_+ est $(\varnothing_M + \mu) = \alpha_{+,M}$ donc en M' sa symétrie a pour inclinaison :

$$-(\varnothing_M + \mu) = \varnothing_{M'} - \mu = \alpha_{-,M'}$$

Par symétrie, les caractéristiques changent de système.

II.2. Condition à la paroi.

Revenons maintenant au problème posé. Il s'agit de la force portante maximale de la fondation donc d'un problème de butée. Nous supposons, d'autre part, la fondation suffisamment rugueuse pour mobiliser la butée maximale, c'est-à-dire l'inclinaison δ de la force de frottement sur la normale à la paroi égale à φ (fig. 4) :

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \sigma_\theta \operatorname{tg} \delta \\ \delta &= \varphi \end{aligned}$$

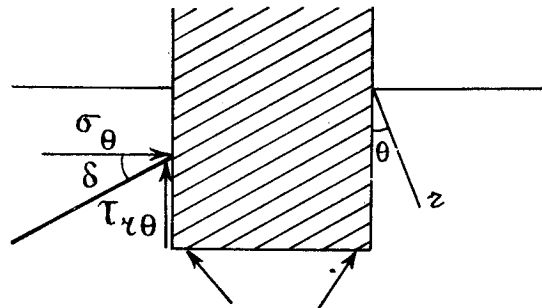


Fig. 4

II.3. Manière de traiter le problème et solution attendue.

Partant des conditions connues à la surface libre du sol à droite nous allons tracer le réseau de caractéristiques entourant la moitié droite de la fondation.

Une partie de la solution est déjà connue et se trouve dans le livre de Sokolovski (cité en référence); en effet le tracé des caractéristiques à droite de la fondation jusqu'au point B ne diffère en rien de celui correspondant à l'équilibre de butée sur un mur de soutènement vertical rugueux. Le problème est traité en coordonnées polaires (origine O), cherchant σ sous la forme $\sigma = \gamma r s(\theta)$. La condition à la surface du sol est $\varnothing = \frac{\pi}{2}$ qui correspond à « l'état de contrainte maximal » (le matériau se dilate dans le sens de la verticale), tandis que la condition $\tau_{r\theta} = \sigma_\theta \operatorname{tg} \delta$ sur la paroi en équilibre

de butée entraîne pour $2\varnothing$ la valeur définie par :

$$2\psi = 2(\varnothing - \theta) = \pi - \text{Arc sin } \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} - \delta$$

soit pour $\delta = \varphi$, $\varnothing = \mu$ car $\theta = 0$.

Nous trouvons d'abord en I une zone dite « d'état critique simple » où les caractéristiques sont des droites. Cette zone est limitée par la droite OA, faisant avec Ox l'angle $\alpha_- = \frac{\pi}{2} - \mu$. Puis un « faisceau » composé de caractéristiques du système S_- issues de O ou \varnothing varie entre $\frac{\pi}{2}$ et μ : zone II.

Dans la zone III, le réseau est constitué des caractéristiques dont les tangentes, le long de OB, font avec Ox un angle nul pour S_- et égal à 2μ pour S_+ .

Les données relatives aux zones II et III sont fournies par Sokolovski dans *Statics of soil media*. Figures 151, 152, 153 (cf. pour plus de précision l'édition russe). Elles sont valables jusqu'à la séparatrice de la zone III formée par la caractéristique S_- issue de B, tangente à OB.

Nous trouvons ensuite un faisceau de caractéristiques S_- issues de B, dont l'angle en B avec Ox varie entre 0 et $-\frac{\pi}{2}$ (\varnothing variant en B de $\varnothing = \mu$ sur OB à $\varnothing = \mu - \frac{\pi}{2}$ sur la moitié de droite de BB', où l'équilibre critique a effectivement lieu et où ψ , angle de l avec BB', est égal à μ comme sur OB) : c'est la zone IV. Cette zone est limitée (fig. 5) :

a. Supérieurement, par la caractéristique S_- issue de B (ou d'un autre point de BB' si la largeur est supérieure à une certaine valeur limite), qui fait avec sa symétrique par rapport à l'axe de la fondation (système S_+) l'angle 2μ en leur point commun c'est-à-dire μ avec la verticale ;

b. Inférieurement par la caractéristique S_+ à

droite et sa symétrique (à gauche) issues du point de concours des deux limites supérieures.

La zone V est un coin appelé élastique ou zone morte, où l'équilibre critique, dans les conditions que nous avons imposées, n'est pas possible.

II.4. Marche suivie dans les calculs effectués

Partant des données de Sokolovski pour les zones II et III nous avons construit la séparatrice des zones III et IV puis, à partir de celle-ci, le faisceau issu de B. Cette construction et les calculs de contraintes qu'elle comporte nous ont permis de connaître la largeur limite de la fondation (correspondant au cas où la caractéristique S_- tangente en B à BB' joue le rôle de séparatrice de IV et V) et ensuite la force portante des fondations dont la largeur est comprise entre 0 et la largeur limite.

III. CONSTRUCTION DU RÉSEAU

Nous avons pris pour φ la classique valeur de 30° .

III.1. Construction de la séparatrice Ω entre les zones III et IV.

Sokolovski fournit par des courbes, les valeurs, dans les zones III et IV des fonctions s et ψ en fonction de θ . La connaissance de $\psi(\theta)$ permet de construire la courbe Ω . C'est ce que nous avons fait graphiquement, puisque à partir de $\psi(\theta)$, on a, en fonction de θ , la valeur de l'angle de la tangente au point d'azimut θ de Ω avec Ox. (Les arcs de courbes étaient assimilés à des arcs de cercle). La courbe construite, nous pouvons mesurer $r(\theta)$ donc $\sigma = \gamma r s(\theta)$ est connu.

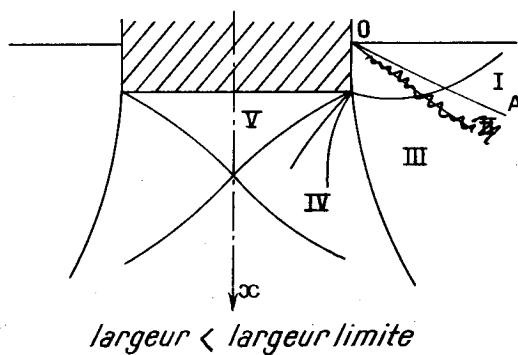
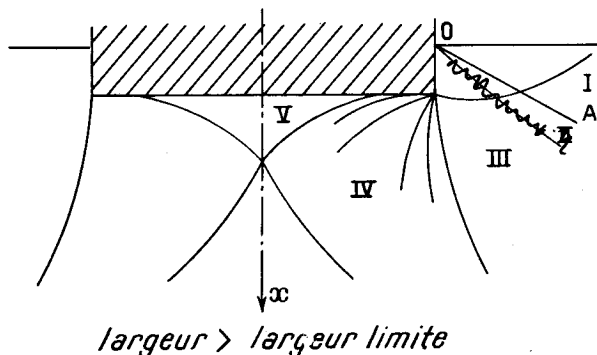


Fig. 5

III.2. Construction de la courbe 1, caractéristique S_+ entourant B.

Ainsi que nous l'expliquerons un peu plus loin, il nous faut, pour pouvoir déterminer, par intégration d'équations aux différences finies, le réseau entourant le point B, connaître une courbe S_- (c'est Ω) et une courbe S_+ . Nous avons choisi de prendre comme courbe S_+ de départ, non la caractéristique dégénérée en B, mais la courbe 1, S_+ passant par le point 1 voisin de B. Nous l'assimilons à une spirale logarithmique entourant B, ce qui revient à négliger les effets de la pesanteur dans le coin intérieur à la courbe. Les constantes a et b de (4) sont alors nulles et sur 1 nous avons $\xi = \chi + \varnothing = \text{Constante}$. La spirale est bien définie, car nous connaissons en $\Omega.1$ sa tangente ($\varnothing = 37^\circ 5$ en $\Omega.1$). Sur 1, nous déterminons les points correspondants aux intersections des S_- issues de B, dont l'angle avec Ox varie en B de 10° en 10° de 0° à -90° .

1 étant assimilée à une spirale logarithmique, toutes ces S_- que nous désignons par I, II, IX, ont, entre B et leur point d'intersection avec 1, la même variation d'angle que Ω entre $\Omega.0$ et $\Omega.1$, soit $7^\circ 5$. Assimilant comme précédemment les arcs de courbe à des arcs de cercle, la construction est aisée (fig. 6) : points $\Omega.1, I.1, II.1, IX.1$; $\varnothing = 37^\circ 5 - k \times 10^\circ$ d'où χ par $\chi + \varnothing = \text{Constante}$.

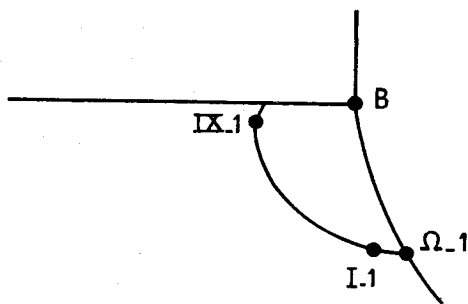


Fig. 6

III.3. Calcul des valeurs de σ et \varnothing au point B.

\varnothing et σ ne sont pas univoques en B. \varnothing varie de 30° à -60° nous le savons. Pour connaître les valeurs de σ correspondant à \varnothing variant de 10° en 10° (origine des courbes Ω, I, II, IX), nous utilisons le fait que la fonction ξ est univoque, de valeur définie par $\sigma_{\Omega,0} = 7.56$ et $\varnothing = 30^\circ$.

III.4. Construction du réseau de caractéristiques à partir de Ω et 1.

Nous connaissons sur Ω un certain nombre de points avec en ces points les valeurs de \varnothing et de σ .

De même sur 1 nous connaissons les points $\Omega.1, I.1, II.1, IX.1$, et les valeurs de \varnothing et σ qui leur sont relatives. A partir de cela, il est possible de poursuivre la construction de I, II, IX, (S_-) et également de construire les courbes 2, 3 (S_+), ainsi que de calculer σ et \varnothing aux nœuds du réseau (fig. 7). Le schéma de calcul sera le suivant que nous exposons dans le cas de I.2.

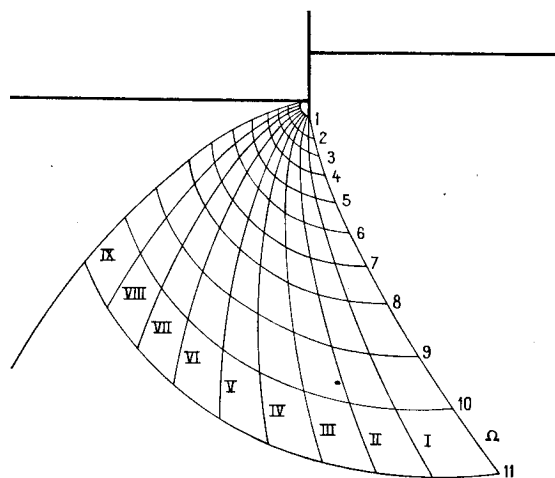


Fig. 7

Détermination graphique de I.2. — Elle pourrait se faire simplement en assimilant les courbes 1 et 2 inconnues à leurs tangentes en I.1, et $\Omega.2$ respectivement, connues car \varnothing y est connu. Nous avons préféré, pour plus de précision, assimiler les arcs de courbes à des arcs de cercles, faisant de plus l'hypothèse que sur I, entre I.1, et I.2, la variation de \varnothing (donc d'inclinaison) — nécessaire à connaître pour déterminer la pente de la corde du cercle — est la même que celle connue entre $\Omega.1$ et $\Omega.2$. De même pour la variation entre $\Omega.2$ et I.2 (fig. 8).

Le point I.2 est alors à l'intersection des deux cordes :

— issues de I.1 avec l'inclinaison :

$$\langle \alpha_- \rangle_1 = (\alpha_-)_{I.1} + \frac{(\delta \alpha_-)_{\Omega}}{2}$$

où :

$$(\delta\alpha_-)_{\Omega} = (\alpha_-)_{\Omega.2} - (\alpha_-)_{\Omega.1} = \varnothing_{\Omega.2} - \varnothing_{\Omega.1}$$

— issue de $\Omega.2$ avec l'inclinaison :

$$\langle \alpha_+ \rangle_2 = (\alpha_+)_{\Omega.2} - \frac{(\delta\alpha_+)1}{2}$$

où :

$$\begin{aligned} (\delta\alpha_+)1 &= (\alpha_+)_{\Omega.1} - (\alpha_+)_{I.1} \\ &= \varnothing_{\Omega.1} - \varnothing_{I.1} \end{aligned}$$

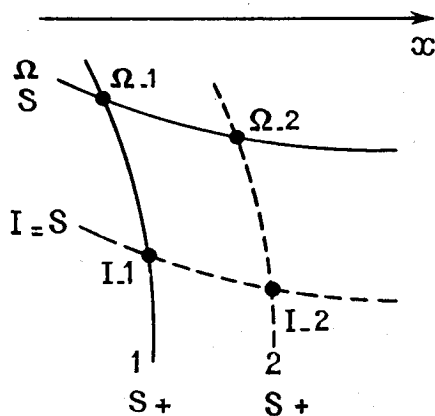


Fig. 8

Le point I.2 est ainsi géométriquement déterminé, et il s'agit maintenant de :

— calculer en ce point les valeurs de \varnothing et σ .

Rappelons que le long de toute courbe S- nous avons $d\eta/dx = a$, et $S_+ d\xi/dz = b$ soit en passant aux différences finies :

$$\begin{aligned} \Delta\eta \neq a\Delta x \left\{ \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right. & \text{avec} \\ \Delta\xi \neq b\Delta x \left\{ \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right. & = \pm \frac{\gamma \sin(\varnothing \pm \mu)}{2\sigma \sin \varphi \cos(\varnothing \mp \mu)} \\ & = \pm \frac{\gamma \sin(\varnothing \pm \mu)}{\sigma \cos(\varnothing \mp \mu)} \end{aligned}$$

Sur I (S_+) a est calculé en utilisant les valeurs moyennes $\langle \alpha_- \rangle_1$ de $(\varnothing - \mu)$ déjà définie et $\langle \alpha_+ \rangle_1 = \langle \alpha_- \rangle_1 + 2\mu$ de $(\varnothing + \mu)$ et pour σ la valeur du point connu I.1.

soit :

$$a = \frac{\gamma \sin \langle \alpha_+ \rangle_1}{\sigma_{\Omega.1} \cos \langle \alpha_- \rangle_1}$$

et de même sur 2 on aura :

$$b = - \frac{\gamma \sin \langle \alpha_- \rangle_2}{\sigma_{\Omega.2} \cos \langle \alpha_+ \rangle_2}$$

et ensuite :

$$\begin{aligned} \eta_{I.2} &= \eta_{I.1} + a(x_{I.2} - x_{I.1}) \\ \xi_{I.2} &= \xi_{\Omega.2} + b(x_{I.2} - x_{\Omega.2}) \end{aligned}$$

d'où :

$$\varnothing_{I.2} = \frac{1}{2} (\xi_{I.2} - \eta_{I.2})$$

$$\chi_{I.2} = \frac{1}{2} (\xi_{I.2} + \eta_{I.2})$$

$$\text{et } \sigma_{I.2} = \sigma_0 \exp(2\chi_{I.2} \operatorname{tg} \varphi)$$

III.5. Unités utilisées dans les calculs.

Les calculs sont effectués sur des grandeurs sans dimension. Les grandeurs de références choisies sont h pour les longueurs, γ pour les forces de masse et donc γh pour les contraintes, γh^2 pour les forces portantes etc. Dans les formules donnant χ nous avons pris pour σ_0 la valeur de σ en unités γh au point $\Omega.1$ qui sert de base à notre calcul soit $\sigma_0 = 8.9$.

III.6. Causes d'erreurs principales dans les calculs.

En exécutant les calculs nous avons remarqué que la principale cause d'erreur résidait dans la relative imprécision des données σ et \varnothing sur la courbe Ω qui nous sert de point de départ pour la construction de ce réseau. Il est donc inutile d'utiliser pour calculer a et b des valeurs moyennes de σ . Les résultats sont donnés dans les tableaux en variables ξ et η comme le fait Sokolovski, et en variables \varnothing et σ qui sont plus utilisables, le tracé du réseau est également représenté (fig. 7).

TABLEAU I

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ω													
x00	.36	.77	1.10	1.58	2.12	2.73	3.45	4.20	5.26	6.30	7.69	
y00	.02	.09	.18	.34	.54	.82	1.20	1.63	2.28	3.00	4.01	
\emptyset	30.0	37.5	42.6	46.0	49.7	53.2	56.0	58.6	60.8	63.2	65.5	67.9	
σ	7.56	8.9	10.3	11.1	12.5	14.2	15.5	17.8	19.2	21.8	24.2	27.5	
I													
x00	.32	.71	1.04	1.50	2.04	2.66	3.38	4.14	5.24	6.35	7.78	
y00	-.035	-.03	-.005	.05	.16	.33	.56	.81	1.33	1.87	2.66	
\emptyset	20.0	27.5	33.0	35.8	39.8	43.8	46.4	50.1	52.3	55.1	57.6	60.4	
σ	9.25	10.9	12.6	13.7	15.4	17.3	19.0	21.4	23.4	26.3	29.1	32.9	
II													
x00	.28	.64	.94	1.39	1.92	2.51	3.24	4.00	5.11	6.22	7.71	
y00	-.085	-.15	-.17	-.19	-.16	-.10	.02	.20	.50	.88	1.47	
\emptyset	10.0	17.5	23.3	26.3	30.5	34.8	37.8	41.8	44.3	47.5	50.3	53.5	
σ	11.3	13.3	15.3	16.6	18.5	20.8	22.7	25.6	27.8	31.0	34.3	38.6	
III													
x00	.24	.56	.83	1.25	1.76	2.32	3.03	3.77	4.87	5.99	7.50	
y00	-.12	-.23	-.31	-.39	-.45	-.48	-.47	-.41	-.27	-.06	.31	
\emptyset	0.0	7.5	13.4	16.6	21.1	25.6	28.8	33.1	35.9	39.4	42.4	46.0	
σ	13.8	16.3	18.6	20.1	22.4	25.0	27.3	30.5	33.1	36.8	40.5	45.4	
IV													
x00	.20	.47	.71	1.09	1.56	2.08	2.76	3.47	4.53	5.63	7.13	
y00	-.14	-.30	-.41	-.55	-.69	-.81	-.91	-.96	-.99	-.95	-.80	
\emptyset	-10.0	-2.55	3.5	6.8	11.4	16.2	19.5	24.0	27.0	30.8	34.1	37.9	
σ	16.9	19.9	22.7	24.4	27.1	30.2	32.8	36.6	39.7	43.9	48.1	53.7	
V													
x00	.16	.39	.59	.91	1.33	1.81	2.44	3.10	4.10	5.15	6.61	
y00	-.15	-.35	-.49	-.68	-.89	-1.08	-1.28	-1.45	-1.63	-1.75	-1.83	
\emptyset	-20.0	-12.5	-6.2	-3.0	1.7	6.5	10.0	14.7	17.8	21.8	25.3	29.4	
σ	20.7	24.3	27.8	29.7	32.8	36.6	39.6	44.1	47.5	52.5	57.4	63.9	
VI													
x00	-.11	.30	.46	.73	1.10	1.51	2.08	2.67	3.60	4.58	5.96	
y00	-.16	-.38	-.54	-.77	-1.03	-1.29	-1.58	-1.84	-2.17	-2.45	-2.74	
\emptyset	-30.0	-22.5	-16.2	-13.0	-8.2	-3.3	.3	5.1	8.3	12.5	16.2	20.5	
σ	25.3	29.8	33.7	36.1	39.9	44.4	47.9	53.3	57.3	63.1	68.9	76.4	
VI													
x00	.07	.20	.33	.54	.84	1.19	1.68	2.20	3.03	3.92	5.19	
y00	-.16	-.39	-.57	-.83	-1.14	-1.44	-1.82	-2.15	-2.61	-3.04	-3.53	
\emptyset	-40.0	-32.5	-26.2	-23.0	-18.2	-13.2	-9.6	-4.7	-1.4	2.9	6.7	11.2	
σ	30.9	36.4	41.2	44.1	48.6	53.9	58.2	64.5	69.3	76.1	82.9	91.7	
VIII													
x00	.04	.13	.22	.37	.60	.87	1.28	1.71	2.42	3.20	4.33	
y00	-.15	-.39	-.57	-.85	-1.19	-1.53	-1.96	-2.36	-2.94	-3.48	-4.16	
\emptyset	-50.0	-42.5	-36.2	-33.0	-28.2	-23.1	-19.5	-14.5	-11.2	-6.8	-2.9	1.6	
σ	37.8	44.5	50.3	53.7	59.3	65.6	70.7	78.3	83.9	92.0	100.0	110.5	
IX													
x00	.004	.055	.11	.21	.37	.57	.88	1.22	1.79	2.45	3.42	5.60
y00	-.14	-.36	-.55	-.84	-1.19	-1.56	-2.04	-2.48	-3.14	-3.78	-4.61	-6.20
\emptyset	-60.0	-52.5	-46.2	-43.0	-38.2	-33.1	-29.5	-24.5	-21.1	-16.7	-12.7	-8.1	0.0
σ	46.2	54.4	61.4	65.6	72.2	79.9	86.0	95.2	102.00	111.6	121.2	133.6	156.

FORCE PORTANTE D'UNE FONDATION

TABLEAU II

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ω													
x00	.36	.77	1.10	1.58	2.12	2.73	3.45	4.20	5.26	6.30	7.69	
y00	.02	.09	.18	.34	.54	.82	1.20	1.63	2.28	3.00	4.01	
ξ382	.655	.876	.995	1.161	1.333	1.456	1.622	1.729	1.880	2.009	2.162	
η	-.665	-.655	-.616	-.611	-.575	-.524	-.499	-.423	-.394	-.326	-.278	-.207	
I													
x00	.32	.71	1.04	1.50	2.04	2.66	3.38	4.14	5.24	6.33	7.78	
y00	-.035	-.03	-.005	.05	.16	.33	.56	.81	1.33	1.87	2.66	
ξ382	.655	.878	.998	1.167	1.341	1.468	1.638	1.752	1.901	2.034	2.189	
η	-.316	-.306	-.275	-.252	-.220	-.186	-.151	-.112	-.074	-.024	.022	.079	
II													
x00	.28	.64	.94	1.39	1.92	2.51	3.24	4.00	5.11	6.22	7.71	
y00	-.085	-.15	-.17	-.19	-.16	-.10	.02	.20	.50	.88	1.47	
ξ382	.655	.877	.998	1.169	1.345	1.473	1.645	1.761	1.913	2.048	2.206	
η033	.043	.063	.080	.103	.128	.155	.185	.214	.254	.291	.337	
III													
x00	.24	.56	.83	1.25	1.76	2.32	3.03	3.77	4.87	5.99	7.50	
y00	-.12	-.23	-.31	-.39	-.45	-.48	-.47	-.41	-.27	-.06	.31	
ξ382	.655	.876	.997	1.168	1.345	1.474	1.648	1.765	1.919	2.056	2.217	
η382	.392	.405	.416	.432	.450	.469	.492	.514	.545	.574	611.	
IV													
x00	.20	.47	.71	1.09	1.56	2.08	2.76	3.47	4.53	5.63	7.13	
y00	-.14	-.30	-.41	-.55	-.69	-.81	-.91	-.96	-.99	-.95	-.80	
ξ382	.655	.873	.994	1.165	1.343	1.472	1.647	1.766	1.921	2.059	2.222	
η731	.741	.749	.756	.766	.778	.791	.808	.824	.847	.869	.897	
V													
x00	.16	.39	.59	.91	1.33	1.81	2.44	3.10	4.10	5.15	6.61	
y00	-.15	-.35	-.49	-.68	-.89	-1.08	-1.28	-1.45	-1.63	-1.75	-1.83	
ξ382	.655	.871	.991	1.162	1.339	1.469	1.645	1.764	1.920	2.059	2.223	
η	1.081	1.090	1.094	1.098	1.104	1.112	1.121	1.132	1.143	1.159	1.176	1.197	
VI													
x00	.11	.30	.46	.73	1.10	1.51	2.08	2.67	3.60	4.58	5.96	
y00	-.16	-.38	-.54	-.77	-1.03	-1.29	-1.58	-1.84	-2.17	-2.45	-2.74	
ξ382	.655	.869	.988	1.159	1.336	1.465	1.641	1.760	1.917	2.057	2.222	
η	1.430	1.439	1.441	1.442	1.446	1.450	1.456	1.463	1.470	1.481	1.493	1.508	
VI													
x00	.07	.20	.33	.54	.84	1.19	1.68	2.20	3.03	3.92	5.19	
y00	-.16	-.39	-.57	-.83	-1.14	-1.44	-1.82	-2.15	-2.61	-3.04	-3.53	
ξ382	.655	.867	.986	1.155	1.332	1.461	1.637	1.756	1.912	2.052	2.218	
η	1.779	1.788	1.789	1.789	1.791	1.793	1.795	1.799	1.804	1.811	1.818	1.828	
VIII													
x00	.04	.13	.22	.37	.60	.87	1.28	1.71	2.42	3.20	4.33	
y00	-.15	-.39	-.57	-.85	-1.19	-1.53	-1.96	-2.36	-2.94	-3.48	-4.16	
ξ382	.655	.865	.983	1.152	1.329	1.457	1.632	1.751	1.907	2.048	2.213	
η	2.128	2.137	2.136	2.136	2.136	2.136	2.137	2.139	2.141	2.145	2.149	2.156	
IX													
x00	.004	.055	.11	.21	.37	.57	.88	1.22	1.79	2.45	3.42	5.60
y00	-.14	-.36	-.55	-.84	-1.19	-1.56	-2.04	-2.48	-3.14	-3.78	-4.61	-6.20
ξ382	.655	.864	.982	1.150	1.326	1.453	1.628	1.747	1.903	2.043	2.208	
η	2.477	2.486	2.484	2.484	2.483	2.482	2.482	2.482	2.483	2.485	2.487	2.490	

IV. FORCE PORTANTE DES FONDATIONS

A partir des tableaux précédents il est possible de déterminer pour chaque courbe S_n , par exemple la courbe N, l'intervalle $(N, n, N, n + 1)$ dans lequel \varnothing s'annule et où, par suite, la courbe fait l'angle μ avec la verticale. Par interpolation dans cet intervalle, ce qui est aisé puisque les tangentes en $N.n$ et $N.n + 1$ sont connues, on obtient avec précision le point de N où elle fait avec la verticale l'angle μ (ici 30°). On en déduit alors évidemment la largeur de la fondation pour laquelle N est séparatrice entre la zone plastique et la zone morte.

Les largeurs trouvées ont été les suivantes :

Courbes	IV	V	VI	VII	VIII	IX
2b.....	.43	1.22	2.48	4.67	7.80	12.40

A noter que, pour la courbe IX il ne nous a pas été possible pour des raisons matérielles de construire un point de IX où l'angle \varnothing fût négatif. La largeur limite $2b$ a été déterminée par des extrapolations de plusieurs courbes qui se sont révélées concordantes :

$$x = 5.60$$

$$y = 6.20$$

On a, de même, extrapolé pour obtenir la valeur de σ au point.

IV.1. Détermination de la force portante de la fondation correspondant à la courbe N.

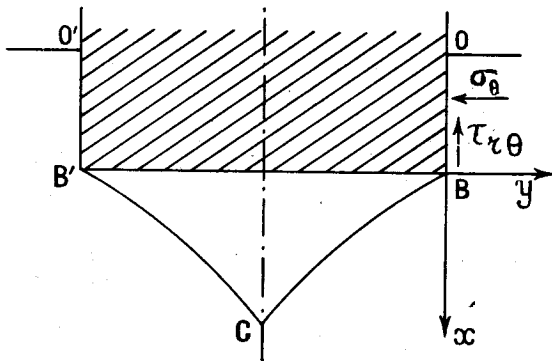


Fig. 9

La force portante sur BB' est la résultante des actions sur BCB' diminuée du poids du terrain de la zone morte.

Pour obtenir la force portante totale de la fondation, il y a lieu d'ajouter à cela la résultante des actions tangentielles de frottement sur OB et $O'B'$ (fig. 9).

IV.2. Action de frottement sur OB et O'B'.

σ_θ et $\tau_{r\theta}$ étant comptés positivement comme indiqué sur la figure on a :

$$\sigma_\theta = \gamma r Q$$

$$\tau_{r\theta} = \gamma r T$$

Q et T étant donnés par Sokolovski. Dans le cas présent $Q = 5.67$, $T = 3.27$. D'où la force portante le long de OB (par longueur courante de fondation parallèle à Oz) :

$$F = \int_0^B \tau_{r\theta} dr = \frac{1}{2} \gamma h^2 T$$

Total sur OB et $O'B'$: $F = T = 3.27$ en unités γh^2 .

IV.3. Force portante sur BB'.

Il est évident que la résultante des actions sur BCB' est égale au double des actions verticales sur BC , actions qui sont égales ici à :

$$\int_{BC} \sigma_x |dy| + \tau_{xy} |dx|$$

Rappelons que nous avons :

$$\sigma_x = \sigma (1 + \sin \varphi \cos 2\varnothing)$$

$$\tau_{xy} = \sigma \sin \varphi \sin 2\varnothing$$

Pour l'intégration numérique nous avons pris, sur chaque segment, pour σ_x et τ_{xy} des valeurs moyennes $\langle \sigma_x \rangle$ et $\langle \tau_{xy} \rangle$ calculées à partir des moyennes $\langle \sigma \rangle$ et $\langle \varnothing \rangle$ et nous les avons multipliées par Δ_x et Δ_y . Le calcul de la surface du coin du sol ne présente aucune difficulté. Remarquons que τ_{xy} est toujours négatif car $-\frac{\pi}{2} < \varnothing < 0$: l'effet du cisaillement est donc de diminuer la force portante.

Nous avons représenté en fonction de la largeur $2b$, la force portante totale de la fondation. Il est évident que par suite de la symétrie du problème que nous avons utilisée, la résultante des actions sur la fondation est axiale. Autrement dit le calcul

fait s'applique dans le cas où la fondation est chargée sans excentrement.

IV.4. Comparaison des résultats obtenus avec ceux donnés par la formule de M. Kerisel.

Il est peut être intéressant de comparer les résultats obtenus avec ceux fournis par la formule de M. Kerisel qui s'écrit :

$$P_{max} = \gamma a \frac{B}{2} N_\gamma + \gamma a D N_q$$

soit avec nos notations et en passant aux forces portantes :

$$F = \gamma h^2 \left[\frac{b}{h} N_\gamma + N_q \right] \frac{2b}{h}$$

l'auteur indique comme valeurs de N_q et N_γ pour $\delta = \varphi = 30^\circ$:

$$N_q = 18.4$$

$$N_\gamma = 15$$

et signale que la formule doit être approchée par défaut, car elle ne tient pas compte du frottement latéral et de l'effet « d'autofrettage ». Une troisième raison est d'ailleurs que, traduisant la superposition de deux états d'équilibre limite, elle représente un équilibre surabondant.

La comparaison donne les résultats suivants (fig. 10) :

$2b/h$	Résultat M. Kerisel	Force portante sur BB'	Écart Kerisel	Force portante totale	Écart Kerisel
			%		%
12.4...	1 381	1 602	16	1 605	16
7.8...	600	720	20	722	20
4.7...	250	310	24	313	25.5
2.5...	92	116	26	120	30
1.2...	33	42.5	27	46	37
0.43...	9.3	11.5	24	14.8	60

L'effet de frottement latéral n'est important que pour les fondations étroites.

Ajoutons que la validité de la solution que nous proposons est douteuse lorsque $2b/H$ devient petit devant 1 : la base, peu large, de la fondation ne parvient pas alors à chasser le sol comme le voudrait notre tracé des lignes de glissement.

Un phénomène analogue a été observé avec les pieux pour $2b/h < \frac{1}{7}$.

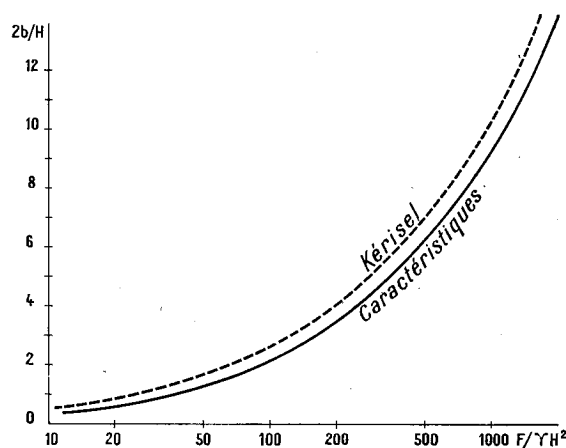


Fig. 10

BIBLIOGRAPHIE

V.V. SOKOLOVSKI. — *Statics of soil media*, Londres, 1960
 V.V. SOKOLOVSKI. — *Statics of soil media*, 3^e édition russe, 1960.
 J. MANDEL. — *Séminaire de Plasticité*, 1961 (École Polytechnique).
 J. KERISEL. — *Cours de Mécanique des sols* (École nationale des Ponts-et-Chaussées).
 M. PECHERE. — *Équilibre limite dans les sols* in *Annales des Ponts et Chaussées*, novembre-décembre 1961.